


FIDEM LIBERTATEM AMICITIAM
John Quincy Adams.



ANALYSE DEMONTRÉE,

OU

LA MÉTHODE

DE RÉSOUDRE LES PROBLÊMES

DES MATHEMATIQUES,

ET

D'APPRENDRE FACILEMENT CES SCIENCES;

Expliquée & démontrée dans le premier Volume, & appliquée, dans le second, à découvrir les proprietez des Figures de la Géometrie simple & composée ; à résoudre les Problêmes de ces Sciences & les Problêmes des Sciences Physico-mathématiques, en employant le calcul ordinaire de l'Algebre, le calcul differentiel & le calcul intégral. Ces derniers calculs y sont aussi expliquez & démontrez.

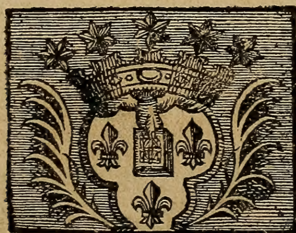
DEDIÉE A MONSEIGNEUR LE DUC DE BOURGOGNE.

Par le R. P. REYNEAU, *Prêtre de l'Oratoire.*

SECONDE EDITION,

Augmentée des Remarques de M. de Varignon.

TOME I.



A PARIS,

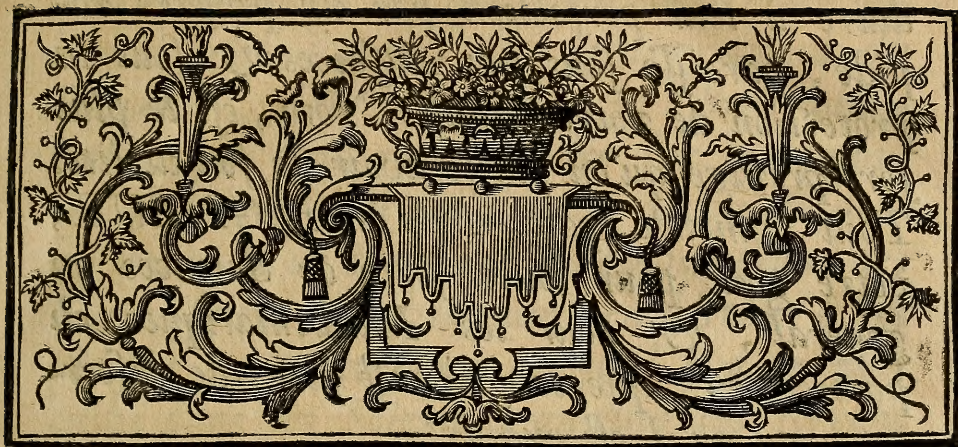
Chez QUILLAU, Imprimeur-Juré-Libraire de l'Université, rue Galande, près la Place Maubert, à l'Annonciation.

M. DCC. XXXVI.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

Hon. Chas. F. Adams,

July 2, 1891.



A MONSEIGNEUR
LE DUC
DE BOURGOGNE.

ONSEIGNEUR,

L'honneur que vous me faites de permettre que cet Ouvrage, composé pour faciliter l'é-

tude des Mathematiques, & pour les conduire à leur perfection par un progrès rapide, paroiſſe ſous vos Auſpices & ſous la protection de votre auguſte Nom, eſt le plus fort préjugé qu'on puiſſe avoir de ſon utilité. Tout le monde ſçait, MONSEIGNEUR, votre goût pour toute ſorte de Sciences en general, & pour les Mathematiques en particulier; que ce goût eſt plein de diſcernement! qu'il eſt exquis!

On voit avec admiration qu'un jeune Heros qui a ſçu conduire des Armées, vaincre l'Ennemi, & emporter les plus fortes Places preſqu'auſſi-tôt qu'il a été en âge de manier les armes; toujours plein d'une noble ardeur, qui ne reſpire que de nouvelles conquêtes & de nouveaux triomphes; toujours prêt à s'expoſer pour le bien de l'Etat, ſoit qu'il faille porter la terreur au dehors en fondant ſur nos Ennemis, ou raſſurer la confiance au dedans du Royaume, en rendant inutile leur irruption ſur une de nos Provinces: qui ne neglige aucun des ſoins qu'un Prince deſtiné à gouverner un grand Royaume, doit prendre de s'inſtruire par avance de tout ce qui concerne le bien de l'Etat & les avantages

particuliers de chaque Province, & generalement de tout ce qui peut contribuer au bonheur des Peuples & à la grandeur du Souverain : On voit, dis-je, avec admiration que ſans rien prendre ſur le temps, qu'une pieté ſolide lui fait un devoir de donner au culte de Dieu & à l'étude aſſidue des Livres ſaints, il ſçait encore en dérober à ſes plaiſirs pour déveloper ce qu'il y a de plus caché dans les Sciences; qu'elles lui ſervent de délaſſement; & qu'il honore de ſa protection ceux qui les cultivent, après s'être mis en état de juger par lui-même de leurs ſciences, & de décider de leurs Ouvrages.

Mais, MONSEIGNEUR, les traits de la plume d'un Geometre n'ont pas aſſez de délicateſſe ni de vivacité pour repreſenter au naturel le portrait que vous avez tracé vous-même dans tous les eſprits & dans tous les cœurs par cette conduite toujours remplie de ſageſſe & de bonté, formée ſur les admirables Exemples & ſur les Royales Inſtructions du plus Sage, du plus Religieux, du plus Magnanime, en un mot du Premier & du plus Grand des Rois votre auguſte Ayeul.

Je puis assurer, MONSEIGNEUR, qu'il n'y a personne en qui il produise de plus vifs sentimens de veneration que dans celui qui a l'honneur d'être avec un très-profond respect,

MONSEIGNEUR,

Votre très-humble & très-obéissant
Serviteur CHARLES REYNEAU,
Prêtre de l'Oratoire.



PRÉFACE.



'ESPRIT de l'homme eſt ſi borné, qu'il ne peut voir diſtinctement d'une ſimple vûe beaucoup d'objets à la fois. Les perceptions vives; comme ſont toutes celles des ſens & de l'imagination, l'éblouiſſent, & elles occupent tellement ſon étendue, qu'il ne peut découvrir les raports & les proprietés des objets ſenſibles, qu'en les conſiderant par parties les unes après les autres avec une application penible & fatigante; & quand il eſt attentif à quelqu'une, il a perdu de vûe les autres, qui lui ſeroient pourtant néceſſaires afin d'en appercevoir les raports.

C'eſt une des principales cauſes du peu de progrès qu'ont fait les ſciences ſenſibles : Mais, pour ne parler ici que des Mathematiques, que leur utilité, leur beauté, leur évidence & leur certitude ont toujours fait cultiver; pendant que l'on ne s'y eſt appliqué que par la contemplation des figures mêmes, que l'on a cherché les proprietez

des figures en les regardant, ou en les formant dans ſon imagination, on n'a pas fait beaucoup de chemin: les découvertes étoient fort bornées: on ne trouvoit avec beaucoup de peine que des reſolutions particulieres des Problêmes; on ſe fatiguoit; on ſe rebuttoit; & l'on ne peut aſſez louer le travail, la patience & la force d'eſprit des anciens Geometres, d'avoir porté les Mathematiques par des moyens ſi difficiles, à l'état où ils nous les ont laiſſées.

On s'aviſa heureuſement, dans le dernier ſiecle, d'exprimer les lignes & les figures par les caracteres familiers de l'alphabet, & de réduire ces expreſſions à un calcul facile, qui exprimât auſſi tous les raports ſimples & compoſés que peuvent avoir ces lignes & ces figures. On forma un Art methodique (qui eſt ce que l'on nomme l'*Analyſe*) pour trouver, par les raports connus qu'ont les grandeurs inconnues que l'on cherche dans les Problêmes avec celles qui ſont connues, des *équations* qui exprimaſſent les conditions & la nature, pour ainſi dire, des Problêmes; & pour découvrir les valeurs des grandeurs inconnues de ces équations; ce qui donne la reſolution des Problêmes. *Monſieur Deſcartes* perfectionna & réduiſit à une extrême facilité ces calculs & cette Analyſe naiſſante. Il y ajouta l'excellente methode d'employer les expreſſions indéterminées, qui, quelque ſimples qu'elles étoient, repreſentaſſent pourtant une infinité de grandeurs; & de les déterminer aux grandeurs particulieres de tous les cas auſquels elles peuvent

convenir:

convenir : la methode de réduire les lignes courbes à des équations qui en exprimassent les principales proprietez ; & de tirer de ces équations toutes les choses que l'on pouvoit desirer de connoître sur ces courbes : enfin la maniere d'employer les courbes elles-mêmes à la resolution des équations & des Problêmes.

Ces nouvelles methodes, réduisant la Geometrie à un calcul simple & facile, retranchoient ce qu'il y avoit d'embarassant dans les figures, c'est-à-dire, tout ce qui fatiguoit l'imagination, & ce qui remplissoit la capacité de l'esprit. Elles lui laissoient la liberté de penetrer son sujet, & de découvrir avec évidence tout ce qu'il renfermoit. Elles augmentoient même, pour ainsi dire, l'étendue de l'esprit par l'art de lui représenter, comme dans une perspective, sous des expressions simples & abregées, un nombre infini d'objets. Les Mathematiques devinrent par là si faciles, que chaque trait de plume donnoit naissance à des découvertes. Alors le plaisir succeda à la peine, & le cœur dédommagé permit à l'esprit de voir les utilitez & les beautez des Mathematiques, & il s'y rendit. Aussi ces sciences changerent-elles de forme. On vit une Geometrie nouvelle, qui contenoit tout ce que nous avions reçû des anciens, & qui alloit infiniment plus loin : les resolutions étoient generales, & aucun cas particulier ne leur échapoit.

On vit naître de la même source des sciences curieuses & utiles, & presque toutes les autres en tirerent un nouvel éclat : comme celle qui a

laiſſer aux autres le plaiſir de les trouver, que *Meſſieurs Bernoulli*, qui en virent toute l'utilité, s'y appliquerent avec tant de ſuccès, qu'ils les pénétrerent, ſe les rendirent propres, y ajouterent de nouvelles methodes, & en firent uſage dans la reſolution d'une grande quantité de nouveaux Problêmes.

Monſieur le Marquis de l'Hoſpital donna l'excellent Ouvrage *de l'Analyſe des infiniment petits*, où le calcul differentiel, & les principaux uſages de ce calcul pour toutes les courbes, ſont expliquez : & il fit voir qu'il avoit pénétré dans tout ce que le calcul integral pouvoit avoir de plus caché, par les réſolutions complettes qu'il trouva des plus difficiles Problêmes, qui furent propoſez par ceux qui s'en étoient rendu les maîtres. *Monſieur Varignon* doit bientôt donner une ſcience generale du Mouvement toute nouvelle, qui eſt le fruit des profondes découvertes qu'il a faites dans ces nouvelles methodes, & dans la Geometrie compoſée. On doit juger du prix de l'ouvrage par les beaux morceaux qui paroiſſent tous les ans. Ce ſont des pieces achevées, remplies de nouvelles découvertes qui font bien deſirer l'ouvrage entier dont elles ne doivent faire que quelques parties. *Monſieur Carré* employa le principe le plus general du calcul integral à la meſure des ſurfaces, des ſolides, des diſtances des centres de peſanteur & d'oſcillation. *Monſieur Nevvton* fit paroître de ſon côté le ſçavant Ouvrage *des Principes Mathematiques de la Philoſophie naturelle*, qui eſt tout fondé ſur ces nouvelles methodes qu'il avoit inventées, mais dont il n'a laiſſé voir que

quelques vestiges, pour donner lieu à ceux qui voudroient entrer dans l'invention même des veritez qu'il y découvre, de se rendre propres les methodes qui en sont la clef. Enfin depuis l'invention de ces nouveaux calculs, on a non-seulement résolu d'une maniere courte & generale les Problêmes les plus difficiles, qui avoient été trouvez par les methodes de Monsieur Descartes appliquées au calcul ordinaire de l'Algebre ; mais on a vû *les Actes de Lipsic, les Journaux des Sçavans & les Memoires de l'Academie Royale des Sciences* remplis de résolutions de Problêmes, que l'on n'auroit osé tenter auparavant. Elles étoient tirées comme du fond de la natute, & des premiers & plus intimes principes du mouvement, de la courbure même des courbes & des petits angles que forment entr'elles les tangentes de leurs points qui se touchent, que l'on peut bien concevoir, mais que l'on ne sçauroit comparer avec les angles déterminez que nous mesurons ; & l'on s'est ouvert par le moyen de ces nouveaux calculs une voye qui conduit à une nouvelle Geometrie des courbes mechaniques & parcourantes, qui est aussi utile que celle que l'on avoit déja.

Les resolutions d'un si grand nombre de Problêmes nouveaux, que nous ont donné les illustres Inventeurs des calculs differentiel & integral, & ceux qui après eux se les sont rendu propres par leur travail, sont les fruits que l'Analyse a recueillis de ces calculs ; mais ils ne sont que pour un petit nombre de Sçavans ; c'est le prix de la peine qu'il faut prendre pour inventer soi-même quelques-

unes des methodes qui ont ſervi à les découvrir. Pour les poſſeder, il faut ſe mettre en état de faire de pareilles découvertes; & ce n'eſt que depuis peu de temps que l'on a vû des regles du calcul integral dans l'ouvrage de *Monſieur Cheinée* Ecoſſois, *de Methodo fluxionum inversâ*, (les Anglois donnent après Monſieur Newton, au calcul differentiel, le nom de *calcul des fluxions*,) & dans le petit traité *de quadraturis curvarum*, que Monſieur Newton a mis à la fin de ſon ouvrage ſur les couleurs.

On a toujours regardé les Mathematiques comme très-utiles pour la perfection de la Phyſique & des Arts, & pour former l'eſprit des jeunes gens, en les accoutumant à apporter aux ſujets de leurs applications toute l'attention qu'ils demandent, à mettre, dans toutes les démarches que doit faire leur eſprit dans la recherche de la verité, l'ordre qu'il faut pour y arriver; à ne donner leur conſentement entier qu'à l'évidence dans les ſciences naturelles: en leur rendant familiere la pratique des regles qui font découvrir, dans toutes les occaſions où ils peuvent ſe trouver, le parti le plus raiſonnable: & enfin en leur faiſant acquerir la ſagacité neceſſaire pour trouver dans les queſtions difficiles les moyens les plus propres à les réſoudre. Cette utilité des Mathematiques, & l'habitude de les mettre à la portée des commençans acquiſe pendant vingt-deux années de temps que je les ai enſeignées publiquement, m'ont porté à mettre toutes les methodes que nous avons reçues de Monſieur Deſcartes & de ſes Diſciples; & celles qui ont été découvertes par les ſçavans

Geometres de notre temps, dans leur ordre naturel, de maniere qu'elles s'éclairciſſent mutuellement, & fuſſent toutes démontrées dans cet Ouvrage, que je nomme à cauſe de cela l'*Analyſe démontrée*. Je me ſuis propoſé de rendre, par le moyen de ces methodes, les Mathematiques faciles à ceux qui commencent, & qui veulent les ſçavoir à fond; en leur découvrant les voyes qui les conduiront des premiers principes à tout ce qu'ils peuvent deſirer d'en connoître, ſans ſe fatiguer l'imagination, ſans être obligez de lire de gros volumes, ſans qu'il faille charger leur memoire d'un grand nombre de propoſitions: en leur ôtant par là ce qu'il y avoit de rebutant & de plus pénible dans l'étude des Mathematiques: en les faiſant entrer dans l'invention naturelle de ces ſciences, qui les menera ſur chaque ſujet à des réſolutions ſimples & generales: en les mettant enfin en état d'entendre toutes les nouvelles découvertes; & de faire eux-mêmes celles qu'ils voudront entreprendre.

Cet Ouvrage eſt partagé en huit Livres: l'Analyſe eſt expliquée & démontrée dans les ſept premiers Livres, qui font le premier Volume; & le huitiéme, qui eſt comme une ſeconde partie de l'Ouvrage, & qui en eſt le ſecond Volume, fait voir les uſages de l'Analyſe, & apprend aux Lecteurs qui commencent, la maniere d'en appliquer les methodes à la Geometrie ſimple & compoſée, & à la reſolution des Problêmes des ſciences Phyſico-Mathematiques, en ſe ſervant du calcul ordinaire de l'Algebre, du calcul differentiel & du calcul integral: ces nouveaux calculs y ſont auſſi expliquez & démontrez, comme on

le dira dans la Préface de ce huitiéme Livre.

Le premier Livre contient l'Analyſe ſimple, & la reſolution de pluſieurs Problêmes qui n'ont beſoin que de l'Analyſe ſimple. Les ſix Livres ſuivans expliquent & démontrent l'Analyſe compoſée. Le ſecond & le troiſiéme enſeignent les premiers principes de l'Analyſe, & les préparations qu'il faut donner aux équations compoſées pour les reſoudre.

La methode de réduire les Problêmes aux équations qui en expriment toutes les conditions, eſt expliquée dans le ſecond Livre avec pluſieurs préparations qu'il faut faire ſur les équations, pour en rendre la reſolution plus facile; comme la maniere d'en ôter les fractions & les incommenſurables, & la maniere de trouver le plus grand diviſeur commun à pluſieurs équations d'un même Problême.

On explique dans le troiſiéme Livre la formation des équations: elle ſert à faire concevoir clairement leur nature aux Lecteurs qui commencent. On leur apprend à diſtinguer le nombre & les qualitez des valeurs de l'inconnue de chaque équation; & on leur enſeigne les differentes transformations des équations avec leurs uſages. Après avoir appris les premiers principes de l'Analyſe dans les trois premiers Livres, qui ſont comme des préparations pour reſoudre les équations & les Problêmes qu'elles expriment, on enſeigne la reſolution des équations dans les quatre Livres ſuivans.

Le quatriéme Livre contient pluſieurs methodes pour reſoudre toutes les équations de quelque degré qu'elles puiſſent être, lorſque les valeurs de l'inconnue ſont commenſurables; & les methodes generales

nerales de réduire les équations composées aux plus simples qu'il est possible. Les regles qu'a données *Monsieur Hudde* dans la lettre intitulée *de reductione æquationum*, qui est à la fin du premier Volume de la Geometrie de Monsieur Descartes, y sont mises en ordre & démontrées. La methode d'employer les grandeurs indéterminées qui representent toutes les grandeurs particulieres, pour découvrir celles que l'on cherche, est expliquée dans ce quatriéme Livre, & mise en usage dans tous les suivans. Les Lecteurs qui commencent, doivent se rendre familiere cette methode de Monsieur Descartes: elle est comme la clef qui ouvre l'entrée presque à toutes les découvertes. On explique dans le même Livre tout ce qui regarde les valeurs égales des inconnues des équations; ce qui est de grand usage dans la resolution de plusieurs Problêmes.

On a mis dans le cinquiéme Livre les Methodes de resoudre les équations composées en particulier du second degré, du troisiéme, du quatriéme, &c. On tâche de faire entrer les commençans dans ces resolutions, qui sont la plûpart de l'invention du *Pere Prestet*, comme s'ils les découvroient eux-mêmes. Ils y remarqueront qu'il y a dans l'Analyse, aussi bien que dans la Geometrie simple, des Problêmes dont l'on n'a pû jusqu'à present démontrer l'impossibilité, ni trouver des methodes qui en donnassent la resolution exacte; qu'on n'a pas laissé cependant de trouver des methodes qui en donnassent des resolutions si approchantes, que les Mathematiques practiques & les Arts en tirent les

mêmes avantages qu'ils auroient des resolutions exactes : & comme l'on a trouvé dans la Geometrie des valeurs si approchantes de la longueur de la circonference & de la quadrature du cercle, que leur difference d'avec les valeurs exactes est insensible; on a de même trouvé des methodes d'approcher de si près des valeurs des inconnues des équations dans les cas où l'Analyse n'en a pas encore pû trouver d'expressions exactes, qu'on en peut rendre la difference plus petite qu'aucune grandeur que l'on voudra. Ces methodes d'approximation sont le sujet du sixiéme & du septiéme Livre.

On explique & l'on démontre dans le sixiéme Livre la methode de trouver les grandeurs qui sont les limites des valeurs de l'inconnue dans les équations numeriques de tous les degrés ; (*Monsieur Rolle est l'Auteur de cette methode ;*) & l'on donne plusieurs manieres de trouver, par le moyen de ces limites, les valeurs des inconnues des équations numeriques aussi peu differentes des valeurs exactes qu'on le peut desirer.

La maniere de faire une formule generale pour élever une grandeur complexe de tant de termes qu'on voudra à une puissance quelconque, dont l'exposant indéterminé represente un nombre quelconque entier ou rompu, positif ou négatif, est expliquée & démontrée pour tous les cas dans le septiéme Livre. Elle est de grand usage pour former toute sorte de puissances, pour extraire toute sorte de racines, par de simples substitutions ; pour faire des formules generales dans la resolution des

Problêmes & dans le calcul integral ; & pour réduire à une extrême facilité la pratique des methodes qui font trouver par *des suites infinies* les valeurs de celles des inconnues que l'on voudra de toutes sortes d'équations qui en ont plusieurs, comme aussi de toutes celles qui contiennent les differentielles de plusieurs grandeurs *changeantes* meslées ensemble. Ces methodes, découvertes par *Messieurs Leibnits & Newton*, sont expliquées & démontrées dans ce septiéme Livre : & comme elles sont de grand usage dans la resolution d'une infinité de beaux Problêmes, & qui sont très-utiles, comme on le verra dans la derniere Section de la seconde Partie du huitiéme Livre ; on n'a rien oublié pour les faire concevoir clairement aux Lecteurs qui commencent, & pour les leur rendre familieres par plusieurs exemples : on les applique aussi, à la fin de ce septiéme livre, à l'approximation des valeurs des inconnues des équations litterales déterminées de quelque degré qu'elles puissent être.

Ainsi les Lecteurs apprendront, dans les sept premiers Livres, la maniere de réduire en équations les Problêmes des Mathematiques, & surtout de la Geometrie simple & composée, & des sciences Physico-Mathematiques que l'on a eues principalement en vûe dans cet Ouvrage. Ils apprendront les methodes pour resoudre ces équations & les Problêmes dont elles sont les expressions : Elles leur feront trouver des resolutions exactes, quand cela se peut ; & quand elles ne le pourront pas, elles leur donneront des approximations qu'ils

pourront continuer à l'infini. Enfin ils verront dans le huitiéme Livre les usages de ces methodes ; & ils y apprendront la maniere de les appliquer à découvrir les proprietés des figures de la Geometrie simple & composée ; & à resoudre les Problêmes de ces Sciences, & les Problêmes des Sciences Physico-Mathematiques.



AVERTISSEMENT.

POUR former une notion de l'Analyse aux Lecteurs qui commencent, on leur fera remarquer, que dans tous les Problêmes des Mathematiques il y a des grandeurs inconnues que l'on cherche, des grandeurs connues, & des raports connus entre les grandeurs connues & les inconnues: & que c'est par le moyen de ces raports connus qu'on peut découvrir les grandeurs inconnues que l'on cherche.

L'Analyse est la science qui contient les méthodes pour découvrir les grandeurs inconnues que l'on cherche. Ces méthodes enseignent à marquer par les lettres de l'alphabet les grandeurs inconnues & les grandeurs connues; à trouver, par le moyen des raports connus qui sont entre les unes & les autres, des équations *qui expriment les Problêmes que l'on veut résoudre, & enfin à résoudre ces équations, c'est-à-dire, à faire découvrir les valeurs des lettres qui marquent les grandeurs inconnues que l'on cherche. C'est ainsi que l'Analyse donne la résolution des Problêmes.*

Quand les équations, que l'Analyse fait découvrir pour la résolution des Problêmes, contiennent des lettres qui marquent les inconnues qui ne sont point multipliées par elles-mêmes, ni par d'autres lettres qui représentent d'autres inconnues, ces équations s'appellent simples; *& l'Analyse, par raport à ces équations, s'appelle* l'Analyse simple. *Le premier Livre explique l'Analyse simple.*

Quand les lettres des inconnues sont multipliées par elles-mêmes ou par d'autres lettres des inconnues dans les équations, on les nomme des équations composées; *& l'Analyse par raport à ces équations, s'appelle* l'Analyse composée: *Elle est le sujet des Livres qui suivent le premier.*

Quand l'inconnue ne fait qu'un seul terme de l'équation dont tous les autres termes ne contiennent que des grandeurs connues, si elle est multipliée par elle-même, l'équation est composée, & elle se résout par les méthodes des équations composées; mais comme elle se résout aussi par une simple extraction de racines, on peut la regarder comme une équation simple, qui peut être résolue par l'Analyse simple.

Ceux qui voudront profiter de cet Ouvrage, ne doivent le lire que la plume à la main, & faire eux-mêmes les calculs qu'ils y trouveront.

Pour l'entendre avec plus de facilité, & pour se le rendre propre peu à peu sans se rebuter, ils pourront se contenter dans une premiere lecture de lire le premier, le second & le troisiéme Livre jusqu'à la page 92 *art.* 44, *passer tout le reste du troisiéme Livre, & tout le quatriéme Livre, & lire la seule premiere Section du cinquiéme Livre. Les connoissances, qu'ils auront acquises dans cette premiere lecture, suffiront à ceux qui sçavent les premiers élemens de la Geometrie simple, pour entendre la premiere & la seconde Section du huitiéme Livre, où ils verront les usages des méthodes de l'Analyse qu'ils auront apprises, dans la Geometrie simple, dans l'art de jetter les bombes, & dans les Problèmes qui font découvrir les centres d'oscillation des pendules composez pour donner la justesse aux horloges. Ils pourront même entendre la troisiéme Section du huitiéme Livre. Ils y trouveront les usages de l'Analyse dans la Geometrie composée, & en même tems ils se formeront une idée de cette science & de toutes les lignes courbes qui en sont l'objet, & ils apprendront les proprietez les plus utiles des courbes les plus simples, qu'on appelle les Sections coniques. Ces connoissances les mettront en état d'entendre les Problèmes des articles* 498 *&* 499. *Après quoi ils pourront lire la premiere Section de la seconde Partie du huitiéme Livre, où est expliqué le calcul differentiel, jusqu'à l'art.* 536; *passer aux art.* 549, 550 *&* 551, *pour voir l'usage de ce calcul dans les Problèmes qui font trouver les tangentes des courbes; & sans s'arrêter au reste de la seconde Partie du huitiéme Livre, ils pourront lire la premiere Section de la troisiéme Partie où sont expliquez les premiers principes du calcul integral jusqu'à l'art.* 666; *enfin, pour voir quelques usages faciles de ce calcul, ils passeront tout le reste de la troisiéme Partie jusqu'à la derniere Section, dont ils pourront lire les deux premiers Exemples, & passer à la seconde Partie de la derniere Section: ils verront, dans le premier Exemple Physico-mathematique, l'invention des Ovales dont parle Mr Descartes à la fin du second Livre de sa Geometrie, dont il n'a pas donné l'Analyse. Le second Exemple Physico-mathematique leur apprendra la résolution generale du Problème, où il s'agit, après avoir donné à la premiere surface d'un verre tel figure qu'on aura voulu, de trouver la figure qu'il faut donner à la seconde surface du même verre, afin que les rayons*

qui partent d'un point déterminé, ſoient diſpoſez par les refractions qu'ils ſouffriront à l'entrée & au ſortir de ce verre, à s'aller réunir dans un même point déterminé. Ils paſſeront tout le reſte.

Les Lecteurs qui commencent, apprendront, par cette premiere lecture, les premieres méthodes de l'Analyſe; & ils verront les uſages de ces méthodes dans la Geometrie ſimple & compoſée, & dans la réſolution des Problèmes Phyſico-mathematiques, en employant le calcul ordinaire de l'Algebre, le calcul differentiel & le calcul integral.

Dans une ſeconde lecture, ſi les choſes qu'ils auront lûes dans la premiere ne leur ſont pas aſſez familieres, ils liront les trois premiers Livres, la premiere Section du quatriéme Livre, la troiſiéme juſqu'à l'art 66, *& la quatriéme Section; la premiere Section du cinquiéme Livre, la ſeconde Section juſqu'à l'art.* 94, *la troiſiéme Section juſqu'à l'art.* 104; *ils liront enſuite toute la premiere Partie du huitiéme Livre; les trois premieres Sections de la ſeconde Partie, excepté l'art.* 536. *& les ſuivans juſqu'à l'art.* 542; *ils paſſeront la quatriéme Section, & ils liront dans la troiſiéme Partie la premiere Section juſqu'à l'art.* 666, *ils paſſeront cet article & les ſuivans juſqu'à l'art.* 714, *qu'ils pourront lire avec ce qui reſte de la premiere Section; ils ne liront ni la ſeconde ni la troiſiéme Section, ni le premier Exemple de la quatriéme; mais ils liront le reſte de la quatriéme Section, & ils pourront entendre les ſix Exemples Phyſico-mathematiques qui ſont à la fin de la cinquiéme Section.*

Dans une troiſiéme lecture, ils ajouteront à la précedente le ſixiéme & le ſeptiéme Livre, excepté la cinquiéme & la ſixiéme Section du ſeptiéme Livre; & il n'y aura plus rien dans le huitiéme Livre qu'ils ne puiſſent entendre; & ils ſeront en état de faire le choix des Méthodes de l'Ouvrage qu'ils doivent ſe rendre les plus familieres.

Pour entendre tout cet Ouvrage, il ne faut ſçavoir que les operations de l'Algebre ſur les grandeurs litterales, c'eſt-à-dire, il ne faut ſçavoir que le ſeul calcul & les proportions & les progreſſions. Ces choſes ſont expliquées dans les Traitez d'Algebre, comme dans les Elemens du Pere Preſtet, *ou dans le Traité* de la Grandeur du Pere Lamy; *ceux qui ont la Geometrie latine de Mr Deſcartes, peuvent ſe contenter du petit Traité dont le titre eſt,* Principia Matheſeos univerſalis, *qui eſt au commencement du ſecond Volume. Pour entendre le huitiéme Livre, il ſuffit de ſçavoir la*

Geometrie ſimple, c'eſt-à-dire, ce qui eſt contenu dans les ſix premiers Livres d'Euclide. On donnera dans la ſuite un Traité d'Algebre & une Geometrie ſimple.

Le ſeul calcul qui n'eſt pas expliqué dans les Traitez d'Algebre dont on vient de parler, eſt celui des expoſans des puiſſances. *On le mettra ici en peu de mots pour la commodité des commençans qui pourront le lire quand ils ſeront arrivez aux endroits de cet Ouvrage où ils en auront beſoin.*

Lorſqu'une même grandeur a *eſt multipliée par elle-même une fois, deux fois, trois fois, & ainſi de ſuite; les produits* aa, aaa, aaaa, *&c. s'appellent les puiſſances de cette grandeur. Pour abréger ces expreſſions, l'on écrit au haut de cette grandeur vers la droite en moindre caractere le nombre qui exprime combien de fois chacun des produits contient la lettre* a, *de cette maniere* a^2, a^3, a^4, a^5, &c. *ces nombres s'appellent* les expoſans *des puiſſances de la grandeur* a; *ainſi* a^2 *eſt la ſeconde puiſſance de* a, *&* 2 *eſt l'expoſant de la ſeconde puiſſance de* a; 3 *eſt l'expoſant de la troiſiéme puiſſance; & ainſi des autres: on donne auſſi à la grandeur ſimple* a *l'unité pour expoſant, de cette ſorte* a^1; *ce qui marque la premiere puiſſance de* a *qui n'eſt point multipliée par elle-même. Les grandeurs dont les expoſans ſont des nombres entiers, s'appellent des* puiſſances entieres.

Les racines d'une grandeur a *ſe marquent ordinairement par le ſigne* $\sqrt{}$ *avec le nombre au-deſſus qui marque ſi c'eſt la racine quarrée ou ſeconde, la racine cubique ou troiſiéme, la quatriéme, &c. de cette ſorte* $\sqrt[2]{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$, *&c. Mais pour les réduire au même calcul que les puiſſances entieres, on les marque ſans le ſigne* $\sqrt{}$, *& l'on écrit, pour leur expoſant, une fraction dont le numerateur eſt l'unité & dont le dénominateur eſt le nombre* 2 *ſi c'eſt la racine ſeconde; le nombre* 3, *quand c'eſt la racine troiſiéme, &c. de cette ſorte* $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{4}}$, $a^{\frac{1}{5}}$; &c. *Ainſi* $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a}$ *marque la racine ſeconde de* a; *& ainſi des autres. Par le moyen de ces expreſſions on peut regarder les racines des grandeurs comme des* puiſſances dont les expoſans ſont des nombres rompus.

La racine quelconque d'une grandeur a^2, a^3, &c. *qui eſt une puiſſance entiere, ſe marque en donnant pour expoſant à cette grandeur une fraction dont le premier terme eſt l'expoſant de la puiſſance entiere de cette grandeur, & dont le ſecond terme eſt l'expoſant de la racine qu'on veut exprimer. Ainſi la racine ſeconde de* a^3 *ſe marque*

marque ainsi $a^{\frac{3}{2}}$; *la racine cinquième de* a^7 *se marque ainsi* $a^{\frac{7}{5}}$. *Il en est de même des autres.*

Pour marquer une puissance en general, on prend une lettre pour exposant; ainsi a^n *marque une puissance quelconque; l'exposant* (n) *représente tel nombre qu'on voudra, soit entier, soit rompu, & on l'appelle, à cause de cela, un exposant indéterminé. On peut aussi marquer une puissance en general, dont l'exposant est une fraction, de cette maniere* $a^{\frac{1}{n}}$, *ce qui signifie* $\sqrt[n]{a}$, *c'est-à-dire la racine quelconque représentée par* (n) *de la grandeur* a. *De même* $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ *marque la racine quelconque, représentée par l'indéterminée* n, *de* a *élevée à la puissance entiere dont l'exposant, quelque nombre entier qu'il puisse être, est représenté par l'indéterminée* m. *Ces exposans indéterminez servent à trouver des résolutions generales qui conviennent à toutes les grandeurs particulieres dont les puissances peuvent avoir pour exposans quelque nombre que ce puisse être; tous ces exposans particuliers pouvant être représentez par l'exposant indéterminé. Ces choses supposées, voici le calcul des puissances par le moyen de leurs exposans.*

LE CALCUL DES PUISSANCES DES GRANDEURS par le moyen de leurs exposans.

POUR multiplier deux puissances d'une grandeur, il ne faut qu'ajouter les deux exposans de ces puissances, & écrire la somme des exposans pour l'exposant du produit.

Pour diviser une puissance d'une grandeur par une autre puissance de la même grandeur, il ne faut qu'ôter l'exposant du diviseur de l'exposant de la puissance à diviser, & écrire la difference des exposans pour l'exposant du quotient.

Pour multiplier a^2 *par* a^3, *il faut écrire* a^{2+3} *ou* a^5 *pour le produit. Pour multiplier* a^2 *par* a^1, *il faut écrire* a^{2+1} *ou* a^3 *pour le produit. Pour multiplier* a^3 *par* $a^{\frac{1}{2}}$, *il faut écrire pour le produit* $a^{3+\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{2}}$. *Pour multiplier* $a^{\frac{1}{2}}$ *par* $a^{\frac{3}{4}}$, *il faut écrire pour le produit* $a^{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}} = a^{\frac{5}{4}}$. *De même le produit de* x^n *par* x^m *est* x^{m+n}; *celui de* x^n *par* x^1 *est* x^{n+1}; *celui de* x^n *par* $x^{\frac{m}{p}}$ *est* $x^{n+\frac{m}{p}}$; *celui de* x^n *par* $x^{\frac{1}{n}}$ *est* $x^{n+\frac{1}{n}} = x^{\frac{nn+1}{n}}$. *Il en est de même des autres.*

Pour diviser a^3 *par* a^2, *il faut écrire pour le quotient* $a^{3-2} = a^1$; *de même le quotient de* a^2 *par* a^1 *est* $a^{2-1} = a^1$; *celui de* a^3 *divisé par* $a^{\frac{1}{2}}$ *est* $a^{3-\frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{2}}$. *Le quotient de* $a^{\frac{3}{2}}$ *par* $a^{\frac{5}{7}}$ *est* $a^{\frac{3}{2}-\frac{5}{7}} = a^{\frac{11}{14}}$; *celui de* a^1 *par* $a^{\frac{4}{3}}$ *est* $a^{1-\frac{4}{3}} = a^{-\frac{1}{3}}$. *De même le quotient de* x^m *par* x^n *est* x^{m-n}; *celui de* x^m *par* x^{-n} *est* x^{m+n}; *celui de* x^m *par* x^1 *est* x^{m-1}; *celui de* x^{-m} *divisée par* $x^{-\frac{n}{p}}$ *est* $x^{-m+\frac{n}{p}}$. *Il en est de même des autres.*

On remarquera qu'il suit de ces operations, 1°. *qu'un exposant négatif marque que la puissance, dont il est l'exposant, est un diviseur, & qu'elle est par consequent au dénominateur; ainsi* $x^{-1} = \frac{1}{x}$, $x^{-m} = \frac{1}{x^m}$, $x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt[2]{x}}$, $x^{m-n} = \frac{x^m}{x^n}$. *Il en est de même des autres.*

2°. *Que l'on peut dans une fraction, faire passer une puissance du dénominateur au numerateur, ou du numerateur au dénominateur, sans changer la valeur de la fraction. Par exemple au lieu de* $\frac{ax^2}{y^3}$, *on peut écrire* ax^2y^{-3}. *L'on peut encore écrire* $\frac{a}{x-2y^3}$ #. *Il en est de même des autres. Ces changemens d'expression peuvent être d'usage dans quelques rencontres.*

~~Cette~~ expression doit s'écrire $\frac{a}{x^{-2}y^3}$

3°. *Que quand on multiplie deux puissances dont les exposans sont négatifs, par exemple* $x^{-\frac{1}{2}}$ *par* $x^{-\frac{1}{2}}$; *ce qui donne le produit* $x^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = x^{-1}$; *cette operation revient à la même chose que si l'on divisoit* $x^{-\frac{1}{2}}$ *par* $x^{+\frac{1}{2}}$ *car le quotient seroit aussi* $x^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = x^{-1}$.

4°. *Que quand on multiplie la même grandeur ou la même puissance plusieurs fois par elle-même, par exemple* $x^{\frac{1}{2}}$ *par* $x^{\frac{1}{2}}$ *par* $x^{\frac{1}{2}}$ *par* $x^{\frac{1}{2}}$, *il faut écrire, pour exposant du produit, le double de l'exposant quand c'est* $x^{\frac{1}{2}}$ *par* $x^{\frac{1}{2}}$; *le triple, quand c'est* $x^{\frac{1}{2}}$ *par* $x^{\frac{1}{2}}$ *par* $x^{\frac{1}{2}}$; *le quadruple, quand c'est* $x^{\frac{1}{2}}$ *par* $x^{\frac{1}{2}}$ *par* $x^{\frac{1}{2}}$ *par* $x^{\frac{1}{2}}$;

& ainsi des autres. Car $x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = x^{\frac{2}{2}} = x^1$; $x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$; $x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = x^{\frac{4}{2}} = x^2$. *Il en est de même des autres. D'où l'on voit que pour élever la puissance d'une grandeur à une puissance dont l'exposant est un nombre entier, il n'y a qu'à multiplier l'exposant de cette puissance par l'exposant de la puissance à laquelle on la veut élever, & l'on aura l'exposant que l'on cherche. Par exemple pour élever* $x^{\frac{1}{3}}$ *à la quatriéme puissance, il faut écrire* $x^{\frac{1}{3}\times 4} = x^{\frac{4}{3}}$.

D'où il suit que pour avoir la racine d'une puissance quelconque, il n'y a qu'à diviser l'exposant de la puissance par l'exposant du signe radical de la racine, & le quotient sera l'exposant que l'on cherche. Par exemple pour extraire la racine quatriéme marquée par $\sqrt[4]{}$ *de* $a^{\frac{1}{3}}$, *il faut écrire pour la racine* $a^{\frac{\frac{1}{3}}{4}} = a^{\frac{1}{12}}$. *C'est la même chose des autres.*

Mais $\frac{1}{3}$ *divisé par* 4 *est la même chose que* $\frac{1}{3}$ *multiplié par* $\frac{1}{4}$; *ainsi en regardant les racines comme des puissances, c'est-à-dire, n'employant pas le signe radical* $\sqrt{}$ *pour marquer les racines, mais leur donnant, comme aux puissances, pour exposant des nombres rompus; alors pour élever une puissance comme* $a^{\frac{1}{3}}$ *à une puissance dont l'exposant est un nombre rompu, par exemple* $\frac{1}{4}$, *il ne faut que multiplier l'exposant* $\frac{1}{3}$ *de la puissance proposée* $a^{\frac{1}{3}}$ *par l'exposant* $\frac{1}{4}$ *de la puissance à laquelle on veut élever* $a^{\frac{1}{3}}$, *& l'on aura* $a^{\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{12}}$. *Ce qui donne cette regle.*

Pour élever une puissance quelconque a^n *à une puissance quelconque dont l'exposant est représenté par* m, *il ne faut que multiplier l'exposant* n *de la puissance proposée* a^n *par l'exposant* m *de la puissance à laquelle on veut élever* a^n, *& écrire* a^{mn} *pour la puissance que l'on cherche.*

Pour élever a^3 *à la puissance dont l'exposant est* $\frac{1}{2}$, *il faut écrire* $a^{3\times\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2}}$; *pour élever* x^n *à la puissance dont l'exposant est* $-\frac{n}{p}$, *il faut écrire* $x^{-\frac{nn}{p}}$. *Il en est de même des autres.*

Voilà le calcul des puissances par le moyen de leurs exposans: voici la raison sur laquelle ce calcul est fondé : les Lecteurs qui sçavent les proprietez des progressions arithmetiques & des progressions geometriques, l'entendront facilement.

A Progression geometrique des puissances de *a*.

$$\div\div \frac{1}{a^6}, \frac{1}{a^5}, \frac{1}{a^4}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a}, 1, \textit{ou } a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, \&c.$$

B La même.

$$\div\div a^{-6}, a^{-5}, a^{-4}, a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, \&c.$$

Toutes les puissances d'une grandeur a *mises de suite, de maniere que* a^0, *ou, ce qui est la même chose, l'unité soit entre celles dont les exposans sont les nombres entiers positifs pris de suite, & celles dont les exposans sont les mêmes nombres négatifs mis aussi de suite; toutes ces puissances, dis-je, font une progression geometrique.*

Les exposans de ces puissances font une progression arithmetique, & zero qui est entre les exposans positifs & les exposans négatifs, est l'exposant de l'unité ou de a^0 *dans la progression geometrique: ainsi il y a deux progressions dans l'expression* B; *la geometrique est celle des puissances; l'arithmetique est celle des exposans.*

Outre les termes marquez dans la progression geometrique B, *on en peut concevoir une infinité d'autres de cette maniere. Entre* a^0 *ou l'unité &* a^1, *on peut concevoir toutes les puissances infinies de* a *dont les exposans sont les nombres rompus positifs moindres chacun que l'exposant* 1 *de* a^1, *comme* $a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{1}{4}}, a^{\frac{1}{5}}, a^{\frac{2}{3}}, a^{\frac{3}{4}}, a^{\frac{4}{5}}$, &c. *& l'on peut concevoir entre* a^0 & a^{-1} *toutes les puissances à l'infini de* a, *dont les exposans sont les mêmes nombres rompus moindres chacun que l'unité, mais négatifs.*

On peut de même concevoir entre a^1 & a^2 *un nombre infini de puissances de* a *dont les exposans sont de suite tous les nombres rompus positifs sur qui passent l'unité, & sont moindres que* 2. *On peut aussi concevoir entre* a^{-1} & a^{-2} *le nombre infini de puissances de* a, *dont les exposans sont les mêmes nombres rompus dont on vient de parler, mais négatifs.*

Ainsi entre chacun des termes de la progression B *& celui qui le suit, ou celui qui le précede, il peut y avoir une infinité d'autres termes qui seront tous les puissances de* a, *mais leurs exposans seront*

des nombres rompus positifs en allant de a^0 *vers la droite, & negatifs en allant de* a^0 *vers la gauche.*

Pour faire concevoir que les exposans de ce nombre infini de puissances de a *mises de suite en progression geometrique, sont entr'eux une progression arithmetique, dont la difference est le plus petit nombre qu'on puisse imaginer, il n'y a qu'à faire remarquer une maniere simple de trouver ces termes moyens à l'infini entre les termes marquez dans* B. *Par exemple pour trouver tous les termes entre* a^0 *&* a^1, *ou entre* 1 *&* a^1, *il n'y a qu'à prendre le terme moyen proportionel geometrique* $\sqrt[2]{a}$; *& pour avoir son exposant, il n'y a qu'à prendre le moyen arithmetique proportionel entre* 0 *&* 1 *qui est* $\frac{1}{2}$. *Ainsi l'on aura* $\div\!\!\div a^0, a^{\frac{1}{2}}, a^1$.

On prendra de même la moitié de $0 + \frac{1}{2}$ *qui est* $\frac{1}{4}$, *& la moitié de* $\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$, *laquelle moitié est* $\frac{3}{4}$, *& l'on aura* $\div\!\!\div a^0, a^{\frac{1}{4}}, a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{3}{4}}, a^1$. *On conçoit clairement qu'on peut ainsi continuer de prendre des termes moyens proportionels, tant les geometriques que les arithmetiques correspondans, & cela à l'infini; & qu'on peut ensuite, au lieu d'un moyen proportionel, prendre deux, trois, quatre, &c. moyens proportionels geometriques entre deux termes voisins, & prendre en même temps les moyens proportionels arithmetiques correspondans qui serviront d'exposans aux geometriques.*

En imaginant de la même maniere les moyens proportionels geometriques entre tous les termes voisins & les arithmetiques qui leur servent d'exposans, on verra clairement qu'on peut concevoir une progression geometrique infinie de toutes les puissances de suite d'une grandeur, dont les exposans feront aussi une progression arithmetique.

L'on remarquera que toutes les fois qu'on prendra quatre termes, dans la progression geometrique, qui feront entr'eux une proportion geometrique, les quatre exposans de ces quatre termes feront entr'eux une proportion arithmetique: Et que toutes les fois qu'on prendra plusieurs termes, c'est-à-dire tant de termes qu'on voudra, dans la progression geometrique, qui, quoiqu'éloignez les uns des autres, feront pourtant entr'eux une progression geometrique; les exposans de tous ces termes, pris dans le même ordre, feront entr'eux une progression arithmetique; c'est-à-dire, la même difference regnera dans leur progression.

Mais quand zero est le premier terme d'une proportion arithmetique 0, 1 : 2, $1 + 2 = 3$, *il faut ajouter le second & le troisiéme terme, & la somme est le quatriéme terme. Quand zero est le quatriéme terme d'une proportion arithmetique* 3, 2 : 1, 0, *il faut retrancher le second terme du premier, & la difference est le troisiéme terme. Enfin quand zero est le premier ou le dernier terme d'une progression arithmetique* ÷ 0, 1, 2, 3, 4; ÷ 4, 3, 2, 1, 0, *il faut multiplier le terme le plus proche de zero, qui est la difference de la progression, par le nombre des termes depuis zero non compris, par exemple par* 4, *si l'on veut le quatriéme terme depuis zero non compris, & le produit est le terme que l'on cherche.*

C'est la raison des regles qu'on a données pour multiplier & pour diviser deux puissances d'une même grandeur l'une par l'autre par le moyen des exposans; & pour élever une puissance d'une grandeur à une autre puissance dont l'exposant est donné. Car pour multiplier par exemple a^2 *par* a^3, *il y a une proportion geometrique* a^0 *ou* 1 . a^2 :: a^3 . a^5, *dont l'unité est le premier terme,* a^2 *&* a^3 *sont le second & le troisiéme terme, & le produit* a^5 *que l'on cherche est le quatriéme terme. Les exposans* 0, 2 : 3, $3 + 2 = 5$ *sont aussi une proportion arithmetique dont zero est le premier terme, les exposans* 2 & 3 *des grandeurs à multiplier,* a^2, a^3, *sont le second & le troisiéme terme : ainsi ajoutant* $2 + 3$, *la somme* 5 *est l'exposant du terme* a^5 *que l'on cherchoit.*

Pour diviser a^3 *par* a^2, *il y a une proportion geometrique* a^3 . a^2 :: a^1 . a^0 *ou* 1, *dont* a^3 *est le premier terme; le diviseur* a^2 *le second terme; le quotient* a^1 *que l'on cherche est le troisiéme terme, & l'unité* a^0 *ou* 1 *est le quatriéme terme. Les exposans* 3, 2 : 1, 0, *font aussi une proportion arithmetique; le premier terme est* 3, *le second est* 2, *le troisiéme* 1 *est l'exposant du quotient que l'on cherche, & zero est le quatriéme terme; ainsi en retranchant le second terme* 2 *du premier terme* 3, *la difference* 1 *est l'exposant du quotient que l'on cherche.*

Pour élever la puissance d'une grandeur comme a^1 *à une puissance dont l'exposant est donné, par exemple à la puissance dont l'exposant est* 4, *il y a une progression geometrique* ÷ a^0 *ou* 1, a^1, a^2, a^3, a^4, *dont le premier terme est l'unité, la puissance donnée* a^1 *est le premier terme après l'unité, & la puissance* a^4 *que l'on cher-*

che est le quatriéme terme après l'unité. Les exposans sont aussi une progression arithmetique ÷ 0, 1, 2, 3, 4, *depuis zero ; le premier terme après zero est l'unité, & c'est la difference de la progression ; l'exposant que l'on cherche est le quatriéme terme après zero ; & dans une progression arithmetique, la difference étant connue, qui est ici* 1, *& le nombre des termes après zero, qui est ici* 4, *il n'y a qu'à multiplier la difference par le nombre des termes depuis zero non compris, & le produit, qui est ici* 4, *est le terme que l'on cherche de la progression arithmetique, & par consequent l'exposant de la puissance* a^4 *que l'on cherchoit.*



AVIS AU LECTEUR.

LA première édition de l'Analyſe démontrée du Pere REYNEAU, étant devenue très-rare depuis pluſieurs années, nous avons crû devoir entreprendre cette ſeconde édition. Nous n'avons rien négligé pour la rendre auſſi correcte que la premiere. On trouvera dans cette nouvelle édition quelques Remarques de M. de Varignon ſur l'Analyſe démontrée ; nous avons jugé à propos de les inſerer à la fin du Tome ſecond, afin que ceux qui ont la premiere édition de l'Analyſe puiſſent les y joindre.

ANALYSE



ANALYSE DEMONTRÉE,

LIVRE I.

DE L'ANALYSE QUI ENSEIGNE à résoudre les Problêmes qui se réduisent à des équations simples.



SECTION I.

La Méthode de réduire un Problême en équations.

PROBLÊME I.

1. *REDUIRE un Problême en équations; c'est-à-dire exprimer par des équations tous les raports d'un Problême.*

1°. IL faut distinguer avec beaucoup d'attention les trois choses que renferme le Problême : 1. Les grandeurs connues : 2. Les grandeurs inconnues qu'on cherche, ou qui servent à faire trouver celles qu'on cherche : 3. Les raports connus entre les grandeurs connues & les inconnues, ou même ceux qui sont entre les inconnues.

2°. Il faut marquer les grandeurs connues par les premieres lettres de l'alphabet *a*, *b*, *c*, *&c.* & les inconnues par les dernieres *s*, *t*, *v*, *x*, *y*, *z*.

Il est bon aussi de marquer les grandeurs connues & in-

connues par les premieres lettres des noms qui les expriment : Par exemple de marquer un nombre en general par n, une ſomme par s, le temps par t, la vîteſſe par v, une tangente par t, une ſoutangente par s, & ainſi des autres ; cela ſoulage la memoire.

3°. Il faut ſuppoſer le problême comme réſolu, en regardant les inconnues comme ſi elles étoient connues, & trouver par le moyen des raports connus du Problême, autant d'équations qu'on a ſuppoſé d'inconnues. Il faut obſerver autant qu'on peut, l'ordre naturel dans la formation des équations, c'eſt-à-dire qu'il faut commencer par les raports les plus ſimples, & ſe ſervir enſuite par ordre des raports les plus compoſés.

EXEMPLE I.

TROUVER le quatriéme terme d'une proportion, dont on connoît les trois premiers termes.

1°. Je remarque les grandeurs connues qui ſont les trois premiers termes connus, la grandeur inconnue qui eſt le quatriéme terme, & les raports connus entre les grandeurs connues & l'inconnue: dans ce Problême, les raports connus ſont le raport qui eſt entre la premiere & la ſeconde grandeur connue, & le raport qui eſt entre la troiſiéme grandeur connue, & la quatriéme qui eſt l'inconnue qu'on cherche, ces deux raports ſont égaux ; par conſequent le produit des extrêmes eſt égal à celui des moyens.

2°. Je marque les grandeurs connues par les premieres lettres de l'alphabet, & l'inconnue par une des dernieres ; de cette maniere. Soit le premier terme $= a$. Le ſecond $= b$. Le troiſiéme $= c$. Le quatriéme $= x$.

3°. Par le moyen des raports connus, j'ai cette proportion $a . b :: c . x$.

Et le produit des extrêmes étant égal à celui des moyens, l'on aura cette équation $ax = bc$, qui eſt celle du Problême.

EXEMPLE II.

TROUVER la ſomme de tous les termes infinis d'une progreſſion geométrique qui va en diminuant, dont on connoît le premier & le ſecond terme.

1°. Je remarque les grandeurs connues, qui ſont le premier terme de la progreſſion qui eſt le plus grand, & le ſecond terme, la grandeur inconnue qui eſt la ſomme de tous les termes infinis de la progreſſion : Je remarque de plus que par la proprieté des raports égaux qui ſont entre tous les termes de la progreſſion, la ſomme de tous les antecedents, qui eſt ici la ſomme de tous les termes infinis de la progreſſion, parceque zero eſt le dernier terme, eſt à la ſomme de tous les conſequents, qui eſt la ſomme de tous les termes moins le premier, comme le premier terme eſt au ſecond.

2°. Je marque les grandeurs connues & l'inconnue de cette maniere.

Soit le premier terme connu $= a$.

Le ſecond $= b$.

La ſomme inconnue de tous les termes infinis $= s$.

3°. Je me ſers ainſi du raport connu pour former l'équation du Problême.

La ſomme de tous les antecedents de la progreſſion qui eſt égale à $s - o$, c'eſt-à-dire la ſomme s, eſt à la ſomme de tous les conſequents qui eſt $s - a$; comme le premier terme a eſt au ſecond b, & j'ai cette proportion

$$s . s - a :: a . b.$$

Et le produit des extrêmes étant égal à celui des moyens, l'on aura cette équation $bs = as - aa$ qui eſt celle du Problême.

EXEMPLE III.

TROUVER deux grandeurs dont on connoît la ſomme & la difference.

1°. Soit la ſomme connue des deux grandeurs inconnues $= a$.

Soit leur difference connue $= d$.

Soit la premiere & la plus grande des deux grandeurs inconnues $= x$.

La ſeconde $= y$.

2°. Il y a deux raports connus, le premier eſt que la ſomme des deux inconnues eſt égale à a, ce qui donne cette premiere équation $x + y = a$.

Le ſecond raport connu eſt que la difference des deux

inconnues eſt égale à d, ce qui donne cette ſeconde équation $x - y = d$.

L'on a ainſi les deux équations du Problême.

REMARQUE.

LORSQU'IL n'y a pas aſſez de raports connus pour trouver autant d'équations qu'on a ſuppoſé d'inconnues, le Problême a pluſieurs réſolutions, comme on le fera voir dans la ſuite, & on l'appelle *indéterminé*.

DE'FINITION.

LES grandeurs qui ſont des deux côtés du ſigne $=$ dans une équation, ſont nommées les deux membres de l'équation, $x - y$ eſt le premier membre de l'équation $x - y = d$, & d en eſt le ſecond membre.

AVERTISSEMENT.

APRE'S avoir réduit un Problême en équations, il faut faire en ſorte que les inconnues des équations ſe trouvent ſeules dans le premier membre, & qu'il n'y ait que des grandeurs connues dans le ſecond; ce qui donne la réſolution du Problême.

Le dégagement des inconnues des équations, & les préparations pour y arriver, ſe font par l'addition, la ſouſtraction, la multiplication, la diviſion, l'extraction des racines, &c.

SECTION II.

La Méthode de dégager les inconnues des équations, & de préparer les équations à ce dégagement.

Uſage de l'addition & de la ſouſtraction pour le dégagement des inconnues, & pour y préparer les équations.

2. L'ADDITION & la ſouſtraction ſervent à faire paſſer une ou pluſieurs grandeurs d'un membre de l'équation dans l'autre.

Il faut effacer la grandeur qu'on veut faire paſſer dans le membre où elle eſt, & l'écrire dans l'autre membre avec un ſigne contraire à celui qu'elle avoit.

Par exemple, dans l'équation $bs = as - aa$, on fera paſſer $- aa$ du ſecond membre dans le premier, en l'effaçant dans le ſecond membre, & l'écrivant dans le premier avec le ſigne $+$, & l'on aura $bs + aa = as$.

On fera paſſer de même dans l'équation $bs + aa = as$, la grandeur $+ bs$ du premier membre dans le ſecond, en l'effaçant dans le premier, & en l'écrivant avec le ſigne $-$ dans le ſecond, & l'on aura $aa = as - bs$.

DE'MONSTRATION.

L'ON ne fait dans cette tranſpoſition qu'ajouter ou retrancher des grandeurs égales dans chaque membre de l'équation : car en ajoutant $+ aa$ dans chaque membre de l'équation $bs = as - aa$, l'on trouve $aa + bs = as - aa + aa$, & $- aa + aa$ étant égale à zero, on l'efface, & il reſte $aa + bs = as$. Et en retranchant $+ bs$ dans chaque membre de $aa + bs = as$, l'on trouve $aa + bs - bs = as - bs$, & $+ bs - bs$ étant égal à zero, on l'efface, & il reſte $aa = as - bs$. Par conſequent les deux membres demeurent toujours égaux après cette tranſpoſition.

Uſage de la tranſpoſition.

1. ON peut mettre par tranſpoſition toutes les quantités où eſt l'inconnue dans un membre, & toutes les quantités connues dans l'autre, comme on le voit dans la derniere équation ; ce qui ſervira au dégagement des inconnues.

2. On peut mettre par tranſpoſition toutes les quantités d'une équation dans un membre, & zero dans l'autre ; ce qui ſervira dans les Livres ſuivans. Car en effaçant toutes les quantités d'un membre, & les écrivant avec des ſignes contraires dans l'autre membre, l'égalité demeure toujours, & zero ſe trouve ſeul dans le membre où l'on a effacé toutes les quantités. Par exemple, ſi l'on a $xx - ax = ab$, l'on aura par tranſpoſition $xx - ax - ab = 0$.

3. On peut rendre poſitives par le moyen de la tranſpoſition, les grandeurs negatives de l'équation, les ôtant du membre où elles ſont negatives, & les mettant dans l'autre

avec le signe +; ce qui sert à rendre l'inconnue positive, quand elle est negative, & à faire trouver la valeur positive de l'inconnue.

4. Lorsque la même grandeur se trouve avec le même signe dans chaque membre de l'équation, comme dans cet exemple $ax + ab = + ab + bc$, il faut l'effacer, & l'on aura $ax = bc$.

Usages de la multiplication pour préparer les équations, pour en ôter les fractions, & pour en dégager les inconnues.

3. 1. LORSQUE l'inconnue est divisée par une grandeur connue, comme dans cet exemple $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$, on peut dégager l'inconnue de cette grandeur connue, en multipliant chaque membre par la grandeur a, par laquelle l'inconnue x est divisée, & l'on aura $x = \frac{ab}{c}$.

2. On peut encore ôter par la multiplication, toutes les fractions d'une équation.

Il faut multiplier les deux membres de l'équation par le dénominateur de la premiere fraction, & multiplier la nouvelle équation par le dénominateur de la seconde fraction, & ainsi de suite, & l'on trouvera une équation où il n'y aura plus de fractions.

Exemple. Il faut ôter les fractions de l'équation $\frac{x}{a} + \frac{b}{c} = \frac{d}{e}$.

Je multiplie chaque membre par a, & je trouve l'équation $x + \frac{ab}{c} = \frac{ad}{e}$.

Je multiplie ensuite chaque membre de cette équation par le dénominateur c, & je trouve $cx + ab = \frac{acd}{e}$.

Enfin je multiplie chaque membre de cette équation par le dénominateur e, & je trouve $cex + abe = acd$ où il n'y a plus de fractions.

On peut ôter tout d'un coup toutes les fractions d'une équation, en multipliant chaque membre par le produit de tous les dénominateurs.

Dans l'exemple précedent en multipliant $\frac{x}{a} + \frac{b}{c} = \frac{d}{e}$ par ace produit de tous les dénominateurs, l'on trouve l'équation $\frac{acex}{a} + \frac{abce}{c} = \frac{aced}{e}$; dans laquelle effaçant les lettres communes au numerateur & au dénominateur de chaque fraction, l'on aura l'équation sans fractions $cex + abe = acd$, comme on l'avoit trouvée.

D'où l'on voit que si toutes les quantités d'une équation étoient divisées par une même grandeur, il n'y auroit qu'à effacer cette grandeur, & l'équation seroit sans fractions.

3. On peut aussi faire en sorte par la multiplication, qu'une des grandeurs connues, laquelle on voudra, devienne un quarré ou une puissance parfaite, en multipliant chaque membre de l'équation par cette même grandeur, ou par sa racine; par exemple, dans cette équation $axx + abc = c^3$, on peut rendre la grandeur c^3 quarrée en multipliant chaque membre par c, & l'on aura $acxx + abcx = c^4$.

On peut aussi par ce moyen faire en sorte dans quelques équations, où la plus haute puissance de l'inconnue est multipliée par quelque grandeur connue, que cette grandeur devienne quarrée ou une puissance parfaite.

Par exemple, si l'on a l'équation $axx + abx = bbc$, on rendra quarrée la grandeur axx, en multipliant chaque membre par la grandeur connue a, & l'on aura $aaxx + aabx = abbc$.

Enfin on pourroit ôter toutes les grandeurs incommensurables d'une équation, lorsqu'elle en a, par le moyen de la multiplication; mais cet usage n'étant que pour les équations composées, il sera mieux placé dans le Livre suivant.

Démonstration de tous ces usages.

IL est évident que dans toutes les operations précedentes, on multiplie les deux membres de l'équation par des grandeurs égales; par consequent ils sont encore égaux après la multiplication.

Usages de la division pour préparer les équations, & pour dégager les inconnues.

4. 1. LORSQUE l'inconnue est multipliée par une grandeur connue dans une équation, comme dans le premier exemple de la premiere Section, où l'on a trouvé $ax = bc$, on dégagera l'inconnue en divisant chaque membre par cette grandeur connue.

Ainsi divisant chaque membre par a, l'on aura $x = \frac{bc}{a}$, ce qui donne la résolution du Problême, où l'on voit que le 4e terme d'une proportion étant inconnu, & les trois premiers étant connus, l'on trouvera le 4e en divisant le produit du second & du troisiéme par le premier.

On dégagera de même l'inconnue dans l'équation du ſecond exemple $bs = as - aa$; car par tranſpoſition l'on aura $aa = as - bs$; & diviſant chaque membre par $a - b$, l'on aura $\frac{aa}{a-b} = s$. C'eſt-à-dire ſi l'on diviſe le quarré du premier terme d'une progreſſion geometrique qui va en diminuant, par le premier terme moins le ſecond, le quotient ſera égal à la ſomme de tous les termes infinis de la progreſſion.

2. Lorſque toutes les quantités d'une équation ſont multipliées par une même lettre ou par une même grandeur, on rendra l'équation plus ſimple, en diviſant toutes les quantités qui la compoſent par cette grandeur commune.

Par exemple, ſi l'on a l'équation $axx - abx = bcx$, en diviſant toutes les quantités par x, l'on aura l'équation plus ſimple $ax - ab = bc$.

3. Lorſque les deux membres d'une équation ont un diviſeur commun, on la reduira à une équation plus ſimple, en diviſant chaque membre par leur commun diviſeur.

Par exemple, les deux membres de $axx - aax = abx - aab$, ont le diviſeur commun $ax - aa$; en diviſant chacun par $ax - aa$, l'on aura l'équation ſimple $x = b$, où l'inconnue eſt entierement dégagée.

Démonſtration de tous ces uſages.

IL eſt évident que dans toutes les operations précedentes, on diviſe les deux membres égaux d'une équation par des grandeurs égales; par conſequent ils ſont encore égaux après la diviſion.

Uſages de l'extraction des racines pour préparer les équations, & pour dégager les inconnues.

5. 1. LORSQUE le ſecond membre d'une équation ne contient que des grandeurs connues, & que le premier membre où eſt l'inconnue contient une puiſſance parfaite, il faut extraire la racine de ces deux membres, & l'on aura une équation plus ſimple.

L'on a par exemple l'équation $xx = aa$, il faut extraire la racine quarrée de chaque membre, & l'on aura $x = a$. De la même maniere en tirant la racine cubique de chaque membre de l'équation $x^3 = aab$, l'on aura $x = \sqrt[3]{aab}$.

Le

Le premier membre de l'équation $xx - 2ax + aa = bc$, est un quarré parfait ; ainsi en tirant la racine quarrée de chaque membre, on aura l'équation simple $x - a = \sqrt{bc}$, & par transposition $x = a + \sqrt{bc}$.

Le premier membre de l'équation $x^3 - 3axx + 3aax - a^3 = abc$, est un cube parfait ; ainsi en tirant la racine cubique de chaque membre, l'on aura l'équation simple $x - a = \sqrt[3]{abc}$, & par transposition $x = a + \sqrt[3]{abc}$.

2. Il y a plusieurs équations dont le premier membre deviendroit une puissance parfaite, si on lui ajoutoit une grandeur connue ; par exemple, si l'on ajoutoit $+ aa$ au premier membre de l'équation $xx - 2ax = bc$, le premier membre seroit le quarré $xx - 2ax + aa$; dans ce cas il faut ajouter à chaque membre la grandeur connue qui rend le premier membre une puissance parfaite, & l'on aura $xx - 2ax + aa = aa + bc$; il faut ensuite tirer la racine de chaque membre, & l'on aura $x - a = \sqrt{aa + bc}$, qui est une équation simple, où l'on aura par transposition $x = a + \sqrt{aa + bc}$.

De la même maniere si l'on ~~retranche~~ b^3 ~~de~~ chaque membre de l'équation $x^3 - 3bxx + 3bbx = c^3$, l'on aura l'équation $x^3 - 3bxx + 3bbx - b^3 = c^3 - b^3$, dont le premier membre est un cube parfait ; ainsi en tirant la racine cubique de chaque membre, on aura l'équation simple $x - b = \sqrt[3]{c^3 - b^3}$, & par transposition $x = b + \sqrt[3]{c^3 - b^3}$.

Le second usage de l'extraction des racines sert à réduire à des équations simples, toutes les équations où l'inconnue est élevée au quarré dans une des grandeurs de l'équation, & lineaire dans quelqu'autre grandeur, comme l'équation $xx - ax = ab$.

Ces équations sont nommées *du second degré*, & l'on y distingue trois termes : le premier est xx, c'est-à-dire le quarré de l'inconnue ; le second est celui où l'inconnue est lineaire, comme $- ax$; le troisiéme & dernier terme est celui qui ne contient que des grandeurs connues, comme ab.

La méthode de réduire toutes les équations du second degré à des équations simples : ce qui en donne la résolution.

6. POUR réduire les équations du second degré à des équations simples, 1°. il faut faire passer les grandeurs tou-

tes connues dans le ſecond membre. 2°. Il faut prendre la moitié de la grandeur connue qui multiplie l'inconnue lineaire dans le ſecond terme. 3°. Ajouter le quarré de cette moitié à chaque membre de l'équation, & le premier membre deviendra un quarré parfait. 4°. Il faut tirer la racine quarrée de chaque membre, & l'on aura une équation ſimple.

Exemple. Il faut réduire l'équation $xx - ax - ab = 0$ à une équation ſimple.

1°. Je fais paſſer la grandeur connue $-ab$ dans le ſecond membre, & je trouve $xx - ax = ab$.

2°. Je prens $\frac{1}{2}a$, qui eſt la moitié de la grandeur connue a du ſecond terme.

3°. J'ajoute $\frac{1}{4}aa$, qui eſt le quarré de cette moitié, à chaque membre, & je trouve $xx - ax + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa + ab$, dont le premier membre eſt un quarré parfait, qui a pour ſa racine $x - \frac{1}{2}a$.

4°. Je tire la racine quarrée de chaque membre, & je trouve l'équation ſimple $x - \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}aa + ab}$, & par tranſpoſition $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + ab}$.

Troiſiéme uſage de l'extraction des racines.

7. L'On trouve dans la réſolution de quelques Problêmes deux équations, qui étant jointes enſemble, ou retranchées l'une de l'autre, font trouver une équation dont le premier membre où eſt l'inconnue, eſt une puiſſance parfaite; ou bien ces équations étant élevées au quarré, au cube, &c. & enſuite jointes enſemble ou retranchées l'une de l'autre, l'on trouve une équation dont le premier membre où eſt l'inconnue, eſt une puiſſance parfaite: dans ce cas il faut extraire la racine de chaque membre de la derniere équation que l'on a trouvée, & l'on aura une équation plus ſimple.

Exemple I. Si l'on a les deux équations $x^3 + 3a^2x = b^3$, & $3axx + a^3 = c^3$.

Les ajoutant l'une à l'autre, l'on aura $x^3 + 3axx + 3aax + a^3 = b^3 + c^3$, dont le premier membre eſt le cube de $x + a$, il faut extraire la racine cubique de chaque membre, & l'on aura l'équation ſimple $x + a = \sqrt[3]{b^3 + c^3}$, & par tranſpoſition $x = -a + \sqrt[3]{b^3 + c^3}$.

Exemple II. L'on a les deux équations $xx - yy = \frac{1}{3}p$, & $x^3 + 3xyy = \frac{1}{2}q$.

Si l'on éleve la premiere à la troisiéme puissance, & la seconde au quarré, l'on aura $x^6 - 3x^4yy + 3xxy^4 - y^6 = \frac{1}{27}p^3$, & $x^6 + 6x^4yy + 9xxy^4 = \frac{1}{4}qq$.

Retranchant le premier membre de la premiere du premier membre de la seconde, & le second membre de la premiere du second membre de la seconde, l'on trouve $9x^4yy + 6xxy^4 + y^6 = \frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3$, dont le premier membre est le quarré de $3xxy + y^3$.

C'est pourquoi tirant la racine quarrée de chaque membre, l'on trouve $3xxy + y^3 = \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$.

Enfin ajoutant cette équation à l'équation $x^3 + 3xyy = \frac{1}{2}q$, l'on trouve $x^3 + 3xxy + 3xyy + y^3 = \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$, dont le premier membre est le cube de $x + y$.

C'est pourquoi tirant la racine cubique de chaque membre, l'on trouve l'équation simple $x + y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$.

Démonstration de tous ces usages.

LES racines quarrées, ou cubiques, ou quatriémes, &c. de grandeurs égales, sont égales : or il est évident que dans toutes les operations précedentes, on tire des racines quarrées, ou cubiques, &c. de grandeurs égales ; les grandeurs que l'on trouve sont donc encore égales, & elles font une équation, mais elle est plus simple.

AVERTISSEMENT.

LES operations précedentes suffisent pour dégager l'inconnue des équations simples, lorsqu'il n'y en a qu'une seule, mais l'on a encore besoin des substitutions, lorsqu'on trouve plusieurs équations simples dans la résolution d'un Problême, qui contiennent plusieurs inconnues.

DES SUBSTITUTIONS.

8. LORSQU'IL n'y a qu'une inconnue dans le premier membre d'une équation, les quantités dont le second membre est composé, sont la valeur de cette inconnue.

Dans l'équation $x = a + b$, $a + b$ est la valeur de x.

Substituer la valeur d'une inconnue dans une équation,

c'eſt y mettre cette valeur à la place de l'inconnue, ou les puiſſances, ou les racines de cette valeur à la place des ſemblables puiſſances, ou des ſemblables racines de l'inconnue.

D'où il ſuit, 1°, que ſi l'inconnue eſt dans l'équation avec le ſigne $+$ ou $-$, il faut l'ôter de l'équation, & mettre ſa valeur en ſa place avec ſes ſignes ſi l'inconnue a le ſigne $+$, avec des ſignes contraires ſi l'inconnue a le ſigne $-$.

2°. Si l'inconnue eſt multipliée ou diviſée dans l'équation par quelqu'autre grandeur, il faut multiplier ou diviſer la valeur de l'inconnue par cette grandeur, & la mettre dans l'équation à la place de la grandeur où étoit l'inconnue : ce qui ſe doit auſſi entendre des puiſſances de l'inconnue, ou de ſes racines.

Enfin de quelque maniere que ſoit l'inconnue dans une équation, il faut y mettre de la même maniere ſa valeur à ſa place. Tout ceci s'entendra mieux par des exemples.

EXEMPLE I.

POUR ſubſtituer la valeur de y, qu'on ſuppoſe $= a - x$, dans l'équation $x - y = d$; il faut ôter $-y$ de cette équation, & mettre en ſa place ſa valeur $a - x$, en changeant
*2 les ſignes de cette valeur *, & l'on aura $x - a + x = d$; & en abregeant l'on aura $2x - a = d$, & par tranſpoſition $2x = a + d$, & en diviſant chaque membre par deux, l'on aura $x = \frac{a+d}{2}$; ce qui fait voir l'uſage des ſubſtitutions.

EXEMPLE II.

POUR ſubſtituer la valeur de x, qu'on ſuppoſe $= y + 1$, dans l'équation $xx - 2x - 3 = 0$; il faut, 1°, élever chaque membre de $x = y + 1$ au quarré, & l'on aura $xx = yy + 2y + 1$.

2°. Multiplier $y + 1$ valeur de x par -2, & l'on aura $-2x = -2y - 2$.

3°. Il faut mettre dans l'équation $xx - 2x - 3 = 0$, à la place de xx & de $-2x$, leurs valeurs, & l'on aura $yy - 4 = 0$, au lieu de $xx - 2x - 3 = 0$, & par tranſpoſition l'on aura $yy = 4$, & $y = 2$, l'on aura la valeur de x toute connue, en mettant à la place de y dans l'équation $x = y + 1$, ſa valeur 2, car l'on trouvera $x = 3$.

L'operation ſe fait de cette maniere.

L'équation propoſée eſt $xx - 2x - 3 = 0$, l'on ſuppoſe $x = y + 1$.

L'on aura donc

$$\begin{array}{rcl} xx & = & yy + 2y + 1. \\ -2x & = & - 2y - 2. \\ -3 & = & - 3. \\ \hline \end{array}$$

Donc $xx - 2x - 3 = 0 = yy \;\; * - 4 = 0$.

EXEMPLE III.

ON propoſe de ſubſtituer dans l'équation $x = \frac{a-z}{z+1}$ la valeur de z priſe dans l'équation $z = -1 + \frac{\sqrt{ab+a+b+1}}{\sqrt{c+1}}$, l'on trouve en mettant au lieu de z ſa valeur,

$$x = \frac{\dfrac{a+1-\sqrt{ab+a+b+1}}{\sqrt{c+1}}}{-1+\dfrac{ab+a+b+1}{\sqrt{c+1}}+1}$$

Il faut enſuite abreger cette expreſſion par les operations ordinaires de l'Algebre de cette maniere,

$$x = \frac{\dfrac{a+1-\sqrt{ab+a+b+1}}{\sqrt{c+1}}}{-1+\dfrac{\sqrt{ab+a+b+1}}{\sqrt{c+1}}+1} = \frac{\overline{a+1} \times \sqrt{c+1} - \sqrt{ab+a+b+1}}{\sqrt{ab+a+b+1}}$$

$$= \frac{\overline{a+1} \times \sqrt{c+1}}{\sqrt{ab+a+b+1}} - 1 = \frac{\sqrt{a+1} \times \sqrt{a+1} \times \sqrt{c+1}}{\sqrt{a+1} \times \sqrt{b+1}} - 1 =$$

$$\frac{\sqrt{a+1} \times \sqrt{c+1}}{\sqrt{b+1}} - 1 = -1 + \frac{\sqrt{ac+a+c+1}}{\sqrt{b+1}}.$$

L'on aura donc l'expreſſion la plus ſimple $x = -1 + \frac{\sqrt{ac+a+c+1}}{\sqrt{b+1}}$.

Démonſtration des ſubſtitutions.

L'ON met par la ſubſtitution des grandeurs égales dans une équation, à la place d'autres grandeurs qu'on en ôte ; par conſequent les deux membres de l'équation demeurent toujours égaux.

SECTION III.

Où l'on explique la maniere de réſoudre entierement les Problêmes ſimples ou du premier degré, & l'on en apporte pluſieurs exemples.

PROBLÊME II.

9. *APRE'S avoir réduit un Problème en autant d'équations qu'on a pris d'inconnues; trouver la valeur connue de toutes les inconnues, c'eſt-à-dire trouver la réſolution du Problème.*

Premiere maniere.

1°. ON écrira toutes les équations du Problême qui expriment tous les raports connus qui ſont entre les inconnues & les connues, & on les nommera les premieres équations.

2°. On en prendra une, qu'on écrira à part, l'on prendra la valeur de l'une des inconnues qu'elle contient, & l'on ſubſtituera cette valeur à ſa place dans toutes celles des premieres équations où ſe trouve cette inconnue, excepté celle où on l'a dégagée; après quoi cette inconnue ne ſe trouvera plus dans les équations où ſa valeur a été ſubſtituée; on écrira toutes ces nouvelles équations, & l'on y ajoutera celles des premieres équations où l'inconnue qu'on a ôtée, n'étoit point, s'il s'en trouve quelqu'une, & on les nommera les ſecondes équations.

3°. On prendra une de ces équations, que l'on écrira avec celle qu'on a déja miſe à part, on prendra la valeur de l'une des inconnues qu'elle contient, & on la ſubſtituera à ſa place dans toutes celles des ſecondes équations où ſe trouve cette inconnue; ce qui donnera de nouvelles équations où cette inconnue ne ſe trouve plus. On les écrira, & l'on y ajoutera celles des ſecondes équations où ne ſe trouvoit pas cette inconnue, & on les nommera les troiſiémes équations, ſur leſquelles on operera comme l'on a fait ſur les équations précedentes, & l'on continuera l'operation juſqu'à ce qu'on trouve une équation où il n'y ait qu'une ſeule inconnue.

4°. On prendra la valeur de l'inconnue de cette équation, & on la ſubſtituera dans celle des équations miſes à part, où il n'y a que cette inconnue & une autre, & il n'y reſtera que cette autre inconnue, dont on prendra la valeur, qu'on ſubſtituera dans une des équations miſes à part où il n'y a que cette inconnue avec une autre. En continuant d'operer de cette maniere, on trouvera les valeurs connues de toutes les inconnues, & l'on aura la réſolution du Problême.

Seconde maniere.

1°. APRE'S avoir écrit les premieres équations, on prendra toutes les valeurs d'une même inconnue dans toutes celles des premieres équations où elle ſe trouve, & l'on en écrira une à part.

2°. On comparera toutes ces valeurs les unes avec les autres ; ce qui donnera de nouvelles équations, qu'on écrira, & l'on y ajoutera celles des premieres où n'étoit point cette inconnue, s'il s'en trouve, & l'on aura les ſecondes équations.

3°. On operera ſur celles-ci comme on a fait ſur les premieres, & l'on continuera juſqu'à ce qu'on ſoit arrivé à une équation où il n'y ait qu'une inconnue.

4°. On en prendra la valeur, & on la ſubſtituera dans celles des équations miſes à part où elle ſe trouve avec une ſeule autre inconnue, & l'on continuera, comme dans la méthode précedente, juſqu'à ce qu'on ait les valeurs connues de toutes les inconnues.

REMARQUE.

LORSQU'ON a trouvé la valeur toute connue d'une ſeule inconnue, ſi l'on n'avoit pas mis à part les équations dont on a parlé, on trouveroit neanmoins la valeur de toutes les inconnues en ſubſtituant la valeur toute connue dans une des équations où il n'y a que l'inconnue qui a cette valeur avec une ſeconde inconnue, & après la ſubſtitution on prendroit la valeur toute connue de la ſeconde inconnue, & on la ſubſtitueroit avec la valeur de la premiere inconnue dans une des équations où il n'y a que les deux premieres inconnues avec une troiſiéme ; & en continuant cette operation, on trouveroit les valeurs connues de toutes les inconnues.

Troisiéme maniere qui sert à abreger les operations dans plusieurs cas.

IL arrive quelquefois qu'on trouve tout d'un coup la valeur toute connue de chacune des inconnues du Problême, en ajoutant ensemble deux ou plusieurs des valeurs d'une même inconnue prises dans les premieres équations, ou bien en les retranchant les unes des autres. Il faut seulement observer de joindre ensemble les valeurs d'une même inconnue qui forment une équation où les autres inconnues se détruisent par des signes contraires, ou toutes, ou la plûpart, comme on le verra dans l'exemple suivant, auquel on appliquera ces trois méthodes.

Application de la premiere méthode à un exemple.

ON suppose qu'en réduisant un Problême en équations, on a trouvé les quatre suivantes.

	Premieres équations.	*Equations mises à part.*
1°.	$v + x + y = z + a.$	$v = z - x - y + a.$
	$v + x + z = y + b.$	$2z = 2y - a + b.$
	$v + y + z = x + c.$	$2y = 2x - b + c.$
	$x + y + z = v + d.$	

2°. On prendra la valeur d'une inconnue, par exemple de v, dans laquelle on voudra de ces équations comme dans
* 2 la premiere, & l'on trouvera * $v = z - x - y + a$, qu'on écrira à part, & l'on substituera cette valeur dans les autres équations à la place de v, & l'on aura les secondes équations où v ne se trouvera plus.

Secondes équations abregées.

$2z - 2y + a = b. \quad 2z - 2x + a = c. \quad 2x + 2y = a + d.$

3°. On prendra la valeur d'une inconnue de ces secondes
* 2 équations, comme de z, & l'on trouvera * $2z = 2y - a + b$; on l'écrira dans l'ordre des équations mises à part, & l'on substituera cette valeur dans celles des secondes équations où se trouve z, c'est-à-dire dans la seconde, & l'on aura la premiere des troisiémes équations, & y ajoutant l'équation $2x + 2y = a + d$, les troisiémes équations seront les deux suivantes.

Troisiémes

Troisiémes équations abregées.

$2y - 2x + b = c.$ $2x + 2y = a + d.$

4°. On prendra la valeur d'une inconnue de ces troisiémes équations, comme de y, & l'on trouvera $2y = 2x - b + c$. On écrira cette équation dans l'ordre des équations mises à part, & l'on substituera la valeur de $2y$ dans l'équation $2x + 2y = a + d$, & l'on trouvera $4x = a + b - c + d$.

Comme l'on est arrivé à une équation qui ne contient qu'une seule inconnue x, on la dégagera, & l'on trouvera $x = \frac{a+b-c+d}{4}$.

On substituera la valeur connue de x dans l'équation mise à part $2y = 2x - b + c$, qui n'a d'inconnues que y & x, & l'on trouvera $2y = \frac{a+b-c+d}{2} - b + c = \frac{a-b+c+d}{2}$, & en divisant chaque membre de $2y = \frac{a-b+c+d}{2}$ par 2, l'on aura $y = \frac{a-b+c+d}{4}$.

On substituera cette valeur de y dans l'équation mise à part $2z = 2y - a + b$, & après avoir abregé l'équation qui en viendra, & dégagé l'inconnue z, on trouvera $z = \frac{-a+b+c+d}{4}$. Enfin on substituera les valeurs connues de x, y, z, dans l'équation mise à part $v = z - x - y + a$, & après avoir abregé l'équation qui en viendra, & dégagé l'inconnue v, on trouvera $v = \frac{a+b+c-d}{4}$.

Le Problême est entierement résolu, & l'on a toutes les valeurs connues des grandeurs inconnues, $x = \frac{a+b-c+d}{4}$. $y = \frac{a-b+c+d}{4}$. $z = \frac{-a+b+c+d}{4}$. $v = \frac{a+b+c-d}{4}$.

Application de la seconde méthode au même exemple.

Premieres équations.	*Equations mises à part.*
$v + x + y = z + a.$	$v = z - x - y + a.$
$v + x + z = y + b.$	$2z = 2y + b - a.$
$v + y + z = x + c.$	$2x = 2y + b - c.$
$x + y + z = v + d.$	

1°. On prendra dans les premieres équations toutes les valeurs d'une même inconnue, comme de v, & l'on en mettra une à part. Ces valeurs sont,

$v = z - x - y + a.$ $v = y - x - z + b.$ $v = x - y - z + c.$ $v = x + y + z - d.$

2°. On comparera ces valeurs égales les unes avec les autres, & l'on aura les secondes équations.

Secondes équations abregées.

$2z - 2y = b - a. \quad 2z - 2x = c - a. \quad 2x + 2y = a + d.$

Les autres équations qu'on pourroit faire des quatre valeurs de v, ſont inutiles, ces trois équations contenant toutes les inconnues du Problême excepté v, & toutes les connues.

3°. L'on prendra dans les ſecondes équations toutes les valeurs d'une même inconnue comme de z, & l'on aura,

$$2z = 2y + b - a. \qquad 2z = 2x + c - a.$$

On en écrira une dans l'ordre des équations miſes à part, on comparera ces valeurs les unes avec les autres, & on aura les troiſiémes équations en y ajoutant l'équation $2x + 2y = a + d$, dans laquelle z ne ſe trouve point.

Troiſiémes équations abregées.

$$2x - 2y = b - c. \qquad 2x + 2y = a + d.$$

4°. On dégagera l'inconnue x dans ces troiſiémes équations, & l'on aura $2x = 2y + b - c. \quad 2x = -2y + a + d.$

On en écrira une dans l'ordre des équations miſes à part, & on fera une équation de ces deux valeurs de $2x$, & l'on aura l'équation $4y = a - b + c + d$, où il n'y a que la ſeule inconnue y, en diviſant chaque membre par 4, l'on aura $y = \frac{a - b + c + d}{4}$.

Enfin on ſubſtituera la valeur de y dans les équations miſes à part, & l'on trouvera la valeur de x, & avec ces deux valeurs, celle de z; & enfin celle de v, qui ſont,

$$x = \frac{a + b - c + d}{4}. \quad z = \frac{-a + b + c + d}{4}. \quad v = \frac{a + b + c - d}{4}.$$

Application de la troiſiéme méthode au même exemple.

Equations du Problême.

$v + x + y = z + a. \quad v + x + z = y + b. \quad v + y + z = x + c.$
$x + y + z = v + d.$

Valeurs de v.	*Valeurs de x.*
$v = z - x - y + a.$	$x = z - v - y + a.$
$v = y - x - z + b.$	$x = y - v - z + b.$
$v = x - y - z + c.$	$x = v + y + z - c.$
$v = x + y + z - d.$	$x = v - y - z + d.$
Somme abregée. $4v = a + b + c - d.$	*Somme abregée.* $4x = a + b - c + d.$

Diviſant par 4, $v = \frac{a+b+c-d}{4}$. Diviſant par 4, $x = \frac{a+b-c+d}{4}$.

Valeurs de y.	*Valeurs de z.*
$y = z - v - x + a.$	$z = v + x + y - a.$
$y = v + x + z - b.$	$z = y - v - x + b.$
$y = x - v - z + c.$	$z = x - v - y + c.$
$y = v - x - z + d.$	$z = v - x - y + d.$
Somme abregée. $4y = a - b + c + d.$	*Somme abregée.* $4z = -a + b + c + d.$

Diviſant par 4, $y = \frac{a-b+c+d}{4}$. Diviſant par 4, $z = \frac{-a+b+c+d}{4}$.

AVERTISSEMENT.

COMME il arrive rarement qu'en joignant ainſi toutes les valeurs d'une même inconnue, l'on trouve ſa valeur toute connue, il eſt bon de remarquer qu'en les joignant deux à deux dans les cas où cela ſe peut faire, ou trois à trois, &c. il faut choiſir celles où les autres inconnues ſe détruiſent par des ſignes contraires, ou toutes, ou en partie.

Démonſtration de ces trois méthodes.

IL eſt évident que dans toutes les operations de ces méthodes, l'égalité ſe conſerve toujours entre les deux membres des équations qu'elles font trouver, & que les inconnues ſe dégagent les unes après les autres; par conſequent il y a égalité entre les membres des dernieres équations où conduiſent ces méthodes; ainſi les dernieres équations donnent les valeurs toutes connues de toutes les inconnues du Problême.

REMARQUE.

10. 1. LORSQU'ON ne peut pas dégager toutes les inconnues, ce qui arrive lorſqu'on n'a pas pû former autant d'équations qu'on a été obligé de prendre d'inconnues, le Problême eſt indéterminé, & il peut avoir differentes réſolutions; car en mettant des grandeurs arbitraires à la place des inconnues qu'on n'a pas pû dégager, on aura differentes réſolutions : il arrive neanmoins quelquefois que les grandeurs arbitraires doivent être entre certaines limites, autrement on trouveroit des réſolutions négatives, ou même impoſſibles; les équations où ſe trouvent les inconnues à la place

desquelles on peut mettre des grandeurs arbitraires, feront connoître ces limites.

Par exemple, si en résolvant un Problême, on ne peut trouver d'autre équation que celle-ci, $y = \frac{ax}{x-b}$, ce Problême est indéterminé, & en mettant differentes grandeurs arbitraires à la place de x, on aura differentes résolutions. Cependant il est évident que pour avoir des valeurs positives de y, il faut que chaque grandeur arbitraire qu'on mettra à la place de x, soit plus grande que b.

2. Lorsqu'au contraire on a plus d'équations que d'inconnues, après avoir trouvé les valeurs toutes connues de toutes les inconnues, il faut qu'en mettant ces valeurs dans les équations qui restent, on ne trouve pas d'impossibilité, c'est à-dire qu'on ne trouve pas dans les deux membres de ces équations des grandeurs toutes connues inégales entr'elles: car ce seroit une marque que l'on a supposé quelque impossibilité dans les raports du Problême qui ont fourni ces équations; comme si dans l'exemple auquel on a appliqué les méthodes, l'on avoit encore eu cette équation de plus que celles qui y sont, $x + y = e$. L'on auroit trouvé en substituant dans cette équation, les valeurs toutes connues de x & de y, l'égalité $\frac{a+d}{2} = e$; & si la grandeur e n'étoit pas égale à $\frac{a+d}{2}$, on auroit supposé dans le Problême une chose impossible.

Exemples où l'on résout plusieurs Problèmes simples ou du 1er degré.

I.

11. La somme a de deux grandeurs inconnues x & y, dont x est la plus grande, étant connue avec leur difference d, trouver chacune de ces grandeurs.

Par la supposition $x + y = a$, & $x - y = d$; donc $x = a - y$, & $x = d + y$; donc $a - y = d + y$, & par transposition $2y = a - d$, & en divisant chaque membre par 2, l'on aura $y = \frac{a-d}{2}$; substituant cette valeur dans laquelle on voudra des équations précedentes comme dans $x = a - y$, l'on trouvera $x = \frac{a+d}{2}$.

L'on a donc trouvé que la moitié de la somme de deux grandeurs avec la moitié de leur difference, est égale à la plus grande, & la moitié de la somme moins la moitié de la difference, est égale à la moindre. Ce qu'il faut bien retenir.

II.

On propoſe de trouver trois grandeurs inconnues x, y, z, qui ſoient telles qu'en ajoutant une grandeur connue a à la premiere x, elle ſoit égale aux deux autres, en ajoutant la même grandeur a à la ſeconde y, elle ſoit égale au produit des deux autres $x + z$ par un nombre connu b; enfin en ajoutant a à la troiſiéme z, elle ſoit égale au produit des deux autres par un autre nombre connu c. Par la ſuppoſition

	Equations miſes à part.
$x + a = y + z$.	
$y + a = bx + bz$.	$x = y + z - a$.
$z + a = cx + cy$.	$y = \frac{-2bz + ab + a}{b - 1}$.

Donc $x = y + z - a$. $x = \frac{y}{b} - z + \frac{a}{b}$. $x = \frac{z}{c} - y + \frac{a}{c}$, en comparant la premiere de ces valeurs de l'inconnue x avec les deux autres, l'on aura,

Secondes équations abregées.

$2z + \frac{by - y}{b} = \frac{ab + a}{b}$. $2y + \frac{cz - z}{c} = \frac{ac + a}{c}$; en dégageant y dans l'une & dans l'autre, on aura $y = \frac{-2bz + ab + a}{b - 1}$. $y = \frac{-cz + z + ac + a}{2c}$.

Comparant ces deux valeurs de y, on trouvera $\frac{-2bz + ab + a}{b - 1} = \frac{-cz + z + ac + a}{2c}$, où dégageant z, l'on trouvera $z = \frac{abc + 3ac - ab + a}{3bc + b + c - 1}$, mettant cette valeur de z dans $y = \frac{-2bz + ab + a}{b - 1}$, l'on trouve après avoir abregé $y = \frac{abc + 3ab - ac + a}{3bc + b + c - 1}$, ſubſtituant les valeurs connues de z & de y dans $x = y + z - a$, l'on trouve après avoir abregé $x = \frac{-abc + ab + ac + 3a}{3bc + b + c - 1}$.

Si l'on ſuppoſe $a = 10$, $b = 2$, $c = 3$, l'on aura $x = \frac{10}{11}$. $y = 4\frac{6}{11}$. $z = 6\frac{4}{11}$.

III.

Deux nombres qu'on exprimera generalement par a & b, étant donnés, trouver un troiſiéme nombre inconnu x, par lequel les deux a & b étant diviſés, ſi l'on ajoute à chaque quotient $\frac{a}{x}$, $\frac{b}{x}$, un nombre donné c, les ſommes $\frac{a}{x} + c$, $\frac{b}{x} + c$, ſoient entr'elles comme deux nombres donnés m & n, l'on ſuppoſe a moindre que b, & m moindre que n.

Par la ſuppoſition $\frac{a}{x} + c . \frac{b}{x} + c :: m . n$; ce qui donne cette équation $\frac{an}{x} + cn = \frac{bm}{x} + cm$; multipliant toutes les quantités par x, l'on aura $an + cnx = bm + cmx$, & dégageant x, l'on aura $x = \frac{bm - an}{cn - cm}$.

Si l'on ſuppoſe $a = 12$, $b = 36$, $c = 8$, $m = 3$, $n = 5$, l'on aura $x = 3$.

REMARQUE.

IL faut prendre garde en dégageant les inconnues, de faire en ſorte que les valeurs toutes connues que l'on trouve, ſoient poſitives lorſque cela eſt poſſible.

IV.

On prendra pour quatriéme exemple le Problême de la couronne mêlée d'or & d'argent, dont Archimede trouva le mêlange ſans endomager la couronne. Un ouvrage paroît être d'or, il faut trouver premierement s'il n'y a point d'argent mêlé avec l'or; ſecondement s'il ſe trouve du mêlange, il faut trouver combien il y a d'or, & combien il y a d'argent dans l'ouvrage ſans l'endomager.

On ſuppoſe comme une choſe démontrée par l'experience, & dont on donne la raiſon dans l'Hydroſtatique, que les métaux perdent une partie de leur poids dans l'eau, & que l'or en perd moins que l'argent, & que les autres métaux.

Ainſi le poids de l'ouvrage étant connu & nommé p, il faut prendre un lingot d'or pur, & un lingot d'argent, chacun du poids p de l'ouvrage, & peſer ces trois corps égaux dans l'eau, pour voir la quantité qu'ils y perdent de leur poids; ſi l'ouvrage en perd plus que l'or & moins que l'argent, l'on eſt aſſuré par là qu'il y a du mêlange.

Pour le trouver ſoit nommé a la quantité que l'argent perd de ſon poids dans l'eau; b la quantité qu'y perd l'or pur, & c la quantité qu'y perd l'ouvrage, & l'on ſuppoſe c plus grand que b, & moindre que a.

Soit la quantité inconnue du poids d'argent mêlé dans l'ouvrage $= x$.

La quantité inconnue du poids d'or mêlé dans l'ouvrage $= y$.

L'on a déja cette premiere équation $x + y = p$, puiſque les deux parties font enſemble la quantité p du poids de l'ouvrage.

Pour avoir une ſeconde équation, il faut auparavant faire ces deux proportions.

Le poids p du lingot d'argent eſt à la quantité x du poids d'argent mêlé dans l'ouvrage, comme la perte a que fait le lingot d'argent de ſon poids, étant mis dans l'eau, à la perte que fait la partie x d'argent qui eſt dans l'ouvrage lorſqu'on le peſe dans l'eau.

$p . x :: a . \frac{ax}{p}$. ainſi $\frac{ax}{p}$ eſt la perte que fait la quantité x du poids d'argent qui eſt dans l'ouvrage.

Par un raiſonnement ſemblable à celui qui précede, le poids du lingot d'or pur $p . y :: b . \frac{by}{p}$. ainſi $\frac{by}{p}$ eſt la perte que fait la quantité y du poids d'or qui eſt dans l'ouvrage; mais ces deux quantités de perte $\frac{ax}{p}$ & $\frac{by}{p}$ doivent être enſemble égales à la perte c que fait l'ouvrage étant peſé dans l'eau.

L'on a donc cette ſeconde équation $\frac{ax}{p} + \frac{by}{p} = c$.

Il faut ſubſtituer la valeur de x priſe dans la premiere équation, qui eſt $x = p - y$, dans cette ſeconde équation, & l'on aura $\frac{ap - ay + by}{p} = c$, où l'on trouvera $y = \frac{ap - cp}{a - b}$.

Subſtituant cette valeur dans $x = p - y$, on trouvera $x = \frac{cp - bp}{a - b}$.

Si l'on réſout chacune de ces égalités en proportion, on trouvera $a - b . p :: a - c . y$. $a - b . p :: c - b . x$.

Ce ſont les proportions que donne la regle d'alliage.

Si l'on ſuppoſe le poids de l'ouvrage $p = 10$ livres, que l'argent perd la dixiéme partie de ſon poids dans l'eau, c'eſt-à-dire que 10 livres d'argent perdent une livre, l'on aura $a = 1$ que l'or y perd la dix-huitiéme partie de ſon poids, l'on aura $b = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$, que l'ouvrage perd $\frac{2}{3}$ d'une livre de ſon poids dans l'eau, c'eſt-à-dire $c = \frac{2}{3}$.

On trouvera que la quantité d'argent mêlé dans l'ouvrage eſt $x = 2$ liv. $\frac{1}{2}$; la quantité d'or eſt $y = 7$ liv. $\frac{1}{2}$.

V.

Trouver entre deux grandeurs données a & b, autant de moyennes proportionnelles qu'on voudra, ce nombre de moyennes proportionnelles ſoit nommé n.

Il ſuffit de trouver le premier terme moyen proportionnel, car par la regle de trois, on aura tous les autres.

Soit ce premier moyen $= x$.

Suivant ce qui eſt démontré dans les raports composés $a^{n+1} . x^{n+1} :: a . b$. d'où l'on déduit $ax^{n+1} = a^{n+1} b$, diviſant chaque membre par a, l'on aura $x^{n+1} = a^n b$; en tirant la racine dont l'expoſant eſt $n + 1$ de chaque membre, l'on aura $x = \sqrt[n+1]{a^n b}$.

Si on demande un ſeul moyen proportionnel, l'on aura $n = 1$, & $n + 1 = 2$, ainſi $x = \sqrt[2]{ab}$.

Si on demande deux moyens, l'on aura $n = 2$, & $n + 1 = 3$, ainſi $x = \sqrt[3]{a^2 b}$.

Si on en demande trois, l'on aura $x = \sqrt[4]{a^3 b}$, &c.

V I.

On prendra un exemple de Physique sur le ressort de l'air pour le sixiéme.

Soit supposé un tuyau de verre d'une longueur determinée telle qu'on voudra, comme de 30 pouces, fermé d'un bout, & ouvert de l'autre, qu'on remplisse de mercure à la reserve d'une certaine quantité d'air grossier qu'on y laisse telle qu'on voudra, par exemple de huit pouces : l'on demande après avoir renversé le tuyau, & mis l'ouverture dans un vaisseau plein de mercure, quelle sera la quantité du tuyau qu'occupera l'air qu'on y a laissé après s'être étendu par son ressort, & à quelle hauteur le mercure demeurera suspendu.

On suppose que l'experience demontre, 1°. que le mercure demeure suspendu à la hauteur de 28 pouces, lorsqu'il n'y a point d'air grossier dans le tuyau ; par conséquent l'air exterieur presse le mercure qui est dans le tuyau, & l'empêche de descendre avec une force égale au poids de 28 pouces de mercure. Il presse avec la même force tous les corps qu'il environne, & une portion d'air grossier même est pressée avec la même force par l'air qui l'environne, de maniere que s'il arrivoit qu'elle en fût moins pressée, elle s'étendroit par son ressort, & occuperoit un plus grand espace.

2. Que lorsqu'une portion d'air est pressée par deux forces inégales, dont l'une est par exemple double de l'autre, l'espace qu'elle occupe étant pressée par la plus grande, est à celui auquel elle s'étend par son ressort, étant pressée par la moindre, comme réciproquement cette moindre force est à la plus grande ; dans cet exemple comme 1 à 2. Ces choses supposées,

Soit la longueur connue du tuyau $= l$.

La quantité connue d'air laissé dans le tuyau $= a$.

La force entiere avec laquelle l'air exterieur presse le mercure, qui est connue & ordinairement égale au poids de 28 pouces de mercure $= f$.

La hauteur inconnue de la colonne de mercure qui demeurera dans le tuyau où l'on a laissé l'air a, $= x$.

La quantité inconnue de l'espace qu'occupera l'air a laissé dans le tuyau $= y$.

Les

Les deux quantités x & y des espaces qu'occuperont le mercure & l'air dans le tuyau, seront égales à la longueur du tuyau l; ce qui donne cette premiere équation $x + y = l$.

L'air a laissé dans le tuyau qui occupoit l'espace a lorsqu'il étoit pressé par la force entiere f de l'air qui l'environnoit, doit s'étendre lorsqu'il n'est plus pressé que par la force $f - x$, moindre que f, c'est-à-dire lorsqu'il est pressé par la force f de l'air exterieur diminuée par le poids de la colonne de mercure x qui restera dans le tuyau, car l'air exterieur pressant le mercure x & l'air qui sont dans le tuyau avec la force f, le poids du mercure x diminue l'action de la force f sur l'air resté dans le tuyau, qui n'y est plus pressé que par la force $f - x$.

Or l'espace y qu'occupera l'air laissé dans le tuyau après s'être étendu, n'étant pressé que par la force $f - x$, doit être à l'espace a qu'il occupoit étant pressé par la force entiere f; comme réciproquement la force f est à la force $f - x$, ce qui donne cette proportion $y . a :: f . f - x$, d'où l'on déduit la seconde équation $fy - xy = af$.

Il faut prendre la valeur de x dans la premiere équation $x + y = l$, & l'on aura $x = l - y$.

Il faut substituer cette valeur de x dans la seconde équation $fy - xy = af$, & l'on aura $fy - ly + yy = af$, qu'on écrira de cette maniere $yy + fy - ly = af$.

Pour abreger on supposera $f - l = - b$, lorsque l surpasse f; & $f - l = + b$, lorsque f surpasse l; & on mettra $- b$ à la place de $f - l$ dans le premier cas, & l'on aura $yy - by = af$.

Il faut ajouter à chaque membre $\frac{1}{4} bb$, & l'on aura $yy - by + \frac{1}{4} bb = \frac{1}{4} bb + af$, dont le premier membre est un quarré parfait, qui a pour sa racine $y - \frac{1}{2} b$; ainsi en tirant la racine quarrée de chaque membre, l'on aura $y - \frac{1}{2} b = \sqrt{\frac{1}{4} bb + af}$, & par transposition $y = \frac{1}{2} b + \sqrt{\frac{1}{4} bb + af}$. En mettant cette valeur de y dans $x = l - y$, l'on aura $x = l - \frac{1}{2} b - \sqrt{\frac{1}{4} bb + af}$, & le Problême est résolu.

Supposant $30 = l$, $28 = f$, $8 = a$, & $28 - 30 = - 2 = - b$, l'on trouvera $y = 16$, & $x = 14$.

REMARQUE.

L'On peut ſouvent abreger les réſolutions des Problêmes en ſe ſervant de quelques-uns de leurs raports, pour diminuer le nombre des inconnues, & par conſéquent celui des équations. Dans l'exemple précedent, au lieu de prendre la ſeconde inconnue y, on auroit pû raiſonner ainſi : La longueur du tuyau l moins la hauteur inconnue de la colonne du mercure x, eſt preciſément la quantité inconnue de l'eſpace qu'occupera l'air a laiſſé dans le tuyau, ainſi cet eſpace eſt $l - x$; ce qui eſt cauſe qu'on n'a pas beſoin de la premiere équation, & qu'une ſeule équation ſuffit pour la réſolution du Problême.



ANALYSE COMPOSÉE,

OU

ANALYSE QUI ENSEIGNE A RESOUDRE les Problêmes qui ſe réduiſent à des équations compoſées.

LIVRE II.

Où l'on explique la maniere de réduire les Problêmes en équations, & toutes les équations d'un même Problême à une ſeule qui en contienne toutes les conditions, & quelques préparations generales des équations compoſées, pour les réſoudre plus facilement, comme les manieres d'en ôter les fractions, les incommenſurables, & de trouver leur plus grand diviſeur commun.

SECTION I.

Où l'on explique la maniere de réduire un Problême compoſé ſur les nombres ou de Geometrie en équations, & la maniere de réduire toutes les équations d'un Problême à une ſeule qui ne contienne qu'une inconnue lorſque le Problême eſt déterminé, ou pluſieurs lorſqu'il eſt indéterminé.

AVERTISSEMENT.

CE Traité d'Analyſe eſt principalement pour la Geometrie, où les équations compoſées ſont neceſſaires pour réſoudre les Problêmes les plus compoſés, d'une maniere generale & ſi ſimple, que les expreſſions n'occupent point l'eſprit, & lui laiſſent toute ſon étendue pour découvrir

tout ce qu'ils ont de plus difficile. Cela oblige de marquer ici en general la maniere de réduire en équations les Problêmes de Geometrie.

PROBLÊME I.

12. *REDUIRE un Problème composé en équations, & réduire ensuite toutes les équations d'un Problème à une seule qui contienne tous les raports du Problème, & dont la résolution donne celle du Problème.*

PREMIERE PARTIE DU PROBLÊME.

SI le Problême est numerique, on suivra la méthode qui
1. est au commencement du premier Livre, c'est-à-dire, on marquera les connues & les inconnues par les lettres qui leur conviennent, & par le moyen des raports du Problême, on formera autant d'équations qu'on a supposé d'inconnues, lorsque cela se peut.

Si le Problême est de Geometrie, il faut faire la figure propre au Problême, & qui l'exprime comme s'il étoit résolu, c'est-à-dire, il faut y marquer les lignes inconnues comme si elles étoient connues; il faut ensuite tracer dans cette figure des lignes perpendiculaires, paralleles, & autres, selon qu'on les jugera necessaires pour former des triangles rectangles, des triangles semblables, ou d'autres figures propres à découvrir ce qu'on cherche.

Parmi les lignes de la figure il y en a qui sont connues par la construction ou par la supposition, on les marquera par les premieres lettres de l'alphabet; il y en a d'inconnues qui sont celles qu'on cherche, ou celles qu'on juge pouvoir servir à les trouver; on les marquera par les dernieres lettres de l'alphabet, ou par les premieres lettres de leurs noms.

Les proprietés de la figure, les propositions de la Geometrie sur les triangles semblables, sur les triangles rectangles, &c. & les conditions énoncées dans le Problême, feront connoître les raports qui sont entre les inconnues & les connues, & l'on s'en servira par ordre pour former autant d'équations qu'on a supposé d'inconnues, lorsque

cela eſt poſſible ; & après cela le Problême ſera réduit en équations.

Lorſqu'on ne peut former autant d'équations qu'on a ſuppoſé d'inconnues, le Problême eſt indéterminé, & peut recevoir pluſieurs reſolutions, & ſouvent même une infinité.

Il eſt bon de remarquer qu'on peut auſſi ſe ſervir de quelques-uns des raports du Problême ou de la figure, pour diminuer le nombre des inconnues, ce qu'il faut toujours faire afin d'abreger.

On concevra mieux ce qu'on vient de dire lorſqu'on en verra l'application dans la Geometrie.

SECONDE PARTIE DU PROBLÊME.

13. *REDUIRE toutes les équations d'un Problême à une ſeule qui n'ait qu'une inconnue, lorſque cela ſe peut.*

PARMI les inconnues qu'on a ſuppoſées pour former les équations d'un Problême, il y en a d'ordinaire une principale dont dépend la réſolution, & pour laquelle les autres inconnues ont été ſuppoſées. Cette principale inconnue doit être celle de l'équation à laquelle on doit réduire toutes les équations du Problême, & il ne faut point la dégager dans les dégagemens particuliers des autres inconnues.

On ſe ſervira des deux premieres méthodes de la troiſiéme Section du premier Livre, * pour réduire toutes les équations du Problême à une ſeule, c'eſt-à-dire, on prendra dans une des équations du Problême la valeur d'une inconnue qui n'eſt pas la principale, on la ſubſtituera dans les autres, & les nouvelles équations qu'on trouvera n'auront plus cette inconnue ; on ôtera de même de celles-ci une ſeconde inconnue, & on continuera d'ôter une troiſiéme inconnue, & toutes les autres enſuite, juſqu'à ce qu'on ſoit arrivé à une équation qui n'ait que la principale inconnue ; ce ſera l'équation qu'on cherche. *9.

Ou bien on prendra dans les équations du Problême toutes les valeurs, ou du moins deux valeurs d'une inconnue qui n'eſt pas la principale ; on comparera ces valeurs égales, ce qui donnera de nouvelles équations qui n'auront plus cette inconnue ; on operera de même ſur ces ſecondes équations, ce qui en fera trouver de troiſiémes où deux incon-

nues ne se trouveront plus ; enfin on continuera cette operation jusqu'à ce qu'on soit arrivé à une équation qui n'ait que la principale inconnue ; ce sera l'équation qu'on cherche.

Dans les Problêmes indéterminés, la derniere équation qui renferme toutes les conditions ou raports du Problême, aura plusieurs inconnues.

Application de ces méthodes à un exemple.

ON suppose qu'on a réduit un Problême à ces trois premieres équations qui en expriment tous les raports, & dont y est la principale inconnue qui doit se trouver dans la derniere équation qu'on cherche.

Premieres équations.

$$z - yy + v = -p. \qquad -zy + vy = -q. \qquad vz = r.$$

Pour les réduire à une seule équation dont y soit l'inconnue, je prens par la premiere méthode la valeur de z dans
* 2. la premiere équation, & je trouve * $z = yy - v - p$.
* 8. Je substitue * cette valeur de z dans les deux autres équations, & je trouve les secondes équations dans lesquelles z n'est plus.

Secondes équations abregées.

$$2vy = y^3 - py - q. \qquad vyy - vv - pv = r.$$

Je prens dans la premiere de ces équations la valeur
* 4. de v, & je trouve * $v = \frac{y^3 - py - q}{2y}$, dont le quarré est $vv = \frac{y^6 - 2py^4 - 2qy^3 + ppyy + 2pqy + qq}{4yy}$.
* 8. Je substitue * les valeurs de v & de vv dans l'équation $vyy - vv - pv = r$, & je trouve l'équation $+ \frac{y^5 - py^3 - qyy}{2y} - \frac{y^6 + 2py^4 + 2qy^3 - ppyy - 2pqy - qq}{4yy} - \frac{py^3 + ppy + pq}{2y} = r$, dans laquelle il n'y a plus d'autre inconnue que la principale y ; ainsi c'est l'équation qu'il falloit trouver.

Autrement. *Premieres équations.*

$$z - yy + v = -p. \qquad -zy + vy = -q. \qquad vz = r.$$

* 2 & 4. Je prens * deux valeurs de la même inconnue v dans les deux premieres équations, & je trouve $v = yy - z - p$. $v = \frac{zy - q}{y}$.

Je fais une équation de ces deux valeurs, & je trouve $yy - z - p = \frac{zy - q}{y}$, où l'inconnue v n'est plus.

Je multiplie chaque terme par y *, & je trouve * $y^3 - py + q = 2zy$. * 3. * 2.

Je prens la valeur de z, & j'ai * $z = \frac{y^3 - py + q}{2y}$. * 4.

Je prens * dans l'équation $vz = r$, dont je ne me suis pas encore servi, la valeur de z, & j'ai $z = \frac{r}{v}$. * 4.

Je fais des deux valeurs de z, l'équation $\frac{y^3 - py + q}{2y} = \frac{r}{v}$.

Je réduis les deux membres au même dénominateur, & après avoir effacé le dénominateur commun, je trouve $vy^3 - pvy + qv = 2ry$.

Je prens * la valeur de v, & j'ai $v = \frac{2ry}{y^3 - py + q}$. * 4.

Je substitue les valeurs de z & de v, $z = \frac{y^3 - py + q}{2y}$, $v = \frac{2ry}{y^3 - py + q}$, qui n'ont point d'autres inconnues que la principale y dans la premiere, ou dans la seconde des premieres équations, il n'importe laquelle. Je la substitue, dis-je, dans la premiere $z - yy + v = -p$, & je trouve $\frac{y^3 - py + q}{2y} - yy + \frac{2ry}{y^3 - py + q} = -p$, qui est l'équation qu'il falloit trouver. * 8.

On auroit pû prendre dans les trois premieres équations les trois valeurs de la même inconnue v, & les comparant ensemble, en faire deux équations, où il n'y auroit eu d'inconnue que z avec la principale y, & prendre dans ces deux équations, deux valeurs de z, qui étant comparées, auroient donné l'équation où il n'y auroit eu que l'inconnue principale y; mais le calcul en auroit été un peu plus embarrassé.

On ne met pas d'autres exemples, on en verra assez dans la suite, & dans la Geometrie.

DEMONSTRATION.

Il est évident que l'on conserve toujours l'égalité dans toutes les operations du Problême, & qu'ayant employé toutes les équations du Problême à former la derniere, cette derniere équation renferme tous les raports exprimés par toutes les équations du Problême. Enfin il est évident que la résolution de cette derniere équation donnera celle de toutes les équations du Problême.

SECTION II.

Où l'on explique la maniere d'ôter toutes les fractions de l'équation du Problême. L'on y explique aussi toutes les définitions des équations composées.

PROBLÊME II.

14. *OTER toutes les fractions d'une équation composée.*

IL faut réduire toutes les grandeurs de l'équation à un même dénominateur, & ensuite effacer le commun dénominateur, & abreger l'équation en effaçant les grandeurs qui se détruisent par des signes contraires, en joignant ensemble les mêmes grandeurs, & en divisant toutes les grandeurs par les lettres communes, & l'on aura l'équation sans fractions.

Par exemple, pour ôter les fractions de l'équation $\frac{y^3 - py + q}{2y} - yy + \frac{2ry}{y^3 - py + q} = -p$, on réduira toutes les grandeurs de l'équation au dénominateur commun $2y^4 - 2pyy + 2qy$, & l'on aura,

$$\frac{y^6 - py^4 + qy^3 - py^4 + ppyy - pqy + qy^3 - pqy + qq - 2y^6 + 2py^4 - 2qy^3 + 4ryy}{2y^4 - 2pyy + 2qy}$$

$$= \frac{-2py^4 + 2ppyy - 2pqy}{2y^4 - 2pqy + 2qy}.$$

On effacera le dénominateur commun, & toutes les quantités qui se détruisent par des signes contraires, & l'on joindra ensemble les mêmes quantités, & on aura $-y^6 + 2py^4 - ppyy + 4ryy + qq = 0$; & en faisant passer toutes les quantités dans le second membre, afin que y^6 soit positive, on aura $0 = y^6 - 2py^4 + ppyy - 4ryy - qq$.

On a démontré ces operations dans le premier Livre.

On ôtera de la même maniere les fractions de l'equation $\frac{y^5 - py^3 - qyy}{2y} - \frac{y^6 + 2py^4 + 2qy^3 - ppyy - 2pqy - qq}{4yy} - \frac{py^3 + ppy + pq}{2y} = r$, en multipliant les numerateurs $y^5 - py^3 - qyy$, & $-py^3 + ppy + pq$ par $2y$, & r par $4yy$; & après avoir effacé le commun dénominateur $4yy$, & abregé l'équation, on trouvera la même équation $y^6 - 2py^4 + ppyy - 4ryy - qq = 0$.

DEFINITIONS.

DÉFINITIONS.

I.

15. UNE équation *ordonnée* eſt celle où la plus haute puiſſance de l'inconnue eſt la premiere, & les autres puiſſances de la même inconnue ſont de ſuite, ſelon leurs degrez ; ainſi $x^4 - ax^3 + abxx - aacx + c^4 = 0$, eſt une équation ordonnée.

II.

On appelle les *termes* d'une équation, les grandeurs où l'inconnue a différens degrez ; & un ſeul *terme*, les grandeurs où l'inconnue eſt élevée à un même degré. Quand il y a pluſieurs grandeurs dans un même terme, on les écrit toutes les unes ſous les autres. Les grandeurs connues qui multiplient l'inconnue dans les termes, s'appellent les *coëfficients*.

Le premier terme eſt celui où ſe trouve la plus haute puiſſance de l'inconnue ; le ſecond eſt celui où ſe trouve la puiſſance ſuivante de l'inconnue, & ainſi de ſuite juſqu'au dernier terme, qui eſt toujours celui où il n'y a que des grandeurs toutes connues, comme dans cet exemple,

$$\begin{array}{llll} x^3 & - axx & + abx & - abc = 0. \\ & - b & + ac. & \\ & - c & + bc. & \end{array}$$

Le premier terme eſt x^3 ; le ſecond eſt $\overline{-a-b-c} \times xx$; le troiſiéme eſt $\overline{ab+ac+bc} \times x$; le dernier terme eſt $-abc$. $-a-b-c$ ſont le coëfficient du ſecond terme ; $+ab+ac+bc$ ſont le coëfficient du troiſiéme terme : L'unité eſt le coëfficient du premier terme $x^3 = 1 \times x^3$, lorſqu'il ne contient que la plus haute puiſſance de l'inconnue ; pour abreger, on n'écrit ordinairement qu'une ſeule fois l'inconnue dans un terme lorſqu'il renferme pluſieurs grandeurs.

Lorſqu'il y a de l'interruption dans la ſuite des puiſſances de l'inconnue, comme dans $x^3 - abx + abc = 0$, on dit que les termes où ſe trouve l'interruption, manquent dans l'équation, ou ſont évanouis ; ainſi le ſecond terme manque dans $x^3 - abx + abc = 0$, & $-abx$ demeure toujours le troiſiéme terme.

Le troiſiéme terme eſt évanoui dans $x^3 - axx + abc = 0$.

III.

16. On diſtingue les équations en différens degrez. Les

équations ſimples, ou du premier degré, ou lineaires, ſont celles où l'inconnue eſt au premier degré; ainſi $x - a = 0$ eſt du premier degré. Les équations du ſecond degré ſont celles où la plus haute puiſſance de l'inconnue eſt élevée au quarré, $xx - ax + ab = 0$, eſt une équation du ſecond degré.

Les équations du 3e, du 4e, du 5e degré, &c. ſont celles où la plus haute puiſſance de l'inconnue eſt une 3e, ou une 4e, ou une 5e puiſſance, &c.

I V.

La plus haute puiſſance de l'inconnue, & toutes ſes autres puiſſances dans les termes ſuivans, peuvent être les puiſſances exactes du moindre degré de l'inconnue qui eſt dans le penultiéme terme; par exemple, dans l'équation $x^6 - ax^4 + abxx - aabc = 0$, en regardant le moindre degré de l'inconnue dans le penultiéme terme qui eſt xx, comme lineaire, x^6 eſt ſa troiſiéme puiſſance, x^4 eſt ſa ſeconde puiſſance. Dans ce cas le degré de l'équation eſt celui de la plus haute puiſſance du moindre degré xx de l'inconnue; ainſi l'équation $x^6 - ax^4 + abxx - aabc = 0$, n'eſt que du troiſiéme degré, parceque x^6 n'eſt que la troiſiéme puiſſance du moindre degré xx de l'inconnue.

Ainſi $x^{2p} - aax^p + aab^p = 0$, eſt une équation du ſecond degré, parceque x^{2p} eſt le quarré de x^p.

De même $x^{3p} - aax^{2p} + aabx^p - a^3b^p = 0$, eſt du troiſiéme degré, parceque x^{3p} eſt le cube, & x^{2p} le quarré de x^p.

Mais $x^6 - ax^5 + abcxx - a^3bcc = 0$, eſt du ſixiéme degré, parceque les puiſſances exactes du moindre degré xx, ne ſont pas de ſuite.

COROLLAIRE.

LORSQU'IL ne manque aucun terme dans une équation, il y a autant de termes plus un, que l'équation a de degrez; ainſi il y a deux termes dans une équation du premier degré; il y en a trois dans une équation du ſecond degré; quatre dans une équation du troiſiéme degré, &c.

Car tous les degrez de l'inconnue font autant de termes que la plus haute puiſſance de l'inconnue a de degrez, & les grandeurs toutes connues en font une autre qui eſt le dernier terme.

DE'FINITION V.

17. SI tous les termes d'une équation ont chacun le même nombre de dimensions, on dit qu'ils sont *homogenes*; ainsi tous les termes de $x^4 - ax^3 + abxx - a^2cx + a^3d = 0$, sont homogenes, parceque chaque terme est de quatre dimensions: mais les termes de $x^4 - ax^3 + bxx - cx + d = 0$, ne sont pas homogenes; & l'on dit alors que *la loi des homogenes n'est pas observée.*

Cette loi des homogenes doit être observée autant qu'il est possible dans les équations des Problêmes de Geometrie, parcequ'on ne compare pas, par exemple, des grandeurs planes ou de deux dimensions, quand elles expriment des surfaces, avec des grandeurs solides ou de trois dimensions, lorsqu'elles expriment des figures solides.

REMARQUE I.

CEPENDANT lorsque les produits qui font les termes des équations, n'expriment que des lignes dont les raports composez avec l'unité ou avec d'autres lignes, sont exprimez par le produit de plusieurs grandeurs, l'on peut comparer des raports plus composez entre des lignes, avec des raports moins composez, & même simples, entre d'autres lignes; ainsi l'on peut comparer ensemble des grandeurs de differentes dimensions, & où la loi des homogenes n'est pas observée.

On peut aussi dans ce cas conserver toujours, si l'on veut, la loi des homogenes, en concevant les moindres produits multipliez par l'unité autant de fois qu'il le faut, pour les rendre homogenes avec les produits d'un plus grand nombre de dimensions; ainsi on rendra $+ bxx$ homogene avec $- ax^3$ en écrivant $+ 1 \times bxx$. De même on pourra écrire $- 1 \times 1 \times cx$, & $1 \times 1 \times 1 \times d$, pour rendre les termes $- cx + d$, homogenes avec les autres.

On verra dans la Geometrie les moyens de rendre homogenes tous les termes d'une équation, en conservant leur même valeur.

REMARQUE II.

UN des grands avantages de l'Analyse est de ne pas partager inutilement l'esprit; c'est pourquoi elle réduit les

Problêmes les plus composez à des expressions si simples, que toute l'attention de l'esprit n'est qu'aux grandeurs inconnues qu'il cherche : ainsi pour empêcher que les grandeurs connues sur lesquelles il ne reste plus rien à découvrir, ne partagent l'attention, on exprime par une seule lettre toutes les grandeurs connues d'un même terme.

Par exemple, on abregera l'équation

$$\begin{array}{llll} x^3 - axx & + abx & - abc = 0. \\ - b & + ac. & \\ - c & + bc. & \end{array}$$

En supposant toutes les grandeurs connues $-a-b-c$ du second terme égales à une seule lettre $-n$; en supposant toutes les grandeurs connues $+ab+ac+bc$ du troisiéme terme égales à une seule lettre $+p$; & toutes les connues $-abc$ du quatriéme terme à une seule lettre $-q$, l'on aura $x^3 - nxx + px - q = 0$, au lieu de l'équation proposée.

L'on voit bien que la loi des homogenes n'est pas moins observée dans cette expression simple, que dans l'expression composée, parceque la lettre p, par exemple, est dans le troisiéme terme à la place d'une grandeur connue de deux dimensions, & q dans le quatriéme à la place d'une grandeur connue de trois dimensions.

DEFINITION VI.

UNE équation ainsi abregée s'appelle une *formule*, c'est-à-dire une expression generale & abregée de toutes les équations du même degré, qui auroient le même nombre de termes, & la même diversité dans leurs signes.

COROLLAIRE I.

18. TOUTE la diversité des équations d'un même degré ne pouvant venir que de ces deux choses : 1. de ce qu'il manque quelques termes dans les unes qui ne manquent pas dans les autres; 2. de la diversité des signes + & — qui précedent les termes, on peut réduire toutes les équations d'un même degré à un nombre déterminé de formules.

Par exemple, en supposant que le premier terme a toujours le signe +, toutes les équations du second degré se peuvent réduire aux suivantes.

$xx - p = 0$. $xx + p = 0$. $xx - nx + p = 0$. $xx + nx + p = 0$. $xx - nx - p = 0$, $xx + nx - p = 0$.

Dans ces équations n marque la quantité connue du ſecond terme, & p la quantité connue du troiſiéme.

L'avantage de ces formules eſt que leur réſolution donnera la réſolution de toutes les équations particulieres du ſecond degré, en mettant dans la réſolution à la place de n & de p, les grandeurs connues du ſecond & du troiſiéme terme des équations particulieres.

On peut de même réduire les équations du troiſiéme degré, du quatriéme, &c. à un nombre déterminé de formules.

COROLLAIRE II.

ON peut même réduire toutes les équations d'un même degré à une ſeule formule, pour abreger tous les cas ; par exemple, la ſeule formule $xx \pm nx \pm p = 0$, peut repréſenter toutes les équations du ſecond degré, $x^3 \pm nxx \pm px \pm q = 0$ peut repréſenter toutes les équations du troiſiéme degré, & $x^4 \pm nx^3 \pm pxx \pm qx \pm r = 0$, toutes celles du quatriéme degré, & ainſi des autres ; & cela, en ſuppoſant deux choſes, 1°. que quelques termes de la formule ſont nuls ou égaux à zero, lorſqu'elle repréſente les équations où il manque des termes ; 2°. Que quand quelques termes des équations ont +, & les autres —, il faut donner aux termes de la formule qui leur répondent, les mêmes ſignes.

Par exemple, afin que la formule $x^3 \pm nxx \pm px \pm q = 0$ repréſente l'équation $x^3 - abx + abc = 0$, il faut, 1°. ſuppoſer dans la formule, le ſecond terme $\pm nxx = 0$. 2°. Il faut ſuppoſer que px dans la formule a le ſigne —, & q le ſigne + : il en eſt de même des autres.

Enfin on peut ſe ſervir d'une ſeule formule pour chaque degré où tous les termes ayent le ſigne + ; par exemple $xx + nx + p = 0$, ſera la formule generale du ſecond degré ; $x^3 + nxx + px + q = 0$, celle du troiſiéme, & ainſi des autres : En ſuppoſant ces deux choſes, 1°. que lorſqu'elle repréſente des équations où il manque des termes, ces mêmes termes ſont nuls ou égaux à zero dans la formule. 2°. Que le ſigne + de chaque terme de la formule repréſente le ſigne + ou — du même terme de chaque équation particuliere du même degré, ſelon qu'il ſe trouve dans chaque équation.

Ainſi $x^3+nxx+px+q=0$, repréſente l'équation particuliere $x^3-abx-abc=0$, en ſuppoſant, 1°. le ſecond terme de la formule $+nxx=0$, & 2°. que les ſignes + devant $+px+q$, repréſentent les ſignes — qui ſont devant $-abx-abc$.

Et dans la formule que donnera la réſolution de $x^3+nxx+px+q=0$, on ſuppoſera les grandeurs où ſera n, égales à zero, & on donnera aux grandeurs où ſeront p & q, des ſignes oppoſez; mais on laiſſera les ſignes + devant les puiſſances paires de p & de q, & on les changera devant leurs puiſſances impaires.

Après cela il ne faudra plus que ſubſtituer dans la formule de la réſolution de $x^3+nxx+px+q=0$, les grandeurs de l'équation particuliere, à la place de n, p, q, qui les repréſentent dans la formule generale.

Cette maniere abrege les cas, & rend les réſolutions generales, comme on le verra dans le cinquiéme Livre, où l'on expliquera la réſolution particuliere des équations de chaque degré.

SECTION III.

Où l'on explique la maniere d'ôter les incommenſurables des équations des Problêmes compoſez, lorſqu'elles en ont.

AVERTISSEMENT.

LORSQUE l'inconnue de l'équation eſt incommenſurable, c'eſt-à-dire lorſqu'elle eſt ſous le ſigne radical, il eſt neceſſaire de la rendre commenſurable pour connoître de quel degré eſt l'équation; lorſqu'il n'y a d'incommenſurables que les grandeurs connues de l'équation, & que l'inconnue ne l'eſt pas, on connoît alors de quel degré eſt l'équation, ſans ôter les incommenſurables, & l'on pourroit réſoudre l'équation ſans les ôter; néanmoins comme il eſt ordinairement plus facile de réſoudre l'équation, lorſqu'il n'y a point d'incommenſurables, les methodes qui ſuivent peuvent ſervir à les ôter toutes.

PROBLÊME III.

19. *OSTER les incommenſurables d'une équation lorſqu'il y en a.*

Premiere maniere.

1°. IL faut mettre une des grandeurs incommenſurables ſeule dans le premier membre, & toutes les autres quantitez dans le ſecond, & élever chaque membre à la puiſſance marquée par l'expoſant du ſigne radical du premier membre, & la grandeur du premier membre deviendra commenſurable. S'il reſte des incommenſurables dans le ſecond membre, 2°. il faut en mettre une ſeule dans le premier membre, & toutes les autres quantitez dans le ſecond, & faire ſur cette équation l'operation précedente, qui ôtera une ſeconde incommenſurable. En continuant cette operation, on ôtera toutes les incommenſurables.

Lorſqu'il y a pluſieurs incommenſurables de différens degrez, on mettra une lettre ſeule pour chaque incommenſurable; ce qui abregera le calcul, comme on le verra dans les exemples.

On abregera encore le calcul, en mettant après chaque operation une lettre à la place de toutes les grandeurs devenues commenſurables, & dans la derniere operation on reſtituera les valeurs des lettres qu'on a miſes pour débaraſſer le calcul.

EXEMPLES.

I.

POUR ôter les incommenſurables de $\sqrt{xx} = \sqrt{ax + bb}$, on élevera chaque membre au quarré, & l'on aura $xx = ax + bb$, où il n'y a plus d'incommenſurables.

II.

Pour ôter les incommenſurables de $x + \sqrt[3]{aax} = b$, on fera 1°. $\sqrt[3]{aax} = b - x$. 2°. On élevera chaque membre à la troiſiéme puiſſance, parceque l'expoſant de $\sqrt[3]{\ }$ eſt 3, & l'on aura $aax = b^3 - 3bbx + 3bxx - x^3$, où il n'y a plus d'incommenſurables.

III.

Pour ôter les incommenſurables de $\sqrt[3]{aax + \sqrt{a^3x^3}} = x - c$, 1°. il faut élever chaque membre à la troiſiéme puiſſance & l'on aura $aax + \sqrt{a^3x^3} = x^3 - 3cxx + 3ccx - c^3$.

2°. Après avoir mis $\sqrt{a^3x^3}$ ſeule dans le premier membre, $\sqrt{a^3x^3} = x^3 - 3cxx + 3ccx - c^3 - aax$, il faut élever chaque membre au quarré, & l'on aura $a^3x^3 = x^6 - 6cx^5$, &c. où il n'y a plus d'incommenſurables.

I V.

Pour ôter les incommenſurables de $x + \sqrt[3]{aax} = \sqrt{ax}$, on ſuppoſera $n = \sqrt[3]{aax}$, ce qui donne $n^3 = aax$, & $m = \sqrt{ax}$, ce qui donne $mm = ax$, & l'on aura $x + n = m$, au lieu de $x + \sqrt[3]{aax} = \sqrt{ax}$.

Enſuite on fera par tranſpoſition $n = m - x$, & on élevera chaque membre à la troiſiéme puiſſance marquée par l'expoſant $\sqrt[3]{}$ du ſigne radical de $\sqrt[3]{aax} = n$, & l'on aura $n^3 = m^3 - 3mmx + 3mxx - x^3$, & par tranſpoſition $n^3 + 3mmx + x^3 = m^3 + 3mxx$, où $n^3 + 3mmx$, & $+ x^3$ ſont commenſurables.

Pour débaraſſer le calcul, on ſuppoſera les grandeurs commenſurables $n^3 + 3mmx + x^3 = f^3$, afin de n'avoir attention qu'aux ſeules incommenſurables $m^3 + 3mxx$, & l'on aura $m^3 + 3mxx = f^3$. On élevera chaque membre au quarré, parceque l'expoſant de l'incommenſurable $m = \sqrt{ax}$ eſt 2, & l'on aura $m^6 + 6m^4xx + 9mmx^4 = f^6$, où il n'y a plus d'incommenſurables. Enfin on ſubſtituera à la place de f, m, n, leurs valeurs, & l'on aura $a^4xx + 6a^3x^3 + 9aax^4 + 2aax^4 + 6ax^5 + x^6 = a^3x^3 + 6aax^4 + 9ax^5$; & en l'abregeant on aura $x^6 - 3ax^5 + 5aax^4 + 5a^3x^3 + a^4xx = 0$, ou bien $x^4 - 3ax^3 + 5aaxx + 5a^3x + a^4 = 0$, où il n'y a plus d'incommenſurables.

Seconde maniere, lorſque l'équation contient pluſieurs incommenſurables.

1°. IL faut ſuppoſer une lettre égale à chaque grandeur incommenſurable, ce qui donnera autant d'équations qu'il y a d'incommenſurables. Il faut en ôter les incommenſurables par la premiere maniere, & l'on aura de nouvelles équations où les puiſſances des lettres ſuppoſées ſeront égales à des grandeurs commenſurables; on les appellera les équations commenſurables.

2°. Il faut mettre les mêmes lettres dans l'équation propoſée; & après avoir mis dans le premier membre la ſeule lettre, qu'on a ſuppoſée égale à l'incommenſurable, dont l'expoſant eſt le plus grand, on élevera chaque membre de cette équation à la puiſſance de cet expoſant.

Enfin

Enfin on ſubſtituera les valeurs commenſurables des lettres ſuppoſées à leur place dans l'équation précedente, & ces valeurs ſeront priſes dans les équations commenſurables ; & en continuant les ſubſtitutions, on arrivera enfin à une équation où les lettres ſuppoſées ne ſeront plus, & qui n'aura plus d'incommenſurables.

Par exemple, pour ôter les incommenſurables de $x + \sqrt[3]{aax} = \sqrt{ax}$: 1°, je ſuppoſe $n = \sqrt[3]{aax}$, & $m = \sqrt{ax}$; & ôtant les incommenſurables, je trouve $n^3 = aax$, & $mm = ax$, ce ſont les équations commenſurables.

2°. Je mets n & m dans l'équation propoſée $x + \sqrt[3]{aax} = \sqrt{ax}$, à la place des incommenſurables, & je trouve $x + n = m$.

Je fais par tranſpoſition $n = m - x$, & j'éleve chaque membre à la troiſiéme puiſſance, parceque l'expoſant de $\sqrt[3]{aax} = n$, qui eſt le plus grand, eſt 3, & je trouve $n^3 = m^3 - 3mmx + 3mxx - x^3$.

3°. Je ſubſtitue dans cette équation les valeurs commenſurables de n^3 & de mm, priſes dans les équations commenſurables, & je trouve $aax = m^3 - 3axx + 3mxx - x^3$.

Pour ſubſtituer la valeur de m^3 dans cette équation, je multiplie chaque membre de $mm = ax$ par m, & j'ai $m^3 = amx$; & je ſubſtitue amx à la place de m^3 dans $aax = m^3 + 3mxx - 3axx - x^3$, & je trouve $aax = amx + 3mxx - 3axx - x^3$, ou bien $aa = am + 3mx - 3ax - xx$; je mets par tranſpoſition les quantitez où eſt m dans le premier membre, & les autres dans le ſecond, & j'ai $am + 3mx = 3ax + aa + xx$; diviſant le tout par $a + 3x$, je trouve $m = \frac{3ax + aa + xx}{a + 3x}$.

Pour ſubſtituer la valeur commenſurable de m dans cette équation, j'éleve chaque membre à la ſeconde puiſſance, parceque l'expoſant de $\sqrt{ax} = m$ eſt 2, & je trouve $mm = \frac{9aaxx + 6a^3x + a^4 + 6ax^3 + 2aaxx + x^4}{aa + 6ax + 9xx}$.

Je ſubſtitue dans cette équation la valeur de mm priſe dans l'équation $mm = ax$, & je trouve

$$ax = \frac{9aaxx + 6a^3x + a^4 + 6ax^3 + 2aaxx + x^4}{aa + 6ax + 9xx}.$$

En réduiſant chaque membre au même dénominateur, que j'efface enſuite, & en abregeant & ordonnant l'équation, je trouve $x^4 - 3ax^3 + 5aaxx + 5a^3x + a^4 = 0$, où il n'y a plus d'incommenſurables. Ce qui étoit propoſé.

DÉMONSTRATION.

IL est évident que par les operations de ces deux méthodes du Problême, on ôte les incommensurables les unes après les autres, & que l'égalité se conserve toujours.

SECTION IV.

Où l'on explique la maniere de trouver le plus grand diviseur commun de deux ou de plusieurs équations composées qui ont la même inconnue.

AVERTISSEMENT.

IL est très-utile pour la résolution des équations composées, de pouvoir trouver le plus grand diviseur commun de celles qui ont la même inconnue ; & cela sert aussi quand on a plus de raports d'un Problême que d'inconnues, à former l'équation la plus simple qui en donne la résolution.

PROBLÊME IV.

20. *TROUVER le plus grand diviseur commun des deux équations qui ont la même inconnue.*

1°. SI toutes les quantitez de chaque équation étoient multipliées par une grandeur commune, on les diviseroit toutes par cette grandeur commune, & il faudroit ensuite chercher le plus grand diviseur commun des deux quotiens ; & après l'avoir trouvé, le multiplier par cette grandeur commune, & le produit seroit le plus grand diviseur commun qu'on cherchoit.

2°. Si toutes les quantitez d'une seule des deux équations, & sur-tout de celle qui servira de diviseur, étoient multipliées par une même grandeur, il faudroit les diviser par cette grandeur, qui ne doit point entrer dans le commun diviseur, & operer ensuite avec le quotient. Ces choses supposées.

Premiere maniere.

1. APRE'S avoir nommé la premiere équation celle du degré plus élevé, & l'autre la seconde, (si elles sont du même degré,

on nommera laquelle on voudra la premiere, & l'autre la ſeconde,) il faut diviſer la premiere par la ſeconde ; & ſi la diviſion ſe fait juſte, la ſeconde eſt le plus grand diviſeur commun.

Si la diviſion ne peut ſe faire exactement, lorſqu'on ſera arrivé à un reſte où l'inconnue a moins de degrez que dans la ſeconde équation, ſans avoir égard au quotient, on diviſera la ſeconde par le reſte, qu'on nommera premier reſte.

Si la diviſion ſe fait exactement, le premier reſte eſt le plus grand diviſeur commun.

Mais ſi elle n'eſt pas exacte, & qu'elle donne un reſte, on diviſera le premier reſte par ce ſecond reſte ; & ſi cette diviſion donne un troiſiéme reſte, on diviſera le ſecond reſte par le troiſiéme, & on continuera juſqu'à ce qu'on ait trouvé un reſte qui ſoit un diviſeur exacte du précedent, & ce reſte ſera le plus grand diviſeur commun.

2. Quand en faiſant les diviſions de cette methode, on trouve une fraction pour quotient, il faut dans ce cas multiplier la grandeur à diviſer par la grandeur connue, qui eſt le coëficient du premier terme du diviſeur, ou par le dénominateur de la fraction trouvée pour quotient ; & la grandeur à diviſer étant ainſi préparée, la diviſion donnera pour quotient une grandeur entiere.

EXEMPLE I.

POUR trouver le plus grand diviſeur commun des deux équations $x^{12} - 13x^{10} + 65x^8 - 157x^6 + 189x^4 - 105xx + 21 = 0$. $x^{10} - 12x^8 + 54x^6 - 112x^4 + 105xx - 35 = 0$.

Je remarque qu'il n'y a aucune grandeur commune qui multiplie toutes les quantitez de chacune de ces deux équations, ni aucune grandeur commune qui multiplie tous les termes de la ſeconde ; ainſi j'opere immédiatement ſur ces deux équations.

Je diviſe la premiere par la ſeconde, & je trouve le quotient $xx - 1$, que je néglige, & le reſte $-x^8 + 9x^6 - 28x^4 + 35xx - 14$, qui ne peut plus être diviſé par la ſeconde équation, puiſque $-x^8$ eſt moindre que x^{10}.

Je diviſe la ſeconde équation $x^{10} - 12x^8 + 54x^6 - 112x^4 + 105xx - 35 = 0$, par ce premier reſte $-x^8 + 9x^6 - 28x^4 + 35xx - 14$, & je trouve le quotient $-xx + 3$, que je néglige, & le reſte $-x^6 + 7x^4 - 14xx + 7$.

Je divise le premier reste $-x^8 + 9x^6 - 28x^4 + 35xx - 14$, par ce second reste $-x^6 + 7x^4 - 14xx + 7$, & la division se fait exactement : ainsi $-x^6 + 7x^4 - 14xx + 7 = 0$, ou bien en rendant la plus haute puissance $-x^6$ positive, $x^6 - 7x^4 + 14xx - 7 = 0$, est le plus grand diviseur commun des deux équations proposées.

EXEMPLE II.

POUR trouver le plus grand diviseur commun des deux équations $3x^3 - 12xx + 15x - 6 = 0$. $-12xx + 30x - 18 = 0$; 1°. Je remarque que tous les termes des deux équations sont multipliez par 3, ou peuvent être divisez par 3; je les divise par 3, & je trouve les deux quotiens $x^3 - 4xx + 5x - 2 = 0$, & $-4xx + 10x - 6 = 0$.

Il faut à présent chercher le plus grand diviseur commun de ces deux quotiens, & quand on l'aura trouvé, le multiplier par 3, & le produit sera le plus grand diviseur commun des deux équations proposées.

2°. Je remarque que tous les termes de la seconde équation $-4xx + 10x - 6 = 0$, qui doit servir de diviseur, peuvent être divisez par 2; je les divise donc par 2, & je trouve l'équation $-2xx + 5x - 3 = 0$, qui est celle qui doit servir de diviseur.

Mais il faut remarquer que quand on aura trouvé le plus grand diviseur commun, il ne faudra pas le multiplier par 2, parceque 2 n'est pas un diviseur commun des deux équations $x^3 - 4xx + 5x - 2 = 0$, $-4xx + 10x - 6 = 0$.

Pour trouver maintenant le plus grand diviseur commun de $x^3 - 4xx + 5x - 2 = 0$, & de $-2xx + 5x - 3 = 0$, je divise la premiere par la seconde, & je trouve pour quotient la fraction $\frac{x}{-2}$; cela me fait voir qu'il faut préparer la grandeur à diviser $x^3 - 4xx + 5x - 2$, en la multipliant par le dénominateur de la fraction $\frac{x}{-2}$, qui est -2, & j'aurai le produit $-2x^3 + 8xx - 10x + 4$, qu'il faut diviser par la seconde grandeur $-2xx + 5x - 3$.

En faisant la division, je trouve d'abord le quotient x, & le reste $+3xx - 7x + 4$, qu'il faut continuer de diviser par $-2xx + 5x - 3$, parceque la plus haute puissance de l'inconnue x, n'est pas dans le reste $+3xx - 7x + 4$, moindre que la plus haute puissance de la même x dans le diviseur $-2xx + 5x - 3$.

Mais en continuant de diviſer $+3xx-7x+4$, par $-2xx+5x-3$, je trouve pour quotient la fraction $\frac{3}{-2}$; cela fait voir qu'il faut préparer la grandeur à diviſer $+3xx-7x+4$, en la multipliant par le dénominateur -2; cela me donne la grandeur à diviſer $-6xx+14x-8$; je la diviſe par le diviſeur $-2xx+5x-3$, & je trouve le quotient 3, & le reſte $-x+1=0$.

Je diviſe maintenant $-2xx+5x-3=0$, qui a ſervi juſqu'ici de diviſeur, par ce reſte $-x+1=0$, & je trouve que la diviſion ſe fait exactement.

Ainſi $-x+1=0$, ou $+x-1=0$, eſt le plus grand commun diviſeur de $x^3-4xx+5x-2=0$, & de $-4xx+10x-6=0$.

Et en multipliant $-x+1=0$, ou $+x-1=0$ par 3, je trouve $-3x+3=0$, ou $+3x-3=0$, pour le plus grand diviſeur commun des deux équations propoſées $3x^3-12xx+15x-6=0$, $-12xx+30x-18=0$. Ce qui étoit propoſé.

AVERTISSEMENT.

On a mis dans cet exemple qui n'eſt pas fort compoſé, toutes les difficultez qu'on peut trouver dans la recherche du plus grand diviſeur commun; c'eſt pourquoi ceux qui commencent, doivent ſe le rendre très-familier.

EXEMPLE III.

Pour trouver le plus grand diviſeur commun de ces deux équations $x^4-4ax^3+11aaxx-20a^3x+12a^4=0$,
$x^4-3ax^3+12aaxx-16a^3x+24a^4=0$,
je diviſe la premiere par la ſeconde, & je trouve le quotient 1, que je néglige, & le reſte $-ax^3-aaxx-4a^3x-12a^4$, qui étant diviſé par $-a$, donne $x^3+axx+4aax+12a^3$ pour le premier reſte.

Je diviſe la ſeconde équation $x^4-3ax^3+12aaxx-16a^3x+24a^4=0$, par $x^3+axx+4aax+12a^3$.

Je trouve le quotient $x-4a$, que je néglige, & le reſte $+12aaxx-12a^3x+72a^4$, que je diviſe par $12aa$, & je trouve pour le ſecond reſte $xx-ax+6aa$.

Je diviſe le premier reſte $x^3+axx+4aax+12a^3$, par le ſecond reſte $xx-ax+6aa$, & la diviſion eſt exacte.

Ainsi $xx - ax + 6aa = 0$, est le plus grand diviseur commun des deux équations proposées.

EXEMPLE IV.

POUR trouver le plus grand diviseur commun des deux équations

$$\begin{array}{llll} x^3 & -2axx & +aax & -aab = 0, \\ & -bxx & +2abx. & \end{array}$$

&

$$\begin{array}{lll} -2axx & +2aax & -3aab = 0. \\ -bxx & +4abx. & \end{array}$$

je divise la premiere par la seconde; & en divisant le premier terme x^3 par le premier terme $-2axx - bxx$ du diviseur, je trouve la fraction $\frac{x}{-2a-b}$. Cela me fait voir qu'il faut préparer la premiere équation, qui est la grandeur à diviser, en la multipliant par le dénominateur $-2a-b$; & je trouve pour produit la premiere équation préparée.

$$\begin{array}{llll} -2ax^3 & +4aaxx & -2a^3x & +2a^3b = 0. \\ -bx^3 & +4abxx & -5aabx & +aabb \\ & +bbxx & -2abbx. & \end{array}$$

Je la divise par la seconde équation

$$\begin{array}{lll} -2axx & +2aax & -3aab = 0. \\ -bxx & +4abx, & \end{array}$$

& je trouve le quotient x, que je néglige, & le reste

$$\begin{array}{lll} +2aaxx & -2a^3x & +2a^3b \\ +bbxx & -2aabx & +aabb \\ & -2abbx. & \end{array}$$

qu'il faut continuer de diviser par le même diviseur

$$\begin{array}{lll} -2axx & +2aax & -3aab = 0. \\ -bxx & +4abx, & \end{array}$$

parceque la plus haute puissance xx de l'inconnue n'est pas moindre dans le reste, que dans le diviseur.

Mais en faisant la division de ce reste par le diviseur, je trouve la fraction $\frac{2aa+bb}{-2a-b}$; ce qui me fait voir qu'il faut préparer le reste $+2aaxx - 2a^3x$, &c.

$$+bbxx,$$

en le multipliant par le dénominateur $-2a-b$, & je trouve le reste préparé

$$\begin{array}{lll} -4a^3xx & +4a^4x & -4a^4b \\ -2aabxx & +6a^3bx & -4a^3bb \\ -2abbxx & +6aabbx & -aab^3 \\ -b^3xx & +2ab^3x. & \end{array}$$

Je continue de le diviſer par le même diviſeur

$$\begin{aligned}&-2axx+2aax-3aab=0.\\&-bxx\ +4abx,\end{aligned}$$

& je trouve le quotient $2aa+bb$, que je néglige, & le reſte

$$\begin{aligned}&-2a^3bx\ \ +2a^4b\\&+4aabbx-4a^3bb\\&-2ab^3x\ \ +2aab^4,\end{aligned}$$

dont chaque terme peut être exactement diviſé par $-2a^3b$ $+4aabb-2ab^3$.

Ainſi je diviſe ce reſte par $-2a^3b+4aabb-2ab^3$, & je trouve pour quotient $x-a$, que je prens pour le dernier reſte.

Je diviſe maintenant la ſeconde équation qui a ſervi de diviſeur juſqu'ici, par le reſte $x-a$, & la diviſion eſt exacte.

Par conſéquent $x-a=0$, eſt le plus grand diviſeur commun des deux équations propoſées.

Préparation pour la démonſtration.

LA démonſtration n'eſt pas différente de celle qu'on a coutume de donner dans l'Arithmetique & l'Algebre, pour la méthode de trouver le plus grand diviſeur commun de deux grandeurs incomplexes, & elle eſt fondée ſur ces axiomes.

AXIOME I.

UN diviſeur exact d'une grandeur, eſt auſſi un diviſeur exact d'un multiple de cette grandeur ; par exemple, un diviſeur exact d'une grandeur A, eſt un diviſeur exact de $3A$, ou en general de mA.

AXIOME II.

UN diviſeur exact d'une grandeur entiere A, qui a deux parties B & C, & de l'une de ces deux parties comme de B, l'eſt auſſi de la ſeconde partie C.

AXIOME III.

LE plus grand diviſeur commun de deux grandeurs A & B, contient les autres communs diviſeurs moindres des mêmes grandeurs, & il eſt un multiple de chacun de ces diviſeurs moindres. Ces choſes ſuppoſées.

Premiere.	*Seconde.*
A.	B.
A = mB + C.	
B = nC + D.	
C = pD.	

Soit nommée *A* la premiere équation, & *B* la seconde, on suppose que *A* étant divisée par *B*, on trouve le quotient *m*, & le reste *C*; ainsi $A = mB + C$.

En divisant la seconde équation *B* par le premier reste *C*, qu'on trouve le quotient *n*, & le reste *D*; ainsi $B = nC + D$.

Enfin, qu'en divisant le premier reste *C* par le second *D*, la division soit exacte, & qu'on trouve le quotient *p*, ainsi $C = pD$.

Il faut démontrer que *D* est le plus grand diviseur commun de *A* & de *B*.

DE'MONSTRATION.

1. IL est évident que *D* est diviseur commun de *A* & de *B*, car par la supposition il l'est de *C*; donc il l'est de $nC + D = B$ par le 1er axiome; donc *D* est diviseur de $mB + C = A$ par le 1er axiome. 2°. *D* est aussi le plus grand diviseur commun de *A* & de *B*; car leur plus grand diviseur commun doit être diviseur de *mB* multiple de *B*; & étant aussi diviseur de la grandeur entiere $mB + C = A$, il est diviseur de la 2e partie *C* par le 2e axiome; donc le plus grand diviseur commun de *A* & de *B*, est diviseur de *nC* multiple de *C* par le 1er axiome; & étant aussi diviseur de la grandeur entiere $nC + D = B$, il est diviseur de *D* par le 2e axiome : Mais *D* est diviseur commun de *A* & de *B* par la premiere partie de cette démonstration; ainsi le plus grand diviseur commun de *A* & de *B*, étant aussi diviseur de *D*, il faut que *D* soit lui même ce plus grand commun diviseur : autrement *D* seroit un diviseur commun de *A* & de *B*, qui surpasseroit le plus grand; ce qui seroit contre la supposition.

Démonstration pour le cas où il faut préparer la grandeur à diviser.

SI en divisant la premiere grandeur *A* par la seconde *B*, on trouve une fraction dont le dénominateur soit *f*, il faut préparer *A* en la multipliant par *f*; on suppose qu'en divisant ensuite *fA* par *B*, on trouve le quotient *m* & le reste *C*, ainsi $fA = mB + C$.

Divisant

Premiere.	Seconde.
A.	B.
$fA = mB + C.$	
$gB = nC + D.$	
$C = pD.$	

Divisant ensuite B par le reste C, si l'on trouve une fraction dont le dénominateur est g, il faut préparer B en la multipliant par g, & l'on aura gB; on suppose qu'en divisant gB par le premier reste C, on trouve le quotient n, & le reste D; ainsi $gB = nC + D$.

Enfin on suppose qu'en divisant le premier reste C, par le second D, la division est exacte, & que $C = pD$. Cela supposé.

Il est évident que le plus grand diviseur commun de A & de B, est diviseur de fA par le premier axiome, & par conséquent de $mB + C = fA$. Il est de même évident que le plus grand diviseur commun de A & de B, est diviseur de mB & de gB, multiples de B; il est par conséquent diviseur de C, seconde partie de $mB + C$, par le 2[e] axiome, & de $nC + D = gB$; il l'est aussi de nC multiple de C; par conséquent étant diviseur de $nC + D$, & de la premiere partie nC, il l'est aussi de l'autre partie. D.

Ainsi D étant diviseur exact de C, il est le plus grand commun diviseur de A & de B, ou du moins il le contient, & il en est le multiple.

Mais quand les plus hautes puissances de l'inconnue x ne sont point multipliées par d'autres grandeurs connues dans A & dans B, la puissance la plus élevée de x dans le plus grand diviseur commun, doit être seule; c'est pourquoi en divisant le dernier reste D, diviseur exact du précedent, par le coëficient de la plus haute puissance de son inconnue x, le quotient doit être le plus grand diviseur commun de A & de B.

Seconde maniere de trouver le plus grand diviseur commun.

21. ON nommera la premiere équation A, pour rendre la chose plus claire, & la seconde B.

Il faut prendre la valeur de la plus haute puissance de l'inconnue x, qui est le premier terme de B, & substituer cette valeur au lieu de x dans A, (observant d'élever auparavant B au degré de A, en multipliant l'équation B par x, ou xx, &c. si le premier terme de B étoit moindre que le premier terme de A.)

Il faut continuer cette ſubſtitution juſqu'à ce qu'on ait réduit A à un moindre degré que B, & on appellera C l'équation où l'on aura réduit A par ces ſubſtitutions.

Il faut enſuite prendre la valeur du premier terme de C, & la ſubſtituer dans B, & continuer la ſubſtitution juſqu'à ce qu'on ait réduit B à une équation D d'un moindre degré que C.

L'on prendra enſuite la valeur du premier terme de D, qu'on ſubſtituera dans C, & l'on continuera ces operations juſqu'à ce qu'on trouve une équation E, d'où la valeur du premier terme étant ſubſtituée dans la précedente D, tous les termes ſe détruiſent par des ſignes contraires.

L'équation E ſera le plus grand diviſeur commun de A & de B.

Lorſqu'il arrive que les premiers termes des équations A & B, ou B & C, ou C & D, &c. ont des coëficients, il faut préparer les deux équations en multipliant A par le coëficient du premier terme de B; & B par celui du premier terme de A, & faire la même choſe pour B & C, &c. comme on le verra dans les exemples.

Premier exemple qui eſt le troiſiéme qui précede.

POUR trouver le plus grand diviſeur commun des deux équations $A.\ x^4 - 4ax^3 + 11aaxx - 20a^3x + 12a^4 = 0.$

$B.\ x^4 - 3ax^3 + 12aaxx - 16a^3x + 24a^4 = 0,$

je prens la valeur de x^4 dans la ſeconde, & je trouve $x^4 = 3ax^3 - 12aaxx + 16a^3x - 24a^4$.

Je ſubſtitue cette valeur de x^4 dans la premiere équation; & après la ſubſtitution je trouve au lieu de la premiere équation, celle-ci $-ax^3 - aaxx - 4a^3x - 12a^4 = 0$, dont tous les termes peuvent ſe diviſer par $-a$; & après la diviſion, je trouve $C.\ x^3 + axx + 4aax + 12a^3 = 0$.

Cette équation C étant d'un moindre degré que la ſeconde B, je la multiplie par x, & j'ai l'équation $x^4 + ax^3 + 4aaxx + 12a^3x = 0$.

Je prens dans cette équation la valeur de x^4, qui eſt $x^4 = -ax^3 - 4aaxx - 12a^3x$, & je la ſubſtitue dans B, & après la ſubſtitution, je trouve l'équation $-4ax^3 + 8aaxx - 28a^3x + 24a^4 = 0$.

Comme elle n'eſt pas d'un degré inferieur à celui de l'équation C, il faut prendre dans l'équation C la valeur de x^3 pour la ſubſtituer dans l'équation précedente.

Mais le premier terme de la précedente, qui eſt $-4ax^3$ ayant $-4a$ pour coëfficient, il faut préparer l'équation C en la multipliant par $-4a$, & je trouve $-4ax^3-4aaxx-16a^3x-48a^4=0$.

Je prens dans cette équation préparée la valeur de $-4ax^3$ qui eſt $-4ax^3=4aaxx+16a^3x+48a^4$.

Je la ſubſtitue dans l'équation $-4ax^3+8aaxx-28a^3x+24a^4=0$, & je trouve après la ſubſtitution l'équation $12aaxx-12a^3x+72a^4=0$, dont tous les termes peuvent ſe diviſer par $12aa$; & après avoir fait la diviſion, je trouve l'équation D. $xx-ax+6aa=0$.

J'éleve cette équation D au troiſiéme degré en la multipliant par x, afin de pouvoir ſubſtituer la valeur de x^3 dans l'équation C, & je trouve $x^3-axx+6aax=0$.

Je prens la valeur de x^3 dans cette équation, qui eſt $x^3=+axx-6aax$, & je la ſubſtitue dans l'équation C, ce qui me donne $2axx-2aax+12a^3=0$.

Je ſubſtitue encore la valeur de xx priſe de l'équation D, dans $2axx-2aax+12a^3=0$, mais auparavant je multiplie l'équation D par le coëfficient $2a$; & ayant trouvé $2axx=2aax-12a^3$, je ſubſtitue la valeur de $2axx$ dans $2axx-2aax+12a^3=0$, & je trouve $-2aax+12a^3=0$.

$$+2aax-12a^3,$$

où toutes les quantitez ſe détruiſent par des ſignes contraires; ainſi l'équation D. $xx-ax+6aa=0$, eſt le plus grand diviſeur commun des deux propoſées.

Second exemple qui eſt le quatriéme qui précede.

ON mettra les operations de la premiere & de la ſeconde maniere ſur cet exemple, à côté les unes des autres, afin qu'on voye que ces deux méthodes de trouver le plus grand diviſeur commun, reviennent à une même méthode; ainſi la premiere étant démontrée, la ſeconde l'eſt auſſi.

EXEMPLE II.

Premiere maniere de trouver le plus grand diviſeur commun.

Premiere équation.

$$x^3 - 2axx + aax - aab = 0.$$
$$- bxx + 2abx.$$
$$x - \overline{2a - b}.$$

Seconde équation.

$$- 2axx + 2aax - 3aab = 0.$$
$$- bxx + 4abx.$$

Premiere équation préparée.

$$- 2ax^3 + 4aaxx - 2a^3x + 2a^3b = 0.$$
$$- bx^3 + 4abxx - 5aabx + aabb$$
$$+ bbxx - 2abbx.$$

$$+ 2ax^3 - 2aaxx + 3aabx$$
$$+ bx^3 - 4abxx.$$

Reſte qu'il faut continuer de diviſer par le même diviſeur.

$$+ 2aaxx - 2a^3x + 2a^3b = 0.$$
$$+ bbxx - 2aabx + aabb$$
$$- 2abbx.$$
$$x - \overline{2a - b}.$$

Seconde équation qui ſert de diviſeur.

$$- 2axx + 2aax - 3aab = 0.$$
$$- bxx + 4abx.$$

x quotient.

Reſte préparé.

$$- 4a^3xx + 4a^4x - 4a^4b = 0.$$
$$- 2aabxx + 6a^3bx - 4a^3bb$$
$$- 2abbxx + 6aabbx - aab^3$$
$$- b^3xx + 2ab^3x$$

$$+ 4a^3xx - 4a^4x + 6a^4b$$
$$+ 2aabxx - 8a^3bx + 3aab^3$$
$$+ 2abbxx - 2aabbx$$
$$+ b^3xx - 4ab^3.$$

Reſte.

$$- 2a^3bx + 2a^4b = 0.$$
$$+ 4aabbx - 4a^3bb$$
$$- 2ab^3x + 2aab^3.$$

Seconde équation qui ſert de diviſeur.

$$- 2axx + 2aax - 3aab = 0.$$
$$- bxx + 4abx.$$

$2aa + bb$ quotient.

EXEMPLE II.

Seconde maniere de trouver le plus grand diviseur commun.

Premiere équation.

$$x^3 - 2axx + aax - aab = 0.$$
$$- bxx + 2abx.$$
$$\times \overline{-2a - b}.$$

Premiere équation préparée.

$$-2ax^3 + 4aaxx - 2a^3x + 2a^3b = 0.$$
$$-bx^3 + 4abxx - 5aabx + aabb$$
$$+ bbxx - 2abbx.$$

Substitution.

$$-2ax^3 = -2aaxx + 3aabx$$
$$-bx^3 \qquad -4abxx.$$

Somme où il faut encore substituer la valeur de xx prise dans la seconde équation.

$$+2aaxx - 2a^3x + 2a^3b = 0.$$
$$+bbxx - 2aabx + aabb$$
$$-2abbx$$
$$\times \overline{-2a - b}.$$

Somme préparée.

$$-4a^3xx + 4a^4x - 4a^4b = 0.$$
$$-2aabxx + 6a^3bx - 4a^3bb$$
$$-2abbxx + 6aabbx - aab^3$$
$$-b^3xx + 2ab^3x.$$

Substitution.

$$-4a^3xx = -4a^4x + 6a^4b$$
$$-2aabxx - 8a^3bx + 3aab^3$$
$$-2abbxx - 2aabbx$$
$$-b^3xx - 4ab^3x.$$

Somme.
$$\begin{matrix} -2a^3bx & +2a^4b \\ -4aabbx & -4a^3bb \\ -2ab^3x & +2aab^3 \end{matrix}$$

Seconde équation.

$$-2axx + 2aax - 3aab = 0.$$
$$-bxx + 4abx.$$

ou bien

$$-2axx = -2aax + 3aab$$
$$-bxx \qquad -4abx$$
$$\times x \qquad \times x$$

Seconde équation multipliée par x.

$$\left.\begin{matrix}-2ax^3\\-bx^3\end{matrix}\right\} = \begin{matrix}-2aaxx+3aabx\\-4abxx.\end{matrix}$$

Seconde équation.

$$\left.\begin{matrix}-2axx\\-bxx\end{matrix}\right\} = \begin{matrix}-2aax+3aab\\-4abx.\end{matrix}$$
$$\times \overline{2aa+bb}. \qquad \times \overline{2aa+bb}.$$

Seconde équation préparée.

$$\left.\begin{matrix}-4a^3xx\\-2aabxx\\-2abbxx\\-b^3xx\end{matrix}\right\} = \begin{matrix}-4a^4x+6a^4b\\-8a^3bx+3aab^3\\-2aabbx\\-4ab^3x.\end{matrix}$$

Continuation de la premiere maniere.

Diviſant chaque terme par $-2a^3b + 4aabb - 2ab^3$, on trouve pour le reſte l'équation $x - a = 0$.

Il faut diviſer la ſeconde équation par ce reſte $x - a = 0$.

Seconde équation.	*Reſte qui ſert de diviſeur.*
$-2axx + 2aax - 3aab = 0.$	$x - a = 0.$
$-bxx + 4abx$	
	$-2ax + 3ab$ quotient.
	$-bx.$
$+2axx - 2aax$	
$+bxx - abx.$	
$0 \quad + 3abx - 3aab$	
$\quad - 3abx + 3aab.$	
$0 \quad 0.$	

La diviſion eſt exacte : ainſi $x - a = 0$ eſt le plus grand diviſeur commun.

REMARQUES.

I.

Il eſt évident qu'on peut négliger le premier terme dans les cas où il faut préparer la grandeur à diviſer ; ce qui abrege le calcul.

II.

S'il falloit trouver le plus grand diviſeur commun de trois, ou d'un plus grand nombre d'équations, on chercheroit d'abord le plus grand diviſeur commun des deux premieres, & enſuite le plus grand diviſeur commun de la troiſiéme équation, & du plus

Continuation de la seconde maniere.

Divisant chaque terme par $-2a^3b + 4aabb - 2ab^3$, on trouve l'équation $x - a = 0$, ou $x = a$.

Il faut substituer dans la seconde équation les valeurs de x, xx prises dans $x - a = 0$.

Seconde équation.

$$-2axx + 2aax - 3aab = 0.$$
$$-bxx + 4abx.$$

Substitution.

$$-2axx = -2aax$$
$$-bxx = -abx.$$

Somme.

$$+3abx - 3aab = 0.$$

Substitution. $+3abx = +3aab.$

Somme 0.

$$x - a = 0.$$
$$x = a.$$
$$\times x \quad \times x.$$

$$xx = ax$$
$$\times -2a \quad \times -2a.$$

$$-2axx = -2aax.$$

$$xx = ax.$$
$$\times -b \quad \times -b.$$

$$-bxx = -abx.$$

$$x = a.$$
$$\times +3ab \quad \times +3ab.$$

$$+3abx = +3aab.$$

La substitution des valeurs de x, xx prises de $x - a = 0$, dans la seconde équation, faisant détruire tous les termes par des signes contraires, $x - a = 0$ est le plus grand diviseur commun.

---

plus grand diviseur commun des deux premieres, & ainsi de suite.

III.

Lorsqu'il y a plus de raports connus dans un Problême composé, qu'il n'y a d'inconnues, on peut dans ce cas, trouver plusieurs équations qui ayent la même inconnue, dont chacune exprime le Problême; il faut ensuite trouver le plus grand diviseur commun de ces équations, & il sera l'équation la plus simple du Problême, & la résolution en sera plus facile.

ANALYSE COMPOSÉE,

OU

ANALYSE QUI ENSEIGNE A RESOUDRE les Problêmes qui ſe réduiſent à des équations composées.

LIVRE III.

Où l'on explique la nature des équations compoſées, le nombre & les qualitez de leurs racines, & leurs transformations.

AVERTISSEMENT.

ON ſuppoſe dans ce Livre, 1°. que le ſecond membre d'une équation compoſée eſt zero. 2°. Que la plus haute puiſſance de l'inconnue, c'eſt-à-dire le premier terme, a toujours le ſigne +. 3°. Qu'elle n'a ni fractions, ni incommenſurables.

On a enſeigné dans les Livres précedens, les manieres de lui donner ces préparations.

On ſuppoſe auſſi que dans ſon premier terme, la plus haute puiſſance de l'inconnue n'a pas d'autre coëfficient que l'unité; on enſeignera la maniere de lui donner cette préparation dans les transformations.

Cela ſuppoſé, pour concevoir clairement la nature des équations compoſées, il faut voir la maniere dont elles peuvent être formées.

SECTION I.

Où l'on explique la maniere dont ſe forment les équations compoſées.

DÉFINITION I.

22. LA valeur de l'inconnue dans une équation ſimple $x - a = 0$, s'appelle *la racine* de cette équation.

Ainſi

Ainsi a qui est la valeur de l'inconnue x, dans $x-a=0$, puisque $x=a$, s'appelle la racine de l'équation $x-a=0$.

Lorsque cette valeur est complexe, comme dans $x-a+b-c=0$, la grandeur complexe $+a-b+c$, (qui est la valeur de x, puisque $x=a-b+c$,) n'est pas moins la seule racine de l'équation $x-a+b-c=0$, & on peut l'abreger en mettant une seule lettre $d=a-b+c$, dans l'équation; ce qui donneroit $x-d=0$, ou bien $x=d$.

Lorsque mettant l'inconnue seule dans le premier membre, sa valeur qui est seule dans le second, est positive, on dit que la racine est *positive*; ainsi dans $x=a$, la racine a est positive; mais lorsque la valeur de l'inconnue est négative, comme dans $x=-b$, on dit que la racine est *négative*.

D'où il suit que lorsque zero est le second membre de l'équation simple, la *racine positive* a le signe négatif $-$, comme dans $x-a=0$; & la *racine négative* a le signe $+$, comme dans $x+b=0$.

La racine d'une équation simple ou lineaire, peut être ou commensurable, comme dans $x-a=0$, ou incommensurable, comme dans $x-\sqrt{ab}=0$, ou mixte, comme dans $x-a+\sqrt{ab}=0$. Ces trois sortes de racines s'appellent *réelles*.

Ou bien elle peut être une grandeur impossible, & qui marque que le Problême renferme une contradiction, comme dans $x-\sqrt{-aa}=0$.

Car $\sqrt{-aa}$ est une grandeur impossible, n'étant pas possible qu'il y ait de quarré qui soit précedé du signe négatif $-$, dont la racine soit possible; parceque si la racine a d'un quarré aa, a le signe $+$, ou le signe $-$, le quarré aura toujours necessairement le signe $+$, le produit de $+$ par $+$, & de $-$ par $-$, ayant toujours $+$; par consequent la racine quarrée d'un quarré négatif, comme $\sqrt{-aa}$, est une grandeur impossible.

Ces sortes de grandeurs impossibles s'appellent *imaginaires*; & lorsque la valeur de l'inconue x, dans une équation simple $x-\sqrt{-aa}=0$, est imaginaire, la racine de cette équation, qui est $+\sqrt{-aa}$, s'appelle *imaginaire*.

Enfin la racine d'une équation simple peut être composée d'une grandeur réelle, & d'une imaginaire, comme dans $x-a+\sqrt{-aa}=0$, où la valeur de x est $a-\sqrt{-aa}$,

puiſque $x = a - \sqrt{-aa}$. Cette racine $a - \sqrt{-aa}$, s'appelle *mixte imaginaire.*

Remarques ſur les grandeurs imaginaires.

23. LA racine, dont l'expoſant eſt un nombre pair, d'une grandeur négative, eſt toujours une grandeur imaginaire; ainſi $\sqrt{-aa}$, $\sqrt[4]{-a^4}$, $\sqrt[6]{-a^6}$, &c. ſont des grandeurs imaginaires: car une grandeur a, ſoit qu'elle ait le ſigne $-$, ou le ſigne $+$, étant multipliée par elle-même autant de fois qu'on voudra, pourvû que ce nombre de fois ſoit pair, le produit aura toujours le ſigne $+$; par conſequent une puiſſance négative dont l'expoſant eſt pair, comme $-aa$, $-a^4 - a^6$, &c. eſt une grandeur dont la racine eſt impoſſible ou imaginaire, puiſque ſi cette racine étoit poſſible, ſa puiſſance auroit toujours le ſigne $+$, & elle ne ſçauroit avoir le ſigne $-$.

Mais ſi l'expoſant du ſigne radical $\sqrt{}$ d'une grandeur négative eſt impair, la racine eſt une grandeur réelle; ainſi $\sqrt[3]{-a^3}$, $\sqrt[5]{-a^5}$, $\sqrt[7]{-a^7}$, &c. ſont des grandeurs réelles, parceque la racine négative $-a$, étant multipliée par elle-même un nombre de fois qui ſoit impair, la puiſſance qui en ſera le produit, ſera négative; car $-a \times -a = +aa$, & $+aa \times -a = -a^3$, & ainſi des autres.

THEORÉME I.

24. TOUTE équation composée peut être conçue comme étant formée par la multiplication d'autant d'équations ſimples, que l'équation compoſée a de degrez.

Ainſi toute équation de deux degrez, peut être conçue comme formée par la multiplication de deux équations ſimples.

Toute équation du 3ᵉ degré, peut être conçue formée par la multiplication de trois équations ſimples; & ainſi des autres.

Démonſtration pour les équations du ſecond degré.

TOUTES les équations du ſecond degré peuvent être exprimées par ces ſix formules.

Premiere,	$xx + nx + p = 0.$
Seconde,	$xx + nx - p = 0.$
Troiſiéme,	$xx - nx + p = 0.$
Quatriéme,	$xx - nx - p = 0.$
Cinquiéme,	$xx - p = 0.$
Sixiéme,	$xx + p = 0.$

Or toutes ces équations peuvent être conçues formées par la multiplication de deux équations ſimples.

Car, 1°. si l'on multiplie les deux équations simples $x+a=0$, & $x+b=0$, leur produit $\begin{matrix} xx+ax+ab=0. \\ +bx, \end{matrix}$ donnera la 1re formule, en supposant $a+b=n$, & $ab=p$.

2°. Si l'on multiplie les deux équations simples $x+a=0$, & $x-b=0$, leur produit $\begin{matrix} xx+ax-ab=0. \\ -bx, \end{matrix}$ donnera la seconde formule, en supposant, 1°. a plus grand que b, & 2°. $a-b=n$, & $-ab=-p$.

3°. Si on multiplie $x-a=0$, par $x-b=0$, leur produit $\begin{matrix} xx-ax+ab=0. \\ -bx, \end{matrix}$ donnera la troisiéme formule, en supposant $-a-b=-n$, & $+ab=+p$.

4°. Si on multiplie $x-a=0$, par $x+b=0$, leur produit $\begin{matrix} xx-ax-ab=0. \\ +bx, \end{matrix}$ donnera la quatriéme formule, en supposant, 1°. a plus grand que b, & 2°. $-a+b=-n$, & $-ab=-p$.

5°. Si on multiplie $x+a=0$, par $x-a=0$, leur produit $xx-aa=0$, donnera la cinquiéme formule, en supposant $-aa=-p$.

6°. Enfin si on multiplie $x+\sqrt{-aa}=0$, par $x-\sqrt{-aa}=0$, leur produit $xx+aa=0$, donnera la sixiéme formule, en supposant $+aa=+p$; par consequent toutes les équations du second degré peuvent être conçues formées par le produit de deux équations simples.

Demonstration pour les équations du troisiéme degré.

TOUTES les équations du 3e degré peuvent être raportées à ces quatre formules pour abreger.

Premiere, $x^3 \pm nxx \pm px \pm q = 0.$
Seconde, $x^3 \quad * \quad \pm px \pm q = 0.$
Troisiéme, $x^3 \pm nxx \quad * \pm q = 0.$
Quatriéme, $x^3 \quad * \quad * \pm q = 0.$

Or toutes les équations representées par ces quatre formules, peuvent être conçues formées par la multiplication de trois équations simples.

Car 1°. si l'on multiplie les trois équations simples $x\pm a=0$. $x\pm b=0$, $x\pm c=0$, leur produit

$$\begin{matrix} x^3 \pm axx \pm abx \pm abc = 0, \\ \pm bxx \pm acx \\ \pm cxx \pm bcx, \end{matrix}$$

donnera la premiere formule, en ſuppoſant $\pm a \pm b \pm c = \pm n$, $\pm ab \pm ac \pm bc = \pm p$, $\pm abc = \pm q$.

2°. Si l'on ſuppoſe que la racine de l'une des trois équations ſimples, par exemple c dans la troiſiéme $x \pm c = 0$, eſt égale à la ſomme des deux autres $a + b$, & qu'elle a un ſigne oppoſé au leur, c'eſt-à-dire que c eſt négative, ſi a & b ſont poſitives; & que c eſt poſitive, ſi a & b ſont négatives, on aura la ſeconde formule, en ſuppoſant les grandeurs connues du troiſiéme terme du produit des trois équations ſimples, égales à $\pm p$, & la grandeur connue du quatriéme terme du produit des trois équations ſimples, égale à $\pm q$; & à cauſe de $-c = a + b$, ou de $+c = -a - b$, le ſecond terme ſera détruit par des ſignes contraires.

3°. Si l'on ſuppoſe la même racine c avec un ſigne contraire à ceux des deux autres a & b, mais qu'elle leur ſoit inégale; on aura la troiſiéme formule, en ſuppoſant les produits ac, bc, avec des ſignes contraires à celui de ab, égaux enſemble à ab, & en ſuppoſant toujours les coëficients du deuxiéme & quatriéme terme du produit des trois équations ſimples, égaux à ceux du deuxiéme & quatriéme terme de la troiſiéme formule.

4°. Si on multiplie les trois équations ſimples $x + \frac{1}{2}a + \sqrt{-\frac{3}{4}aa} = 0$, $x + \frac{1}{2}a - \sqrt{-\frac{3}{4}aa} = 0$, $x - a = 0$, leur produit $x^3 - a^3 = 0$, donnera la quatriéme formule $x^3 - q = 0$, en ſuppoſant $a^3 = q$.

Et ſi on multiplie les trois équations ſimples $x - \frac{1}{2}a + \sqrt{-\frac{3}{4}aa} = 0$, $x - \frac{1}{2}a - \sqrt{-\frac{3}{4}aa} = 0$, $x + a = 0$, leur produit $x^3 + a^3 = 0$, donnera la quatriéme formule $x^3 + q = 0$, en ſuppoſant $a^3 = q$.

Par conſequent toutes les équations du troiſiéme degré peuvent être conçues comme formées par trois équations ſimples.

REMARQUE.

25. ON peut auſſi concevoir toutes les équations du troiſiéme degré comme formées par la multiplication d'une équation du ſecond degré, & d'une équation ſimple.

Car, 1°. ſi on multiplie $xx \pm lx \pm m = 0$, par $x \pm c = 0$, le produit $\begin{matrix} x^3 \pm lxx \pm mx \pm cm = 0 \\ \pm cxx \pm clx \end{matrix}$, donnera la premiere formule, en ſuppoſant $\pm l \pm c = \pm n$, $\pm m \pm cl = \pm p$, $\pm cm = \pm q$.

2°. Si on multiplie $xx \pm lx \pm m = 0$, par $x \mp l = 0$, le produit $x^3 \pm mx \mp lm = 0$, donnera la seconde formule,
$- llx$,
en supposant $\pm m - ll = \pm p$, & $\mp lm = \mp q$.

3°. Si on multiplie $xx \pm lx \mp lm = 0$, par $x + m = 0$, le produit $x^3 \pm lxx \mp lmm = 0$, donnera la troisiéme formule,
$+ mxx$,
en supposant $\pm l + m = \pm n$, & $\mp lmm = \mp q$.

4°. Si on multiplie $xx \pm lx + ll = 0$, par $x \mp l = 0$, le produit $x^3 \mp l^3 = 0$, donnera la quatriéme formule, en supposant $\mp l^3 = \mp q$.

Démonstration pour les équations des autres degrez.

On voit clairement que les équations des autres degrez peuvent être conçues formées par les équations du premier, du second & du troisiéme degré ; par exemple, celles du quatriéme par une équation du premier, & une du troisiéme, ou par deux équations, chacune du second degré ; celles du cinquiéme par une équation du second degré, & une du troisiéme, & ainsi des autres : Par consequent toute équation composée peut être conçue formée par autant d'équations simples qu'elle a de degrez.

REMARQUE.

Lorsque le Problême renferme quelque contradiction, l'équation composée qui l'exprime, peut toujours être conçue comme formée par autant d'équations simples qu'elle a de degrez ; mais les racines de ces équations simples ne seront pas toutes réelles, & il y en aura d'imaginaires. On en a déja vû des exemples dans la quatriéme formule du troisiéme degré, & dans la sixiéme du second degré.

COROLLAIRE.

26. Une équation composée, dont on n'a point abregé les grandeurs connues, en supposant plusieurs de ces grandeurs égales à une seule lettre, peut toujours être divisée exactement par chacune des équations de moindre degré qu'elle n'est, par la multiplication desquelles elle a été formée : & lorsqu'une équation d'un moindre degré, est un diviseur exact

d'une équation composée d'un degré plus élevé, cette équation d'un moindre degré est une de celles dont la composée a été formée par la multiplication.

DÉMONSTRATION.

IL est évident que lorsqu'un produit a été formé par la multiplication de plusieurs grandeurs, chacune de ces grandeurs en est un diviseur exact : & lorsqu'une grandeur est un diviseur exact d'un produit, cette grandeur est une de celles dont la multiplication a formé ce produit ; ainsi le Corollaire est évident.

THEORÊME. II.

27. QUAND la plus haute puissance de l'inconnue est multipliée dans le premier terme d'une équation composée, par une grandeur connue differente de l'unité, on peut bien concevoir cette équation comme formée par le produit d'autant d'équations simples, qu'elle a de degrez ; mais, 1°. ou bien l'inconnue du premier terme est multipliée par une grandeur connue dans chacune des équations simples ; 2°. ou bien elle l'est dans quelques-unes, & non dans toutes ; 3°. ou bien elle l'est dans une seule.

DÉMONSTRATION.

CAR en supposant, 1°. ces équations simples $ax-d=0$, $bx-e=0$, $cx-f=0$, & les multipliant les unes par les autres, l'on aura pour le premier cas l'équation composée $abcx^3$ — &c. 2°. En supposant $x-d=0$, $bx-e=0$, $cx-d=0$, & les multipliant les unes par les autres, on aura pour le second cas l'équation composée bcx^3 — &c. 3°. En supposant $x-d=0$, $x-e=0$, $cx-d=0$, & les multipliant les unes par les autres, on aura l'équation composée cx^3 — &c.

On peut aussi concevoir une équation composée, dont le premier terme a un coëficient different de l'unité, comme le produit d'autant d'équations simples qu'elle a de degrez, dont toutes les racines sont des fractions, ou seulement quelques-unes, ou du moins une seule.

Car en supposant, 1°. $x-\frac{d}{a}=0$, $x-\frac{e}{b}=0$, $x-\frac{f}{c}=0$; ou bien, 2°. $x-d=0$, $x-\frac{e}{b}=0$, $x-\frac{f}{c}=0$; ou bien, 3°. $x-d=0$, $x-e=0$, $x-\frac{f}{c}=0$; après avoir fait la multiplica-

tion dans chacun de ces trois cas, & enſuite ôté les fractions, on aura une équation composée, dont le premier terme aura un coëficient different de l'unité.

COROLLAIRE.

28. SI le premier terme d'une équation compoſée a un coëficient different de l'unité, les équations d'un moindre degré qu'elle n'eſt, par leſquelles elle peut être exactement diviſée, auront toutes ou pluſieurs, ou du moins quelqu'une, dans leur premier terme, un coëficient different de l'unité; ou bien elles auront toutes, ou pluſieurs, ou du moins quelqu'une des fractions pour leurs racines.

SECTION II.

Du nombre & de la qualité des racines des équations compoſées.

DEFINITION II.

29. LES racines des équations ſimples dont une équation compoſée eſt le produit, s'appellent auſſi *les racines* de l'équation compoſée.

Corollaires qu'il faut ſe rendre familiers.

D'OU il ſuit, 1°. Qu'une équation compoſée a autant de racines, qu'elle a de degrez.

2°. Que les racines d'une équation compoſée peuvent être ou toutes réelles, & il y en peut avoir de trois ſortes, ou elles ſeront commenſurables, ou incommenſurables, ou mixtes; ou bien elles ſeront toutes imaginaires, ou mixtes imaginaires; ou enfin elles ſeront en partie réelles, & en partie imaginaires.

3°. Que chaque racine étant exprimée par une ſeule lettre dans chacune des équations ſimples, elles peuvent être ou poſitives, ou négatives, ou en partie poſitives, & en partie négatives.

4°. Que l'on peut, ſelon les combinaiſons differentes des ſignes + & — des racines poſitives & négatives, rapporter toutes les équations de chaque degré à un nombre déterminé de formules.

Dans le ſecond degré, il n'y en peut avoir que de trois ſortes; car, ou, 1°. les deux racines ſeront poſitives; ou, 2°. négatives; ou, 3°. l'une poſitive, & l'autre négative.

Dans le troiſiéme degré, il n'y en peut avoir que de quatre ſortes; car ou bien, 1°. les trois racines ſeront poſitives; ou, 2°. négatives; ou, 3°. deux poſitives, & une négative; ou, 4°. deux négatives, & une poſitive.

En general, dans chaque degré il peut y avoir autant de formules, & une de plus, qu'il y a de racines dans les équations de ce degré; ſçavoir cinq formules dans le quatriéme degré, ſix formules dans le cinquiéme, ſept formules dans le ſixiéme, &c.

En voici la démonſtration pour le ſixiéme degré, qui ſervira pour tous les autres.

RACINES.	1re,	2e,	3e,	4e,	5e,	6e.
	+	+	+	+	+	+
	+	+	+	+	+	—
	+	+	+	+	—	—
	+	+	+	—	—	—
	+	+	—	—	—	—
	+	—	—	—	—	—
	—	—	—	—	—	—

Il faut voir dans la Table toutes les formules differentes de chaque degré, juſqu'au quatriéme degré. Il faut les former ſoi-même, & ſe les rendre familieres, pour bien concevoir ce qui ſuit, & on peut continuer la Table tant qu'on voudra.

Table des formules des équations compoſées.

Pour le ſecond degré.

Premiere.	*Seconde.*	*Troiſiéme.*
$x - a = 0. \times x - b = 0.$	$x + a = 0. \times x + b = 0.$	$x - a = 0. \times x + b = 0.$
$xx - ax + ab = 0.$	$xx + ax + ab = 0.$	$xx - ax - ab = 0.$
$- bx.$	$+ bx.$	$+ bx.$

Pour le troiſiéme degré.

Premiere.	*Seconde.*
$x - a = 0. \times x - b = 0. \times x - c = 0.$	$x + a = 0. \times x + b = 0. \times x + c = 0.$
$x^3 - axx + abx - abc = 0.$	$x^3 + axx + abx + abc = 0.$
$- bxx + acx.$	$+ bxx + acx$
$- cxx + bcx.$	$+ cxx + bcx.$

Troiſiéme.	*Quatriéme.*
$x - a = 0. \times x - b = 0. \times x + c = 0.$	$x - a = 0. \times x + b = 0. \times x + c = 0.$
$x^3 - axx + abx + abc = 0.$	$x^3 - axx - abx - abc = 0.$
$- bxx - acx$	$+ bxx - acx$
$+ cxx - bcx.$	$+ cxx + bcx.$

Pour

Pour le quatriéme degré.

Premiere.

$$x-a=0. \times x-b=0. \times x-c=0. \times x-d=0.$$

$$\begin{array}{lllll} x^4 & -ax^3 & +abxx & -abcx & +abcd=0. \\ & -bx^3 & +acxx & -abdx & \\ & -cx^3 & +bcxx & -acdx & \\ & -dx^3 & +adxx & -bcdx & \\ & & +bdxx & & \\ & & +cdxx. & & \end{array}$$

Seconde.

$$x+a=0. \times x+b=0. \times x+c=0. \times x+d=0.$$

$$\begin{array}{lllll} x^4 & +ax^3 & +abxx & +abcx & +abcd=0, \\ & +b & +ac & +abd & \\ & +c & +bc & +acd & \\ & +d & +ad & +bcd & \\ & & +bd & & \\ & & +cd. & & \end{array}$$

Troisiéme.

$$x-a=0. \times x-b=0. \times x-c=0. \times x+d=0.$$

$$\begin{array}{lllll} x^4 & -ax^3 & +abxx & -abcx & -abcd=0. \\ & -b & +ac & +abd & \\ & -c & +bc & +acd & \\ & +d & -ad & +bcd & \\ & & -bd & & \\ & & -cd. & & \end{array}$$

Quatriéme.

$$x-a=0 \times x+b=0 \times x+c=0. \times x+d=0.$$

$$\begin{array}{lllll} x^4 & -ax^3 & -abxx & -abcx & -abcd=0. \\ & +b & -ac & -abd & \\ & +c & +bc & -acd & \\ & +d & -ad & +bcd. & \\ & & +bd & & \\ & & +cd. & & \end{array}$$

Cinquiéme.

$$x-a=0. \times x-b=0. \times x+c=0. \times x+d=0.$$

$$\begin{array}{lllll} x^4 & -ax^3 & +abxx & +abcx & +abcd=0. \\ & -b & -ac & +abd & \\ & +c & -bc & -acd & \\ & +d & -ad & -bcd & \\ & & -bd & & \\ & & +cd & & \end{array}$$

5°. Le coëficient du ſecond terme d'une équation compoſée, contient la ſomme de toutes les racines, ſans être multipliées les unes par les autres.

Le coëficient du troiſiéme terme contient les produits de toutes les racines, multipliées deux à deux autant de fois qu'elles le peuvent être, pour faire des produits differens.

Le coëficient du quatriéme terme contient les produits de toutes les racines, multipliées trois à trois autant de fois qu'elles le peuvent être, pour faire des produits differens.

Le coëficient du cinquiéme terme contient tous les produits des racines, multipliées quatre à quatre ; & ainſi de ſuite jusqu'au dernier terme tout connu, qui contient toujours le ſeul produit de toutes les racines.

Cela eſt évident par la formation des formules de la Table.

6°. Dans les termes pairs, ſçavoir le ſecond, le quatriéme, le ſixiéme, &c. les racines ſont une à une dans le ſecond, & multipliées en nombre impair dans les autres ; ſçavoir,

trois à trois dans le quatriéme terme, cinq à cinq dans le sixiéme, &c.

Dans les termes impairs, c'est-à-dire dans le troisiéme, le cinquiéme, &c. les racines sont multipliées les unes par les autres en nombre pair; sçavoir, deux à deux dans le troisiéme, quatre à quatre dans le cinquiéme, &c.

7°. Si toutes les racines sont négatives, tous les termes de l'équation composée sont positifs, c'est-à-dire, ils ont tous le signe +; car tous les termes des équations simples ayant le signe +, tous les produits qui en sont formez ne peuvent avoir que le signe +.

8°. Si toutes les racines sont positives, tous les termes ont alternativement + & —, car le premier terme a toujours + par la supposition; le second terme ne contient que la somme des racines qui ont toutes le signe —, dans les équations simples; ainsi le second terme a le signe —: pour les autres termes, tous les pairs ayant pour leur coëficient les produits des racines en nombre impair, ils ont necessairement le signe —; & tous les impairs ayant pour leur coëficient les produits des racines en nombre pair, ils ont necessairement le signe +; par consequent les signes + & — se suivent alternativement, lorsque toutes les racines sont positives; ainsi, quand dans une équation composée les signes sont alternativement + & —, toutes les racines sont positives.

9°. D'où il suit que si tous les termes n'ont pas le signe +, & si les + & — ne se suivent pas alternativement, il y a necessairement des racines positives & des racines négatives dans l'équation.

Ces Corollaires étant démontrez, il y a contradiction dans le Problême, c'est-à-dire il y a des racines imaginaires dans l'équation du Problême, quand ils ne se trouvent pas veritables; ce qu'on doit aussi entendre des Corollaires suivans.

10°. Lorsqu'il manque quelque terme dans l'équation, il est nécessaire qu'il y ait des racines positives & négatives, puisqu'un terme ne peut être détruit que par les signes contraires + & — des produits dont ce terme est composé: & ces produits ne peuvent avoir des signes contraires, qu'il n'y ait des racines positives & négatives. Ainsi l'on a ces deux marques pour connoître qu'il y a dans une équation des racines positives & des négatives; 1°. Lorsque la suite alter-

native des + & des — eſt interrompue dans les termes d'une équation où tous les termes ne ſont pas poſitifs ; 2°. Lorſqu'il manque quelque terme dans une équation.

11°. Le ſecond terme d'une équation contenant la ſomme des racines ; ſi la ſomme des poſitives eſt égale à celle des négatives, il ſera détruit par des ſignes contraires.

Si la ſomme des poſitives ſurpaſſe celle des négatives, le ſecond terme aura — ; & il aura + ſi la ſomme des négatives ſurpaſſe celle des poſitives.

Ainſi quand le ſecond terme manque dans une équation, on eſt aſſuré que les racines poſitives ſont égales à la ſomme des négatives.

12°. Si le ſecond terme manque dans une équation du troiſiéme & du quatriéme degré, le troiſiéme terme a toujours le ſigne —.

Démonſtration pour le troiſiéme degré.

Le ſecond terme étant détruit, il faut qu'il y ait dans l'équation deux racines poſitives, & une négative, & que la négative ſoit égale aux deux poſitives ; ou qu'il y ait deux racines négatives, & une poſitive qui ſoit égale aux deux négatives : ainſi les équations du troiſiéme degré où manque le ſecond terme, ſont exprimées par ces deux formules, où $c = a + b$.

$$x - a = 0. \quad xx - b = 0. \quad xx + c = 0.$$

$$\begin{array}{llll} x^3 & - axx & + abx & + abc = 0. \\ & - bxx & - acx. & \\ & + cxx & - bcx. & \end{array}$$

$$x + a = 0. \quad xx + b = 0. \quad xx - c = 0.$$

$$\begin{array}{llll} x^3 & + axx & + abx & - abc = 0. \\ & + bxx & - acx. & \\ & - cxx & - bcx. & \end{array}$$

Donc dans le troiſiéme terme, le produit — ac ſurpaſſe le produit + ab ; par conſequent le troiſiéme terme a le ſigne —.

Démonſtration pour le quatriéme degré.

Les équations du quatriéme degré où le ſecond terme eſt détruit, ayant des racines poſitives & négatives ; & les poſitives étant égales aux négatives, elles ſont toutes exprimées par ces trois formules.

$$x - a = 0. \quad xx - b = 0.$$
$$xx - c = 0. \quad xx + d = 0.$$

$$\begin{array}{lllll} x^4 & - ax^3 & + abxx & - abcx & - abcd = 0. \\ & - b & + ac & + abd & \\ & - c & + bc & + acd & \\ & + d & - ad & + bcd & \\ & & - bd & & \\ & & - cd. & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll|ll} x+a=0. & \times\, x+b=0. & x+a=0. & \times\, x+b=0. \\ \times\, x+c=0. & \times\, x-d=0. & \times\, x-c=0. & \times\, x-d=0. \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll|lllll} x^4 & +ax^3 & +abxx & +abcx & -abcd=0. & x^4 & +ax^3 & +abxx & -abcx & +abcd=0. \\ & +b & +ac & -abd & & & +b & -ac & -abd & \\ & +c & +bc & -acd & & & -c & -ad & +acd & \\ & -d & -ad & -bcd & & & -d & -bc & +bcd & \\ & & -bd & & & & & -bd & & \\ & & -cd. & & & & & +cd & & \end{array}$$

Dans les deux premieres $d=a+b+c$; par consequent dans le troisiéme terme $-ad$ surpasse $+ab$; $-cd$ surpasse $+ac$ & $-bd$ surpasse $+bc$; ainsi les produits négatifs surpassent les positifs dans le troisiéme terme.

Dans la derniere $c+d=a+b$, soit $m=c+d=a+b$; donc $mm=ac+ad+bc+bd$; mm est aussi $=aa+2ab+bb$; mm est encore $=cc+2cd+dd$; donc $\frac{mm}{2}-\frac{aa-bb}{2}=ab$, & $\frac{mm}{2}-\frac{cc-dd}{2}=cd$; donc $mm-\frac{aa-bb-cc-dd}{2}=ab+cd$; donc mm surpasse $ab+cd$; donc $-ac-ad-bc-bd=-mm$ surpasse $+ab+cd$; donc dans la derniere formule, les produits négatifs du troisiéme terme surpassent les positifs.

13°. D'où il suit que quand le second terme manque dans une équation du troisiéme & du quatriéme degré, si le troisiéme terme a le signe $+$, il y a necessairement des racines imaginaires dans l'équation.

14°. Les racines imaginaires sont toujours en nombre pair dans une équation composée, où l'on suppose qu'il n'y a pas d'incommensurables; c'est-à-dire il y en a deux, ou quatre, ou six, &c.

DEMONSTRATION.

S'IL y a des imaginaires dans une équation, il faut que le produit des unes par les autres les rende réelles, pour faire disparoître leur signe radicale $\sqrt{-}$, dans le dernier terme: mais le produit des imaginaires ne sçauroit faire disparoître leur signe $\sqrt{-}$, qu'elles ne soient multipliées en nombre pair; car, par exemple, $+\sqrt{-a}$ multipliées par $-\sqrt{-a}$, donne le produit réel $+a$: mais s'il y en avoit une troisiéme, $-\sqrt{-a}$, le produit seroit $-a\sqrt{-a}$. Les racines imaginaires ne sçauroient donc être qu'en nombre pair dans une équation.

Ainſi s'il y a des racines imaginaires dans une équation du ſecond degré, elles le ſont toutes d'eux : S'il y en a dans le troiſiéme degré, il y a toujours une racine réelle, &c.

15°. Les produits réels tous connus, qui naiſſent de la multiplication des ſeules imaginaires, ont toujours le ſigne +.

DÉMONSTRATION.

Les imaginaires étant toujours en nombre pair, on peut conſiderer à part les équations du ſecond degré formées par les imaginaires priſes deux à deux.

$$x - a + \sqrt{-aa} = 0.$$
$$x - a - \sqrt{-aa} = 0.$$
$$xx - 2ax + 2aa = 0.$$

Mais afin que deux racines imaginaires diſparoiſſent dans le ſecond terme, comme on le ſuppoſe, il faut que l'une ait +, & l'autre —, & que les parties réelles $-a$, $-a$, ayent le même ſigne +, ou le même ſigne —; & le produit réel de $+\sqrt{-aa}$ par $-\sqrt{-aa}$, eſt $+aa$; par conſequent les produits réels tous connus, qui naiſſent de la multiplication des imaginaires, ont toujours +.

D'où il ſuit, le ſigne + n'apportant aucun changement dans les multiplications, que s'il y a des racines imaginaires avec des racines réelles dans une équation compoſée, les réelles y conſerveront toujours leur ſigne dans le dernier terme, c'eſt-à-dire, les imaginaires ne feront pas de changement dans le ſigne du produit des réelles du dernier terme.

16°. Le dernier terme d'une équation, étant le produit de toutes les racines, lorſque le nombre des racines poſitives eſt pair, il a toujours le ſigne +; lorſqu'il eſt impair, il a le ſigne —; & lorſqu'il a le ſigne —, il y a neceſſairement quelque racine réelle dans l'équation; car le produit des imaginaires donne toujours le ſigne +.

THEORÊME III.

30. Si l'on change tous les ſignes des termes pairs d'une équation compoſée, c'eſt-à-dire du 2e, 4e, 6e, &c. ſans toucher aux ſignes des termes impairs, c'eſt-à-dire du 3e, 5e, &c. toutes les racines poſitives de l'équation compoſée ſeront changées en négatives, & toutes les négatives en poſitives.

DÉMONSTRATION.

1°. LE ſecond terme contient la ſomme des racines ; les poſitives y ont le ſigne —, & les négatives le ſigne + ; ainſi en changeant dans le ſecond terme les + en —, & les — en +, il eſt évident que les poſitives ſeront changées en négatives, & les négatives en poſitives.

2°. Chacun des termes pairs contient les produits des racines multipliées les unes par les autres en nombre impair ; ceux qui ont + ſont neceſſairement formez ou par un nombre impair de racines qui ont chacune +, ou bien par un nombre pair de racines qui ont —, & un nombre impair de racines qui ont + : ceux qui ont — ſont neceſſairement formez par un nombre impair de racines qui ont chacune —, ou par un nombre pair de racines qui ont +, & un impair de racines qui ont — ; donc ſi l'on change les ſignes des multiplicateurs, c'eſt-à-dire les racines poſitives en négatives, & les négatives en poſitives, on changera neceſſairement les ſignes des termes pairs ; ainſi en changeant les ſignes des termes pairs, on change les ſignes des racines ; c'eſt-à-dire les poſitives en négatives, & les négatives en poſitives.

3°. Au contraire, les termes impairs contiennent les produits des racines multipliées en nombre pair.

Ainſi ceux qui ont +, ſont neceſſairement formez ou ſeulement d'un nombre pair de poſitives, ou ſeulement d'un nombre pair de négatives, ou bien d'un nombre pair de poſitives, & d'un nombre pair de négatives.

Ceux qui ont — ſont neceſſairement formez d'un nombre impair de poſitives, & d'un nombre impair de négatives ; par conſequent ſi on change les ſignes des multiplicateurs, c'eſt-à-dire des racines poſitives & négatives, on aura des produits qui auront dans les termes impairs les mêmes ſignes qu'ils avoient ; ainſi les termes impairs ne changent point de ſignes en changeant les racines poſitives en négatives, & les négatives en poſitives : Il eſt donc évident qu'en changeant les ſignes des termes pairs, ſans toucher aux ſignes des termes impairs, on change toutes les racines poſitives en négatives, & les négatives en poſitives.

COROLLAIRE.

DANS cette formule du troiſiéme degré $x^3 - px + q = 0$, où il y a des racines poſitives & négatives, puiſque le ſecond terme eſt évanoui, & où il faut qu'il y ait deux racines poſitives, & une négative, puiſque le dernier terme q a le ſigne $+$; ſi l'on change le ſeul ſigne du dernier terme, la formule $x^3 - px - q = 0$, contiendra les mêmes racines que la précedente, mais les deux poſitives ſeront changées en négatives, & la négative en poſitive : car les ſignes des termes pairs ont été changez.

THEORÊME IV.

31. SI l'on ſubſtitue dans une équation composée l'une de ſes racines, laquelle on voudra, avec ſes puiſſances, à la place de l'inconnue & de ſes puiſſances, en donnant le ſigne $+$ à la racine poſitive qu'on ſubſtitue, & le ſigne $-$ à la racine négative qu'on ſubſtitue, tous les produits de tous les termes de l'équation ſe détruiront après la ſubſtitution ; c'eſt-à-dire qu'il s'en trouvera preciſément autant avec le ſigne $+$, qu'il y en aura avec le ſigne $-$, qui ſeront égaux les uns aux autres.

Pour démontrer ce Theorême, on fera voir, 1°. qu'après la ſubſtitution d'une racine dans l'équation, le premier terme, ou le premier produit, a un produit dans le ſecond terme, qui eſt preciſément le même ; que les autres produits du ſecond terme en ont tout autant d'égaux dans le troiſiéme terme ; que les autres produits du troiſiéme terme en ont un égal nombre d'égaux dans le quatriéme ; & ainſi de ſuite juſqu'au dernier terme, qui en a un dans le penultiéme qui lui eſt égal. 2°. Que ces produits égaux dans deux termes qui ſe ſuivent, ont des ſignes contraires ; d'où il ſuivra qu'ils ſe détruiſent.

On prendra une formule du quatriéme degré, afin que la démonſtration ſoit plus facile, étant appliquée à un exemple.

$$x - a = 0. \quad \times\ x - b = 0.$$
$$\times\ x - c = 0. \quad \times\ x - d = 0.$$

$$\begin{array}{lllll} x^4 & -ax^3 & +abxx & -abcx & +abcd = 0. \\ & -b & +ac & -abd & \\ & -c & +ad & -acd & \\ & -d & +bc & -bcd & \\ & & +bd & & \\ & & +cd. & & \end{array}$$

En substituant $+a$ *à la place de* $+x$, *on trouve*

$$\begin{array}{l} a^4 - a^4 \\ \quad - ba^3 + ba^3 \\ \quad - ca^3 + ca^3 \\ \quad - da^3 + da^3 \\ \qquad + bcaa - bcaa \\ \qquad + bdaa - bdaa \\ \qquad + cdaa - cdaa \\ \qquad\qquad - bcda + bcda = 0. \end{array}$$

DÉMONSTRATION.

1°. En substituant $+a$ dans le premier terme $+x^4$, on trouve $+a^4$: Mais dans le second terme, chaque racine est multipliée par x^3; ainsi a étant multipliée par $+a^3$, qu'on a substituée à la place de $+x^3$, il y aura dans le second terme un seul produit a^4 égal à celui du premier terme

Les autres produits du second terme $-bx^3$, $-cx^3$, $-dx^3$, sont les trois autres racines multipliées par $+x^3$; ainsi après la substitution, l'on aura les trois autres racines multipliées par $+a^3$, sçavoir ba^3, ca^3, da^3; mais le troisiéme terme contient les produits des racines deux à deux; ainsi il y a trois produits où a est multipliée par les trois autres racines b, c, d, qui sont $abxx$, $acxx$, $adxx$.

La substitution mettant dans ces produits $+aa$, au lieu de $+xx$, il y aura trois produits dans le troisiéme terme des trois autres racines multipliées par $+a^3$, qui sont ba^3, ca^3, da^3.

Les autres produits $bcxx$, $bdxx$, $cdxx$, qui restent dans le troisiéme terme, sont les produits des trois autres racines b, c, d prises deux à deux par xx; & après la substitution ils deviennent $bcaa$, $bdaa$, $cdaa$: mais le quatriéme terme contient les produits de toutes les racines prises trois à trois; ainsi il y a trois produits $abcx$, $abdx$, $acdx$, où a est multipliée par les trois autres prises deux à deux. C'est pourquoi la substitution mettant dans ces produits a au lieu de x, il y aura dans le quatriéme terme trois produits des trois racines b, c, d prises deux à deux par aa, qui sont $bcaa$, $bdaa$, $cdaa$.

Il reste dans le quatriéme terme après la substitution un produit de a par les trois autres racines, qui est $bcda$; mais il est évident que le dernier terme $abcd$, est le même produit.

2°. Il reste à démontrer que les produits égaux de deux termes qui se suivent, ont des signes opposez.

Quand la racine est positive, elle a le signe $-$ dans l'équation,

tion, & en la ſubſtituant, on lui donne le ſigne +: C'eſt le contraire quand elle eſt négative. Ainſi quand on ſubſtitue une racine à la place de l'inconnue, on lui donne un ſigne oppoſé à celui qu'elle a dans l'équation.

Il faut auſſi remarquer que le + multipliant le + ou le —, ne change rien dans le ſigne de la grandeur multipliée : au contraire le — change toujours le ſigne de la grandeur par laquelle on le multiplie; car — par + donne —, & — par — donne +.

Il ſuit de là qu'en faiſant la ſubſtitution de $+a$, au lieu de $+x$, tous les produits ne changent point de ſigne; mais ceux qui dans l'équation ſont multipliez par la racine $-a$, ont des ſignes contraires à ceux qu'ils auroient ſans cela : Par conſequent après la ſubſtitution, le produit a^4 du premier terme, & celui du ſecond, qui lui eſt égal, ſçavoir $-a^4$, ont des ſignes oppoſez.

Par la même raiſon, les produits qui reſtent dans le ſecond terme $-ba^3-ca^3-da^3$, & ceux du troiſiéme terme qui leur ſont égaux, ſçavoir $+ba^3+ca^3+da^3$, ont des ſignes contraires. Car les premiers ſont faits de $+a^3$ par les racines $-b, -c, -d$, differentes de a; & ceux du troiſiéme terme qui leur ſont égaux, ſont formez par les produits des mêmes racines $-b, -c, -d$, multipliées par $-a$, & enſuite par $+a^2$: or $-a$ change leur ſigne en les multipliant.

Il eſt évident que le même raiſonnement s'étend à tous les autres produits égaux dans deux termes qui ſe ſuivent.

Par conſequent tous les produits de tous les termes d'une équation, ſont détruits par la ſubſtitution d'une des racines; car ce que l'on a dit de la premiere, convient évidemment à chacune des autres.

COROLLAIRES.

32. 1°. L'INCONNUE d'une équation compoſée repréſente également chacune des racines de l'équation; car en ſubſtituant ſucceſſivement chacune des racines à la place de l'inconnue, tous les produits ſe détruiront toujours.

C'eſt la raiſon pourquoi on forme les équations par la multiplication des équations ſimples, dont le ſecond membre eſt zero, & non pas par la multiplication des équations ſimples, dont le premier membre auroit l'inconnue, & le ſecond

membre sa racine ; car en les formant de cette seconde maniere, l'inconnue ne représenteroit pas dans l'équation chacune des racines, comme elle les représente en formant l'équation de la premiere maniere.

2°. Chaque racine est la valeur de l'inconnue dans une équation composée, aussi bien que dans les équations simples.

3°. Les valeurs de l'inconnue dans une équation composée, & les racines de l'équation composée étant la même chose, l'inconnue d'une équation composée a autant de valeurs que l'équation a de degrez. Ainsi dans une équation du second degré, l'inconnue a deux valeurs : elle en a trois dans une équation du troisiéme degré ; & ainsi des autres.

33. 4°. L'on a deux moyens pour reconnoître quand une grandeur est la valeur de l'inconnue, ou une racine de l'équation : Le premier, lorsqu'en divisant l'équation composée par une équation simple, qui a la même inconnue lineaire moins cette grandeur, quand elle est une valeur positive, & plus cette grandeur, quand elle est une valeur négative ; la division est exacte, c'est-à-dire sans reste. Le second, lorsqu'en substituant cette grandeur, à la place de l'inconnue, dans l'équation, avec le signe + lorsqu'elle est positive, avec le signe — lorsqu'elle est négative, tous les produits de l'équation se détruisent par des signes contraires, c'est-à-dire sont égaux à zero.

THEORÊME V.

34. LORSQUE dans une équation composée le premier terme n'a pas d'autre coëficient que l'unité, & qu'il n'y a ni fractions, ni incommensurables, aucune des racines réelles de l'équation n'est une fraction.

DÉMONSTRATION.

SI quelqu'une des racines réelles étoit une fraction, quelqu'une des équations simples par la multiplication desquelles l'équation composée est formée, auroit pour sa racine une fraction. Or s'il y en avoit quelqu'une, l'équation composée en auroit aussi ; & pour l'ôter, il auroit falu multiplier tous les termes de l'équation par le dénominateur de cette fraction, ce qui auroit donné necessairement un coëficient au premier terme, different de l'unité, contre la supposition.

Démonstration particuliere pour les équations numeriques.

SI une fraction pouvoit être la racine d'une équation numerique, dont le premier terme n'a pas d'autre coëficient que l'unité, & où il n'y a ni fractions, ni incommensurables, il est certain par le quatriéme Theorême, que cette fraction & ses puissances étant substituées à la place de l'inconnue & de ses puissances, tous les termes de l'équation se détruiroient après la substitution.

Pour rendre la démonstration plus claire & plus generale, on supposera une équation du troisiéme degré $x^3 - nxx + px - q = 0$, où les coëficiens n, p, q, représentent des nombres; & on supposera que la fraction à substituer est représentée par $\frac{ac}{bc}$, qui étant réduite aux moindres termes, est $\frac{a}{b}$. Qu'on substitue la fraction $\frac{ac}{bc}$ à la place de l'inconnue, on aura $\frac{a^3c^3}{b^3c^3} - \frac{aacc}{bbcc}n + \frac{ac}{bc}p - q = 0$, & par transposition $\frac{a^3c^3}{b^3c^3} = \frac{aacc}{bbcc}n - \frac{ac}{bc}p + q$.

Réduisant les fractions à l'exposant, l'on aura $\frac{a^3}{b^3} = \frac{aa}{bb}n - \frac{a}{b}p + q$.

Multipliant chaque membre par bb, on aura $\frac{a^3}{b} = aan - abp + bbq$.

Il est certain que le second membre de cette égalité est un nombre entier; ainsi la fraction $\frac{a^3}{b}$ est égale à un nombre entier.

Mais par ce qui est démontré dans les proportions, la fraction $\frac{a}{b}$ étant supposée dans les moindres termes, le numerateur a^3 de la fraction $\frac{a^3}{b}$, n'a aucun diviseur commun avec le dénominateur b; ainsi la fraction $\frac{a^3}{b}$ est dans les moindres termes, & ne sçauroit être égale à un nombre entier.

Par consequent en supposant qu'une fraction peut être la racine d'une équation, dont le premier terme n'a que l'unité pour coëficient, & qui n'a ni fractions, ni incommensurables, cela conduit à cette absurdité, qu'une fraction réduite aux moindres termes, peut être égale à un nombre entier: Il ne se peut donc pas faire, qu'une fraction soit la racine d'une telle équation.

COROLLAIRE.

55. LORSQU'UNE équation composée n'a ni fractions, ni incommensurables, que son premier terme n'a que l'unité

pour coëficient, & que ses racines sont réelles; si des grandeurs entieres ne sont pas ses racines, ses racines sont incommensurables.

Car ses racines réelles ne peuvent être que des grandeurs entieres, ou des fractions, ou des incommensurables; on suppose qu'il n'y a pas de grandeurs entieres qui soient les racines de l'équation; on vient de démontrer qu'elles ne peuvent être des fractions; par consequent il faut qu'elles soient incommensurables.

REMARQUE.

AU lieu de supposer dans les équations lineaires, dont une équation composée est le produit, l'inconnue x positive; si on la suppose négative $-x$, comme dans cet exemple $-x - a = 0$, $-x + b = 0$, l'on aura une équation composée $xx + ax - ab = 0$, dans laquelle les racines qui étoient
$-bx$,
positives dans la supposition de $+x$, seront négatives, & les négatives seront positives. Car puisque $-x - a = 0$, l'on aura $x = -a$; & puisque $-x + b = 0$, l'on aura $x = b$.

COROLLAIRE.

D'OÙ il suit qu'en changeant dans une équation composée tous les signes des termes, où la puissance de l'inconnue est impaire, comme x, x^3, x^5, &c. sans toucher aux autres, toutes les racines positives seront changées en négatives, & les négatives en positives.

SECTION III.

De la transformation des équations composées.

DÉFINITION.

QUAND on change une équation en une autre du même degré, qui a une inconnue differente de l'inconnue de la premiere, & dont toutes les racines ont un raport connu avec les racines de la premiere, ce changement s'appelle *transformation*; & la seconde équation s'appelle la *transformée* de la premiere.

Il est évident que les racines de la tranformée étant connues, elles feront connoître les racines de l'équation dont elle est la transformée.

PROBLÊME I.

Qui contient toutes les transformations.

36. TRANSFORMER une équation proposée ; par exemple, $x^3 - nxx + px - q = 0$, ou son équivalente

$$\begin{array}{llll} x^3 & - axx & + abx & \\ & - bxx & + acx & \\ & - cxx & + bcx & - abc = 0, \end{array}$$

en une autre équation dont les racines soient, 1°. celles de la proposée, augmentées chacune d'une grandeur connue, telle qu'on voudra, comme f; 2°. ou bien diminuées chacune d'une grandeur connue f; 3°. ou bien retranchées elles-mêmes chacune d'une grandeur connue f; 4°. ou bien multipliées chacune par une grandeur connue f; 5°. ou bien divisées chacune par une grandeur connue f; 6°. ou bien de maniere que les valeurs de l'inconnue de la transformée soient les racines 2es, 3es, &c. ou les puissances 2es, 3es, &c. des racines de la proposée ; 7°. ou bien de maniere que les valeurs de l'inconnue de la transformée soient moyennes proportionnelles entre une grandeur connue f, & les racines de la proposée ; 8°. ou bien de maniere que les racines de la proposée soient les quatriémes proportionnelles aux racines de la transformée, à une grandeur connue, & à l'unité, ou bien à une seconde grandeur connue ; 9°. ou bien de maniere que les racines de la proposée soient égales aux racines de la transformée, plus ou moins une grandeur connue, divisée ou multipliée par les racines de la transformée, ou par quelque multiple de ces racines ; 10°. ou bien enfin de maniere que les racines de la transformée ayent avec celles de la proposée tel raport qu'on voudra, comme celui de f à g.

MÉTHODE.

1° IL faut prendre une seconde inconnue y, qui représente chaque racine de la transformée, & se servir de l'inconnue x, de la proposée, pour en marquer chaque racine, & faire une équation qui exprime le raport qui doit être entre les racines de la proposée & celles de la transformée.

2°. Il faut prendre dans cette équation la valeur de l'inconnue x de la proposée, & substituer cette valeur & ses puissances à la place de l'inconnue x & de ses puissances dans la proposée.

L'équation qu'on trouvera étant ordonnée & abregée, sera la transformée qu'on cherche.

I. Pour augmenter les racines de la proposée de la grandeur f.

ON supposera l'inconnue y pour exprimer les racines de la tranformée; & se servant de l'inconnue x de la proposée, on fera l'équation $x+f=y$, qui exprime que la racine x de la proposée étant augmentée de la grandeur connue f, est égale à la racine y de la transformée.

On prendra dans cette équation la valeur de x, qui est $x=y-f$.

On substituera cette valeur & ses puissances à la place de x & de ses puissances dans la proposée $x^3-nxx+px-q=0$.

$$\begin{array}{rcllll} x^3 & = & y^3 & -3fyy & +3ffy & -f^3 \\ -nxx & = & & -nyy & +2nfy & -nff \\ +px & = & & & +py & -pf \\ -q & = & & & & -q. \\ \hline & & y^3 & -3fyy & +3ffy & -f^3=0. \\ & & & -nyy & +2nfy & -nff \\ & & & & +py & -pf \\ & & & & & -q. \end{array}$$

& l'on trouvera l'équation transformée, dont les racines sont celles de la proposée, augmentées chacune de la grandeur f.

Quand on aura la valeur de y dans la transformée, on la substituera dans $x=y-f$, à la place de y, & l'on aura la valeur de x de la proposée.

II. Pour diminuer les racines de la proposée de la grandeur f.

ON supposera $x-f=y$, d'où l'on déduira $x=y+f$; on substituera $y+f$ à la place de x, & les puissances de $y+f$ à la place des puissances de x, dans la proposée.

$$\begin{array}{rcllll} x^3 & = & y^3 & +3fyy & +3ffy & +f^3 \\ -nxx & = & & -nyy & -2fny & -nff \\ +px & = & & & +py & +pf \\ -q & = & & & & -q. \\ \hline & & y^3 & +3fyy & +3ffy & +f^3=0. \\ & & & -nyy & -2nfy & -nff \\ & & & & +py & +pf \\ & & & & & -q. \end{array}$$

& l'on trouvera la transformée, dont les racines sont celles de la proposée, diminuées chacune de la grandeur f.

III. Pour trouver la transformée, dont les racines y *soient celles de la proposée, retranchées de la grandeur* f.

ON supposera $f - x = y$; d'où l'on déduira $f - y = x$; on substituera $f - y$ & ses puissances, à la place de x & des puissances de x, dans la proposée

$$\begin{array}{lcl} x^3 & = & f^3 - 3ffy + 3fyy - y^3 \\ -nxx & = & -nff + 2nfy - nyy \\ +px & = & +pf - py \\ -q & = & -q. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} f^3 - 3ffy + 3fyy - y^3 = 0. \\ -nff + 2nfy - nyy \\ +pf - py \\ -q. \end{array}$$

& l'on trouvera la transformée, dont les racines sont celles de la proposée, retranchées chacune de la grandeur f.

IV. Pour trouver la transformée, dont les racines y *soient celles de la proposée, multipliées par la grandeur* f.

ON supposera $fx = y$, d'où l'on déduira $x = \frac{y}{f}$; on substituera $\frac{y}{f}$ & ses puissances à la place de x & de ses puissances, dans la proposée; & l'on trouvera $\frac{y^3}{f^3} - \frac{nyy}{ff} + \frac{py}{f} - q = 0$.

Otant les fractions, on aura la transformée $y^3 - nfyy + pffy - f^3q = 0$, dont les racines sont celles de la proposée, multipliées par f.

Abregé de la transformation précedente.

POUR multiplier les racines d'une équation par une grandeur f, il faut simplement changer l'inconnue x en une nouvelle inconnue y; & sans toucher au premier terme, multiplier le second par la grandeur f, le troisiéme par ff, le quatriéme par f^3; & ainsi de suite.

V. Pour trouver la transformée, dont les racines y *soient celles de la proposée, divisées par la grandeur* f.

ON supposera $\frac{x}{f} = y$, d'où l'on déduira $x = fy$; on substituera fy & ses puissances à la place de x & de ses puissances

dans la proposée ; & l'on trouvera $f^3y^3 - nffyy + pfy - q = 0$; divisant l'équation par f^3, on aura la transformée $y^3 - \frac{nyy}{f} + \frac{py}{ff} - \frac{q}{f^3} = 0$, dont les racines sont celles de la proposée divisées par f.

Abregé.

POUR diviser les racines d'une équation par une grandeur f, il faut simplement changer l'inconnue x en y ; & sans toucher au premier terme, diviser le second par f, le troisiéme par ff, le quatriéme par f^3 ; & ainsi de suite.

VI. Pour trouver une transformée, dans laquelle les valeurs de y *soient les racines secondes, troisiémes, &c. des racines de la proposée.*

ON supposera $\sqrt{x} = y$, ou bien $\sqrt[3]{x} = y$, &c. d'où l'on déduira $x = yy$, ou bien $x = y^3$, &c. on substituera yy, ou y^3 & les puissances de yy ou de y^3, à la place de x & de ses puissances, dans la proposée ; & l'on trouvera la transformée $y^6 - ny^4 + pyy - q = 0$; ou bien $y^9 - ny^6 + py^3 - q = 0$; les valeurs de y dans la premiere, sont les racines quarrées des racines de la proposée ; les valeurs de y dans la seconde, sont les racines troisiémes des racines de la proposée.

Si la proposée étoit $x^6 - nx^4 + pxx - q = 0$, ou bien $x^9 - nx^6 + px^3 - q = 0$, en supposant pour la premiere $xx = y$, & pour la seconde $x^3 = y$, l'on trouveroit la transformée $y^3 - nyy + py - q = 0$, dont les racines seroient les quarrez des valeurs de x dans la premiere proposée, & les cubes des valeurs de x dans la seconde.

VII. Pour trouver une transformée dans laquelle les valeurs de l'inconnue y *soient moyennes proportionnelles entre une grandeur connue* f, *& les racines de la proposée.*

ON supposera $y = \sqrt{fx}$, d'où l'on déduira $yy = fx$, & $x = \frac{yy}{f}$; on substituera cette valeur de x & ses puissances à la place de x & de ses puissances dans la proposée ; & l'on trouvera la transformée $y^6 - nfy^4 + pffyy - qf^3 = 0$, dans laquelle les valeurs de y sont moyennes proportionnelles entre f & les racines de la proposée $x^3 - nxx + px - q = 0$.

VIII. Pour trouver une transformée de maniere que y . f :: 1 . x.

ON supposera $x = \frac{f}{y}$; & par substitution on trouvera la transformée $f^3 - nffy + pfyy - qy^3 = 0$, & par transposition

tion $qy^3 - pfyy + nffy - f^3 = 0$; & divisant le tout par q, $y^3 - \frac{pfyy + nffy - f^3}{q} = 0$, sera la transformée qu'on cherche.

IX. Pour trouver la transformée de $x^3 - pxx - q = 0$, *qui soit telle que les racines* x *de la proposée soient égales à celles de la transformée plus ou moins une grandeur connue divisée ou multipliée par les racines de la transformée, ou par un multiple de ces racines.*

PAR exemple, pour trouver la transformée de $x^3 - px \pm q = 0$, qui soit telle que $x = y + \frac{p}{3y}$, on substituera $y + \frac{p}{3yy}$, & son cube à la place de x, x^3;

$$x^3 = y^3 + py + \frac{pp}{3y} + \frac{p^3}{27y^3}$$
$$-px = \quad -py - \frac{pp}{3y}$$
$$\pm q = \qquad\qquad \pm q.$$

& l'on trouvera $y^3 \; * \; * \pm q + \frac{p^3}{7y^3} = 0$;
multipliant le tout par y^3, l'on aura $y^6 \pm qy^3 + \frac{p^3}{27} = 0$, pour la transformée qu'on cherche. Cette transformée n'est que du second degré.

Si la proposée étoit $x^3 + px \pm q = 0$, on supposeroit $x = y - \frac{p}{3y}$, & l'on trouveroit la transformée $y^6 \pm qy^3 - \frac{p^3}{27} = 0$.

REMARQUE.

CETTE derniere transformation sert à réduire toutes les équations du troisiéme degré qui n'ont point le second terme à une transformée du second degré.

Quand on aura trouvé la valeur de y dans la transformée, on substituera cette valeur dans l'équation $x = y \pm \frac{p}{3y}$, & l'on aura la valeur de x; c'est-à-dire, l'on connoîtra une des racines de la proposée.

X. Pour trouver une transformée dont les racines ayent tel raport qu'on voudra avec celles de la proposée, par exemple, celui de f *à* g.

ON supposera $f . g :: y . x$, d'où l'on déduira $x = \frac{gy}{f}$; on substituera cette valeur & ses puissances à la place de x & de ses puissances dans la proposée $x^3 - nxx + px - q = 0$; & l'on trouvera la transformée $y^3 - \frac{nfyy}{g} + \frac{pffy}{gg} - \frac{f^3q}{g^3} = 0$, qui est celle qu'on cherchoit.

Démonſtration du Problême.

POUR démontrer ce Problême, il ne faut faire attention qu'aux équations ſimples dont une équation compoſée eſt le produit.

Soient $x - a = 0$. $x - b = 0$, les équations ſimples de l'équation compoſée $\begin{array}{l} xx - ax + ab = 0 \\ - bx \end{array}$, qu'on veut transformer.

Il eſt évident que les équations ſimples de la transformée, dont les racines ſeront les racines de la propoſée, augmentées de f, ſeront $y - f - a = 0$. $y - f - b = 0$; car la premiere donne $y = a + f$; la ſeconde donne $y = b + f$.

Les équations ſimples de la transformée, dont les racines ſeront celles de la propoſée, diminuées de f, ſeront $y + f - a = 0$. $y + f - b = 0$; car la premiere donne $y = a - f$; la ſeconde donne $y = b - f$.

Il en eſt de même des autres transformations.

Il eſt auſſi évident qu'en ſubſtituant $y - f$, ou bien $y + f$, au lieu de x, dans les équations ſimples de la propoſée $x - a = 0$, $x - b = 0$, l'on aura après la ſubſtitution, les équations ſimples de la transformée $y - f - a = 0$, $y - f - b = 0$, &c.

Mais il eſt clair qu'en ſubſtituant $y - f$, par exemple, à la place de x; & le quarré de $y - f$ à la place de xx, dans l'équation $\begin{array}{l} xx - ax + ab = 0 \\ - bx \end{array}$, qui eſt le produit des ſimples $x - a = 0$, $x - b = 0$, l'on a le même produit qu'on auroit en multipliant les ſimples $y - f - a = 0$, $y - f - b = 0$, dans leſquelles les ſimples $x - a = 0$, $x - b = 0$, ont été changées par la ſubſtitution de $y - f$, à la place de x: Et ce produit eſt évidemment l'équation transformée. L'on a donc par la méthode du Problême, la transformée qu'on cherche.

Corollaires, qui ſuivent des trois premieres transformations.

I.

Il ſuit de cette démonſtration, que s'il y avoit des racines imaginaires dans une équation, elles demeureroient encore imaginaires dans ſa transformée.

II.

37. Quand il y a des racines poſitives & négatives dans l'équa-

tion qu'on transforme en une autre, dont les racines ſont celles de la propoſée, augmentée d'une grandeur connue f; en ſubſtituant $y-f$ à la place de x; il eſt évident qu'il n'y a que les racines poſitives qui ſoient augmentées dans la transformée, & que les négatives y ſont diminuées de la grandeur f; car ſi les équations ſimples, dont la propoſée eſt le produit, ſont $x-a=0$, $x+b=0$, en ſubſtituant $y-f$ à la place de x dans ces équations, l'on aura $y-f-a=0$, $y-f+b=0$, qui ſont les équations ſimples, dont la transformée eſt le produit; & il eſt évident que $y-f-a=0$, donne $y=a+f$, dans laquelle la racine poſitive a eſt augmentée de f; & que $y-f+b=0$, donne $y=-b+f$, dans laquelle la racine négative $-b$, eſt diminuée de la grandeur $+f$.

D'où il ſuit que ſi la grandeur f eſt égale à une des racines négatives, cette racine devient égale à zero; ſon produit par toutes les autres, qui fait le dernier terme de la transformée, devient par conſequent égal à zero; & la transformée peut s'abaiſſer d'un degré.

Si la grandeur f ſurpaſſe toutes les racines négatives de la propoſée, elles deviennent toutes poſitives dans la transformée; & alors la transformée ne contenant que des racines poſitives, tous ces termes ont alternativement les ſignes $+$ & $-$.

D'où l'on voit que ſi tous les termes de la transformée ont alternativement $+$ & $-$, on eſt aſſuré que la grandeur f ſurpaſſe toutes les racines négatives de la propoſée; & quand cette alternative eſt interrompue, on eſt aſſuré que f ne ſurpaſſe pas toutes les racines négatives de la propoſée, puiſqu'il en reſte quelqu'une; & dans ce cas f eſt moindre que la plus grande des racines négatives de la propoſée.

Dans le cas où f ſurpaſſe toutes les racines négatives de la propoſée, & où par conſequent toutes les racines de la transformée ſont poſitives, il eſt évident que la plus petite des racines de la transformée, répond à la plus grande des négatives de la propoſée, qui eſt devenue poſitive. Car le ſurplus de la grandeur f ſur les racines négatives de la propoſée, eſt préciſément ce qui fait que ces négatives deviennent poſitives dans la transformée; & le ſurplus de f ſur la plus grande des racines négatives de la propoſée, eſt le moindre

de tous ; ainsi la moindre racine de la transformée est celle qui répond à la plus grande des négatives de la proposée.

D'où il est évident que les racines positives de la transformée, moindres que f, sont celles des racines négatives de la proposée, qui sont devenues positives dans la transformée.

Enfin lorsque f est moindre que chacune des racines négatives de la proposée, ces racines demeurent négatives dans la transformée.

III.

38. Lorsqu'il y a des racines positives & négatives dans une équation, & que par la substitution de $y+f$ à la place de x, on la transforme en une autre, dont les racines sont celles de la proposée, diminuées chacune de la grandeur f, il est évident qu'il n'y a que les racines positives qui soient diminuées de la grandeur f, & que les négatives sont augmentées de la grandeur f. Car si les équations simples de la proposée sont $x-a=0$, $x+b=0$; en substituant $y+f$ à la place de x dans ces équations, l'on aura $y+f-a=0$, $y+f+b=0$, qui sont les équations simples dont la transformée est le produit ; & il est évident que $y+f-a=0$, donne $y=a-f$, dans laquelle la racine positive a est diminuée de la grandeur f; & que $y+f+b=0$, donne $y=-b-f$, dans laquelle la racine négative est augmentée (dans sa négation) de la grandeur $-f$.

D'où il suit que si f est égale à une des racines positives de la proposée, cette racine devient égale à zero dans la transformée ; & par consequent le dernier terme de la transformée, qui est le produit de cette racine égale à zero par toutes les autres, devient égal à zero ; & l'équation peut être abaissée d'un degré.

Si f surpasse toutes les racines positives, elles deviennent toutes négatives dans la transformée, & dans ce cas tous les termes de la transformée ont le signe $+$.

Ainsi l'on est assuré que f surpasse toutes les racines positives de la proposée, lorsque tous les termes de la transformée ont $+$; mais si quelqu'un a le signe $-$, il reste dans la transformée quelque racine positive, & l'on est assuré que f est moindre que la plus grande racine positive de la proposée ; on suppose que toutes les racines sont réelles.

Quand tous les termes de la transformée ont le ſigne +, c'eſt-à-dire quand f ſurpaſſe toutes les racines poſitives de la propoſée, la plus petite des racines de la transformée répond à la plus grande des poſitives de la propoſée, qui eſt devenue négative dans la transformée; car le ſurplus de f ſur les racines poſitives de la propoſée, eſt preçiſément ce qui fait que ces racines poſitives deviennent négatives dans la transformée, & le ſurplus de f ſur la plus grande des racines poſitives de la propoſée, eſt le moindre de tous.

D'où il eſt évident que les racines négatives de la transformée moindres que f, ſont celles des raçines poſitives de la propoſée, qui ſont devenues négatives dans la transformée.

Enfin quand f eſt moindre que chacune des racines poſitives de la propoſée, ces racines demeureront poſitives dans la transformée.

IV.

39. Si on ſubſtitue une grandeur connue négative $-f$ dans une équation $x^3 - nxx + px - q = 0$, à la place de l'inconnue x, la ſomme des produits qu'on aura après la ſubſtitution, qui eſt $-f^3 - nff - pf - q$, eſt évidemment le dernier terme tout connu de la transformée, qu'on trouveroit en ſubſtituant dans la propoſée $y - f$ à la place de l'inconnue x, dans laquelle transformée les racines poſitives de la propoſée ſeroient augmentées de la grandeur f, & les négatives diminuées de la même grandeur f.

Et ſi l'on ſubſtitue une grandeur connue poſitive $+f$ dans une équation $x^3 - nxx + px - q = 0$, à la place de l'inconnue x, la ſomme des produits qu'on aura après la ſubſtitution, qui eſt $f^3 - nff + pf - q$, eſt évidemment le dernier terme tout connu de la transformée, qu'on trouveroit en ſubſtituant dans la propoſée $y + f$ à la place de x; dans laquelle transformée les racines poſitives de la propoſée ſeroient diminuées de la grandeur f, & les négatives augmentées de la même grandeur f.

Il n'y a qu'à faire les operations de la premiere & de la ſeconde transformation, pour en voir la démonſtration.

V.

40. Dans la transformée qu'on trouve en ſubſtituant une grandeur connue moins une nouvelle inconnue comme $f - y$, à la place de l'inconnue x de la propoſée, les racines poſitives

de la proposée deviennent négatives, mais chacune est diminuée de la grandeur positive f; & les racines négatives deviennent positives, mais chacune est augmentée de la grandeur f.

Car soient, par exemple, $x - a = 0$, $x + b = 0$, les équations simples de la proposée; en substituant $f - y$ dans ces équations, l'on a les équations simples de la transformée $f - a - y = 0$, $f + b - y = 0$; la premiere donne $y = -a + f$, où l'on voit que la racine a, qui étoit positive dans $x - a = 0$, ou bien $x = a$, est devenue négative, mais diminuée de la positive $+f$: la seconde donne $y = b + f$, où la racine b, qui étoit négative dans $x + b = 0$, ou bien $x = -b$, est devenue positive, mais augmentée de $+f$.

D'où il suit que si la grandeur f est égale à une des racines positives de la proposée, cette racine devient égale à zero, & par consequent le dernier terme de la transformée est zero, & l'équation peut s'abaisser d'un degré.

Si la grandeur f surpasse toutes les racines positives de la proposée, elles deviennent encore toutes positives dans la transformée, puisque l'excès de f sur chacune de ces racines, est une grandeur positive dans les équations simples de la transformée; dans ce cas toutes les racines de la transformée sont positives, & tous ses termes ont alternativement $+$ & $-$.

Si la grandeur f est moindre que toutes les racines positives de la proposée, elles deviennent négatives dans la transformée.

REMARQUE.

EN substituant $f - y = x$, à la place de x, dans $x - a = 0$, $x + b = 0$, l'inconnue y est négative dans les équations simples $f - a - y = 0$, $f + b - y = 0$ de la transformée; ce qui est cause que le premier terme de la tranformée est négatif dans les équations des degrez impairs, c'est-à-dire du troisiéme, cinquiéme, &c.

Il est facile de rendre l'inconnue y positive dans les équations simples de la transformée; car puisque $f - a - y = 0$, & $f + b - y = 0$, par transposition l'on aura $y + a - f = 0$, $y - b - f = 0$; & les valeurs de y seront les mêmes qu'elles étoient avant la transposition, puisque $y + a - f = 0$, donne $y = -a + f$, aussi bien que $f - a - y = 0$; & $y - b - f = 0$, donne $y = b + f$, aussi bien que $f + b - y = 0$;

& par cette transposition, le premier terme de la transformée sera toujours positif dans les équations des degrez impairs. Il suffira dans la pratique, après avoir trouvé la transformée par la substitution de $f-y$, au lieu de x, dans la proposée, de transposer le premier membre de la transformée des degrez impairs dans le second, & zero qui est dans le second, dans le premier; ce qui se fait en changeant les signes de tous les termes.

SECTION IV.

Où l'on explique plusieurs usages des transformations qui servent à préparer les équations composées.

PROBLÊME II.

41. *OTER le second terme d'une équation composée, c'est-à-dire, la transformer en une autre qui n'ait pas de second terme.*

IL faut supposer l'inconnue x de la proposée, égale à une nouvelle inconnue y, plus ou moins le coëficient du second terme de la proposée, divisé par le nombre qui exprime le degré de l'équation proposée; c'est-à-dire par 2, si elle est du second degré; par 3, si elle est du troisiéme; plus, si le second terme de la proposée a le signe $-$; & moins, s'il a le signe $+$.

Il faut substituer cette valeur de x, & ses puissances, à la place de x & de ses puissances, dans la proposée; & l'on aura la transformée, où le second terme manque.

EXEMPLE I.

POUR ôter le second terme de $xx-nx+p=0$, on supposera $x=y+\frac{n}{2}$; on substituera dans la proposée $y+\frac{n}{2}$, & son quarré, à la place de x, xx,

$$\begin{array}{rcl} xx & = & yy+ny+\frac{nn}{4} \\ -nx & = & \quad -ny-\frac{nn}{2} \\ +p & = & \qquad\quad +p. \\ \hline & & yy \;\; * \;-\frac{nn}{4}=0 \\ & & \qquad\quad +p. \end{array}$$

& l'on trouvera cette transformée, qui n'a pas de second terme.

REMARQUE.

TOUTES les équations du ſecond degré peuvent être réſolues par ce Problême; car par tranſpoſition, l'on aura $yy = \frac{nn}{4} - p$; & tirant la racine quarrée de chaque membre on aura $y = \sqrt{\frac{nn}{4} - p}$; & ſubſtituant cette valeur de y dans $x = y + \frac{n}{2}$, l'on aura $x = \frac{n}{2} + \sqrt{\frac{nn}{4} - p}$, qui eſt une racine de la propoſée.

EXEMPLE II.

POUR ôter le ſecond terme de $x^3 + nxx - px - q = 0$, on ſuppoſera $x = y - \frac{n}{3}$; on ſubſtituera dans la propoſée $y - \frac{n}{3}$, & ſes puiſſances à la place de x & de ſes puiſſances,

$$\begin{array}{rcllll} x^3 & = & y^3 & - nyy & + \frac{nny}{3} & - \frac{n^3}{27} \\ + nxx & = & & + nyy & - \frac{2nny}{3} & + \frac{n^3}{9} \\ - px & = & & & - py & + \frac{np}{3} \\ - q & = & & & & - q. \\ \hline \end{array}$$

& l'on trouvera cette transformée, qui n'a pas de ſecond terme.

$$\begin{array}{llll} y^3 & * & - \frac{nny}{3} & + \frac{2n^3}{27} = 0, \\ & & - py & + \frac{np}{3} \\ & & & - q \end{array}$$

Si l'on trouve la valeur de y dans la transformée, en la ſubſtituant dans $x = y - \frac{n}{3}$, l'on aura la valeur de x; c'eſt-à-dire, l'on aura une racine de la propoſée.

La démonſtration de ce Problême eſt évidente, ſi l'on fait attention dans le dernier exemple, que le ſecond terme de la troiſiéme puiſſance de $y - \frac{n}{3}$, eſt $- nyy$; que $+ nxx$ donne, après la ſubſtitution, $+ nyy$, &c. que ces deux grandeurs font ſeules le ſecond terme de la transformée, & qu'elles ſe détruiſent toujours par des ſignes contraires, parceque l'on ſuppoſe toujours $x = y - \frac{n}{3}$, quand il y a dans la propoſée $+ nxx$; & $x = y + \frac{n}{3}$, quand il y a dans la propoſée $- nxx$.

Il eſt facile d'appliquer ce raiſonnement aux équations de tous les degrez.

Si on veut le voir ſur un exemple general, on ſe ſervira de $x^m \pm nx^{m-1}$, pour repréſenter les deux premiers termes des équations de tous les degrez : Il ſuffit de conſiderer les deux premiers termes dans ce Problême : m ſera égal à 2

dans

dans les équations du second degré ; m sera égal à 3 dans celles du troisiéme degré, &c. En supposant $x = y \mp \frac{n}{m}$, les deux premiers termes de $y \mp \frac{n}{m}$, élevée à la puissance m, seront $y^m \mp ny^{m-1}$; $\pm nx^{m-1}$, sera égal à $\pm ny^{m-1}$, &c. Il est évident que $\mp ny^{m-1} \pm ny^{m-1}$, qui sont les seules grandeurs qui font le second terme de la transformée, se détruisent par des signes contraires.

REMARQUE.

On peut aussi ôter le second terme d'une équation, en supposant, pour les équations du second degré, $x = \frac{n}{2} - y$, quand le second terme de la proposée a —, & en supposant $x = -\frac{n}{2} - y$, quand le second terme a + ; en supposant pour le troisiéme degré $x = \frac{n}{3} - y$, quand le second terme de la proposée a —, & $x = -\frac{n}{3} - y$, quand il a +, &c. & faisant ensuite la substitution.

On peut encore ôter le second terme d'une équation, en supposant, pour le second degré, $x = \frac{y}{2} - \frac{n}{2}$, quand le second terme de la proposée a + ; en supposant $x = \frac{y}{2} + \frac{n}{2}$, quand il a — ; en supposant pour le troisiéme degré $x = \frac{y}{3} - \frac{n}{3}$, quand le second terme de la proposée a +, & $x = \frac{y}{3} + \frac{n}{3}$, quand il a —, &c. & faisant ensuite la substitution.

Quand on aura trouvé la valeur de y dans la transformée, en la substituant dans l'équation simple supposée $x = \frac{n}{2} - y$, &c. ou $x = \frac{y}{3} - \frac{n}{3}$, &c. on aura la valeur de x.

Si le premier terme de l'équation avoit un coëficient different de l'unité, comme dans l'équation $ax^3 - nxx + px - q = 0$, on pourroit en faire évanouir le second terme, en supposant $x = \frac{y}{a} + \frac{n}{3a}$, car on auroit

$$\begin{array}{llllll}
ax^3 & = \frac{y^3}{aa} & + \frac{n}{aa}yy & + \frac{nn}{3aa}y & + \frac{n^3}{27aa} & \\
-nxx & = & - \frac{n}{aa}yy & - \frac{2nn}{3aa}y & - \frac{n^3}{9aa} & \\
+px & = & & + \frac{p}{a}y & + \frac{n}{3a}p & \\
-q & = & & & -q & \\
\hline
& \frac{y^3}{aa} & * & - \frac{nn}{3aa}y & - \frac{2n^3}{27aa} & = 0. \\
& & & + \frac{p}{a}y & + \frac{n}{3a}p & \\
& & & & -q &
\end{array}$$

Cette transformée n'a pas de second terme ; multipliant toutes les grandeurs par aa, on auroit

$$\begin{array}{l} y^3 - \frac{1}{3}nny - \frac{2n^3}{27} = 0. \\ \quad + apy \quad + \frac{a}{3}np \\ \qquad\qquad - aaq \end{array}$$

dans laquelle le premier terme n'a pas d'autre coëficient que l'unité.

Si l'équation étoit du second degré comme $axx - nx + p = 0$, il faudroit supposer $x = \frac{y}{a} + \frac{n}{2a}$.

Si elle étoit du quatriéme, comme $ax^4 - nx^3 +$ &c. il faudroit supposer $x = \frac{y}{a} + \frac{n}{4a}$; & ainsi des autres.

PROBLÊME III.

TROUVER par Analyse quelle doit être la grandeur propre à ôter le second terme d'une équation, par exemple de $x^3 + nxx + px - q = 0$.

JE suppose que cette grandeur inconnue est z, ainsi je suppose $x = y - z$, lorsque le second terme de la proposée a $+$, & $x = y + z$, lorsqu'il a $-$: Je substitue $y - z$ & ses puissances, à la place de x & de ses puissances

$$\begin{array}{llllll} x^3 & = y^3 & - 3zyy & + 3zzy & - z^3 \\ + nxx & = & + nyy & - 2nzy & + nzz \\ + px & = & & + py & - pz \\ - q & = & & & - q. \\ \hline & y^3 & - 3zyy & + 3zzy & - z^3 & = 0. \end{array}$$

& je trouve cette transformée.

$$\begin{array}{lllll} y^3 & - 3zyy & + 3zzy & - z^3 & = 0. \\ & + nyy & - 2nzy & + nzz \\ & & + py & - pz \\ & & & - q \end{array}$$

Je suppose son second terme $- 3zyy + nyy = 0$, ce qui me donne $n = 3z$, & $\frac{n}{3} = z$; cela me fait voir que $\frac{n}{3}$ est la grandeur, qui étant substituée dans $x = y - z$, à la place de z, me donnera $x = y - \frac{n}{3}$, qui est propre à faire évanouir le second terme, en substituant $y - \frac{n}{3}$ & ses puissances dans la proposée à la place de x & de ses puissances.

Pour résoudre le Problême d'une maniere generale, on supposera que $x^m \pm nx^{m-1}$, représentent les deux premiers termes de toutes les équations, $m = 2$ dans le second degré, $m = 3$ dans le troisiéme, &c. On supposera $x = y \mp z$, &

l'on aura les deux premiers termes de $x = y \mp z$, élevez à la puiſſance m, $x^m = y^m \mp mzy^{m-1}$, &c.
L'on aura auſſi $\pm nx^{m-1} = \pm ny^{m-1}$, &c.
L'on ſuppoſera le ſecond terme de la transformée $\mp mzy^{m-1} \pm ny^{m-1} = 0$, & l'on aura $\pm z = \pm \frac{n}{m}$; ce qui fait voir que pour ôter le ſecond terme, il faut ſuppoſer $x = y \mp \frac{n}{m}$, & faire enſuite la ſubſtitution.

COROLLAIRE I.

42. SI l'on vouloit faire évanouir le troiſiéme terme de la propoſée $x^3 + nxx + px - q = 0$, & non pas le ſecond, on ſe ſerviroit de la même méthode, & l'on ſuppoſeroit le troiſiéme terme de la transformée $3zzy - 2nzy + py = 0$; ce qui donneroit l'équation du ſecond degré $zz - \frac{2}{3}nz + \frac{1}{3}p = 0$, laquelle étant réſolue, donneroit la valeur de $z - \frac{1}{3}n + \sqrt{\frac{1}{9}nn - \frac{1}{3}p}$. Subſtituant cette valeur de z dans $x = y - z$, l'on auroit $x = y - \frac{1}{3}n - \sqrt{\frac{1}{9}nn - \frac{1}{3}p}$. Subſtituant cette valeur de x & ſes puiſſances dans la propoſée, à la place de x & de ſes puiſſances, on auroit une transformée, qui n'auroit pas de troiſiéme terme.

REMARQUE.

43. CETTE méthode ne peut pas ſervir à faire évanouir le quatriéme terme, ni les autres ſuivans, parceque l'équation qu'elle donneroit pour faire trouver la valeur de z propre à faire évanouir le quatriéme terme, ſeroit du troiſiéme degré; celle qu'elle donneroit pour faire trouver la valeur de z propre à faire évanouir le cinquiéme terme, ſeroit du quatriéme degré; & ainſi de ſuite : Et l'on n'enſeignera que dans la ſuite la maniere de réſoudre ces équations.

COROLLAIRE II.

LA même méthode peut encore ſervir à faire en ſorte que le coëficient du ſecond terme, ou celui du troiſiéme terme de la propoſée, ſoit une grandeur donnée a, en ſuppoſant le coëficient du ſecond terme de la transformée, qui eſt $-3z + n = a$, ou bien celui du troiſiéme terme, qui eſt $3zz - 2nz + p = a$.

Il faut enſuite trouver la valeur de z dans l'une ou l'autre de ces deux équations, & ſubſtituer cette valeur de z priſe

dans la premiere, si l'on veut que a soit le coëficient du second terme; & prise dans la seconde, si l'on veut que a soit le coëficient du troisiéme terme: il faut, dis-je, substituer cette valeur de z dans l'équation $x = y - z$, & ensuite substituer cette valeur de x dans la proposée; & l'on aura une transformée qui aura la grandeur a pour coëficient de son second, ou bien de son troisiéme terme.

PROBLÊME IV.

44. *LORSQUE tous les termes moyens, ou seulement quelques-uns manquent dans une équation, comme dans* $x^3 - q = 0$, *ou* $x^3 - nxx - q = 0$, *la transformer en une autre, où il ne manque aucun terme, & qui soit même, si l'on veut, plus élevée d'un degré.*

IL faut supposer $x = y -$ ou $+ a$; la lettre a marque une grandeur connue telle qu'on voudra. Il faut substituer $y -$ ou $+ a$, à la place de x dans la proposée, & l'on aura une transformée qui aura tous ses termes.

Si l'on veut que la transformée soit plus élevée d'un degré que la proposée, on multipliera la proposée par x, & l'on substituera dans $x^4 - qx = 0$, $y -$ ou $+ a$, à la place de x; & la quatriéme puissance de $y -$ ou $+ a$, à la place de x^4; & l'on aura la transformée qu'on demande.

PROBLÊME V.

45. *QUAND une équation composée contient des racines négatives, ou seules, ou mêlées avec des positives, la transformer en une autre qui n'ait que des racines positives; c'est-à-dire, quand tous les termes d'une équation composée n'ont pas alternativement + & —, la transformer en une autre, dont tous les termes ayent alternativement + & —.*

PREMIER CAS.

SI tous les termes de la proposée ont +, en changeant tous les signes des termes pairs, c'est-à-dire du second, quatriéme, sixiéme, &c. sans toucher aux autres, tous les termes auront alternativement + & —, & toutes les racines qui étoient
* 30. négatives seront changées en positives.* Ce cas n'a aucune difficulté.

SECOND CAS.

S'IL y a des racines poſitives & négatives dans la propoſée, on prendra le plus grand coëficient négatif, & après l'avoir rendu poſitif, on lui ajoutera l'unité, & l'on ſuppoſera ce coëficient plus l'unité, conſideré comme une ſeule grandeur, moins une nouvelle inconnue y, égal à l'inconnue x de la propoſée.

On ſubſtituera dans la propoſée cette valeur de x, & ſes puiſſances, à la place de x & de ſes puiſſances; & l'on trouvera une transformée, dont tous les termes auront alternativement $+$ & $-$.

EXEMPLE I.

POUR trouver la transformée de $xx - 2x - 3 = 0$, qui ait les ſignes alternatifs $+$ & $-$, on prendra le plus grand coëficient négatif -3 de la propoſée, & après l'avoir rendu poſitif, on lui ajoutera l'unité, & l'on aura $+4$; on ſuppoſera $4 - y = x$; on ſubſtituera $4 - y$, & le quarré de $4 - y$ dans la propoſée, à la place de x, & de xx; & l'on aura la transformée $0 = 5 - 6y + yy$, dans laquelle les ſignes $+$ & $-$ ſont alternatifs.

EXEMPLE II.

SOIT la propoſée $x^3 - 2xx + 3x + 6 = 0$; pour la transformer en une autre, dont tous les termes ayent alternativement $+$ & $-$, on prendra le plus grand coëficient négatif -2, qu'on rendra poſitif; on lui ajoutera l'unité, & l'on aura $+3$. On ſuppoſera $3 - y = x$, & on ſubſtituera $3 - y$ dans la propoſée, à la place de x,

$$\begin{array}{rcl} x^3 & = & +27 - 27y + 9yy - y^3 \\ -2xx & = & -18 + 12y - 2yy \\ +3x & = & +9 - 3y \\ +6 & = & +6 \\ \hline 0 & = & +24 - 18y + 7yy - y^3 \end{array}$$

& l'on trouvera la transformée; $0 = +24 - 18y + 7yy - y^3$
& par tranſpoſition l'on aura $y^3 - 7yy + 18y - 24 = 0$, où tous les termes ont alternativement $+$ & $-$. Quand on aura la valeur de y, en la ſubſtituant dans $3 - y = x$, on aura celle de x.

Préparation pour la démonstration.

POUR rendre la démonstration plus facile, on prendra un exemple seulement du troisiéme degré, & l'on pourra appliquer à tous les degrez ce que l'on dira du troisiéme.

On le prendra Algebrique, c'est-à-dire litteral, pour rendre la démonstration generale. Enfin on supposera tous les coëficiens négatifs, la démonstration de ce cas contenant celle de tous les autres; & l'on supposera premierement que le coëficient du second terme est le plus grand, ensuite que c'est le coëficient du troisiéme, & ainsi de suite, afin qu'on puisse voir tous les cas dans un seul exemple.

Soit l'équation $x^3 - nxx - px - q = 0$, qu'il faut transformer en une autre, dont tous les termes ayent alternativement $+$ & $-$.

1°. Soit $-n$ le plus grand coëficient négatif; l'ayant rendu positif, & augmenté de l'unité, l'on aura $\overline{n+1}$. On regarde $\overline{n+1}$ comme une seule grandeur, & c'est ce qu'on marque par la ligne qui est sur $\overline{n+1}$. Il faut supposer $\overline{n+1} - y = x$, & par la substitution, on trouvera la transformée suivante,

$$\begin{aligned} x^3 &= \overline{n+1}^3 - 3\times\overline{n+1}^2\, y + 3\times\overline{n+1}\, yy - y^3 \\ -nxx &= -n\times\overline{n+1}^2 + 2n\times\overline{n+1}\, y - n\times yy \\ -px &= -p\times\overline{n+1} + p\times y \\ -q &= -q \end{aligned}$$

2°. Soit $-p$ le plus grand coëficient négatif; ainsi il faut supposer $\overline{p+1} - y = x$, & par la substitution on trouvera la transformée suivante,

$$\begin{aligned} x^3 &= \overline{p+1}^3 - 3\times\overline{p+1}^2\, y + 3\times\overline{p+1}\, yy - y^3 \\ -nxx &= -n\times\overline{p+1}^2 + 2n\times\overline{p+1}\, y - n\times yy \\ -px &= -p\times\overline{p+1} + p\times y \\ -q &= -q \end{aligned}$$

3°. Soit $-q$ le plus grand coëficient négatif, il faut supposer $\overline{q+1} - y = x$, & par la substitution on trouvera la transformée suivante,

$$\begin{aligned} x^3 &= \overline{q+1}^3 - 3\times\overline{q+1}^2\, y + 3\times\overline{q+1}\, yy - y^3 \\ -nxx &= -n\times\overline{q+1}^2 + 2n\times\overline{q+1}\, y - n\times yy \\ -px &= -p\times\overline{q+1} + p\times y \\ -q &= -q \end{aligned}$$

Il faut démontrer que dans les trois ſuppoſitions précedentes, les termes de la transformée ont alternativement + & —; il ſuffira de le démontrer dans la ſeule premiere ſuppoſition, où $-n$ eſt ſuppoſé le plus grand coëficient négatif, la même démonſtration pouvant aiſément être appliquée aux deux autres.

Démonſtration du cinquiéme Problême.

IL eſt évident que tous les termes de la plus haute puiſſance de $\overline{n+1} - y$, ont alternativement + & —. C'eſt la même choſe des autres puiſſances de $\overline{n+1} - y$; mais il ſuffit de faire attention aux termes de la plus haute puiſſance.

Il eſt de même évident que chaque terme de la plus haute puiſſance de $\overline{n+1} - y$, fait une partie du terme correſpondant de la transformée; c'eſt-à-dire le terme tout connu de la plus haute puiſſance de $\overline{n+1} - y$, fait une partie du terme tout connu de la transformée, le terme de la plus haute puiſſance de $\overline{n+1} - y$, qui contient y lineaire, fait une partie du terme de la transformée, où y eſt lineaire; & ainſi des autres. Or chaque terme de la plus haute puiſſance de $\overline{n+1} - y$, eſt lui ſeul plus grand que les autres grandeurs du même terme de la transformée, qui pourroient avoir des ſignes contraires à ſon ſigne, comme on le va démontrer. Par conſequent chaque terme de la transformée a le même ſigne que le terme de la plus haute puiſſance de $\overline{n+1} - y$, qui ſe trouve dans ce même terme de la transformée.

Car, 1°. dans le terme tout connu de la transformée, $\overline{n+1}^3$ ſurpaſſe les autres grandeurs qui ont un ſigne contraire dans le même terme; ce qu'on verra clairement en remarquant que $\overline{n+1}^3 = \overline{n+1} \times \overline{n+1}^2$; d'où ôtant $-n \times \overline{n+1}^2$, il eſt évident que le reſte ne ſçauroit être moindre que $+\overline{n+1}^2 = \overline{n+1} \times \overline{n+1}$; d'où ôtant $-p \times \overline{n+1}$, le reſte ne ſçauroit être moindre que $+\overline{n+1}$, puiſque p eſt ſuppoſé moindre que n; ôtant de ce reſte poſitif la grandeur $-q$, qui eſt moindre que n, il eſt évident qu'il y aura un reſte poſitif.

2°. Dans le terme ſuivant, on verra de même que $-3 \times \overline{n+1}^2 y$, ſurpaſſe les autres grandeurs $+2n \times \overline{n+1}\, y + p \times y$, qui ont des ſignes contraires, en concevant $-3 \times \overline{n+1}^2 y = -3 \times \overline{n+1} \times \overline{n+1}\, y$; car en ôtant $+2n \times \overline{n+1}\, y$ de -3

$\times \overline{n+1} \times \overline{n+1}\, y$, il eſt clair que le reſte ne ſçauroit être moindre que $-\overline{n+1}\, y$, d'où ôtant $+p \times y$, il doit reſter une grandeur négative, p étant ſuppoſé moindre que n.

3°. Il eſt évident que dans le terme ſuivant, $+3 \times \overline{n+1}\, yy$ ſurpaſſe $-n \times yy$; Donc chaque terme de la plus haute puiſſance de $\overline{n+1} - y$, ſurpaſſe les autres grandeurs du même terme de la transformée, qui ont des ſignes contraires; ainſi les termes de la transformée ont les mêmes ſignes qu'ont les termes de la plus haute puiſſance de $\overline{n+1} - y$; par conſequent tous les termes de la plus haute puiſſance de $\overline{n+1} - y$, ayant alternativement $+$ & $-$, tous les termes de la transformée ont les mêmes ſignes alternatifs $+$ & $-$. Ce qu'il faloit démontrer.

Il eſt évident que ce ſera la même démonſtration, ſi $-p$ eſt le plus grand coëficient négatif, ou ſi c'eſt $-q$; & qu'elle peut de plus s'appliquer aux equations de tous les degrez.

COROLLAIRES.

I.

IL eſt clair que tous les termes de chaque puiſſance de $\overline{n+1} - y$, ayant alternativement $+$ & $-$, les coëficiens poſitifs qui les multiplient, ne changent point cette alternative dans les termes de la transformée, il n'y a que les négatifs; ainſi les ayant ſuppoſez tous négatifs, la démonſtration convient à tous les cas.

II.

46. Dans la ſuppoſition de $\overline{n+1} - y = x$, la ſubſtitution de $\overline{n+1} - y$, à la place de x dans la propoſée, change toutes
*40. les racines de la propoſée; * les négatives deviennent poſitives dans la transformée, & elles ſont même augmentées chacune de la grandeur $\overline{n+1}$; les poſitives de la propoſée deviennent négatives dans la transformée, mais elles ſont diminuées de la grandeur poſitive $\overline{n+1}$, & elles en ſont tellement diminuées, qu'il y a du ſurplus poſitif ſur chacune, qui les rend encore poſitives dans la transformée; puiſque toutes les racines en ſont poſitives, tous les termes ayant alternativement $+$ & $-$.

III.

47. D'où il ſuit, que puiſqu'il y a du ſurplus du plus grand coëficient

coëficient négatif augmenté de l'unité sur chaque racine positive de la proposée, il faut que le plus grand coëficient négatif de la proposée, rendu positif & augmenté de l'unité, surpasse toutes les racines positives de la proposée.

IV.

48. Si on vouloit trouver une grandeur qui surpassât aussi toutes les racines négatives de la proposée, il n'y auroit qu'à changer les signes de tous les termes pairs, du second, du quatriéme, &c. & alors toutes les racines négatives étant devenues positives par ce changement, le plus grand coëficient négatif de l'équation ainsi changée, étant rendu positif, & augmenté de l'unité, surpasseroit toutes les racines positives de l'équation changée, c'est-à-dire toutes les racines négatives de la proposée.

V.

Si le premier terme d'une équation avoit un coëficient different de l'unité, comme $2x^3 - 2xx + 3x + 6 = 0$, il faudroit diviser le plus grand coëficient négatif -2, rendu positif $+2$, par le coëficient du premier terme qui est 2, & ajouter l'unité au quotient 1, ce qui fait 2, & supposer $2 - y = x$. Il faudroit ensuite substituer $2 - y$, & les puissances de $2 - y$, à la place de x & des puissances de x, dans la proposée, & l'on auroit la transformée $2y^3 - 10yy + 19y - 20 = 0$, dont les termes ont alternativement + & —.

La démonstration est la même que la précedente; car supposant que la proposée est $ax^3 - nxx - px - q = 0$, & que n, par exemple, est le plus grand coëficient négatif, il faut supposer $\frac{n}{a} + 1 - y = x$, ou, ce qui est la même chose, $\frac{n+a}{a} - y = x$; & substituant $\frac{n+a}{a} - y$ à la place de x dans la proposée, on trouvera la transformée suivante,

$$
\begin{aligned}
ax^3 &= + \frac{\overline{n+a}^3}{aa} - \frac{3 \times \overline{n+a}^2}{a} y + 3 \times \overline{n+a} \times yy - ay^3 \\
-nxx &= - \frac{n \times \overline{n+a}^2}{aa} + \frac{2n \times \overline{n+a}}{a} y - nyy \\
-px &= - \frac{p \times \overline{n+a}}{a} + py \\
-q &= -q
\end{aligned}
$$

& l'on démontrera, comme l'on a fait ci-dessus, que les termes de cette transformée ont alternativement + & —.

PROBLÊME VI.

49. *TRANSFORMER une équation en une autre qui ait ces deux conditions; 1°. Que le coëficient du troisiéme terme surpasse le quarré de la moitié du coëficient du second terme. 2°. Que tous les termes ayent alternativement + & —.*

M. DESCARTES se sert de ce Problême pour préparer une équation du sixiéme degré à être construite par la Geometrie.

Soit l'équation proposée $x^6 - nx^5 - px^4 - qx^3 - rxx - sx - t = 0$.

Pour trouver par Analyse la grandeur propre à former la transformée qu'on cherche, soit cette grandeur égale à l'indeterminée z.

Il faut supposer $z - y = x$, & substituer dans la proposée, $z - y$ & ses puissances à la place de x & de ses puissances, & l'on trouvera la transformée suivante,

$$\begin{array}{lcl}
x^6 & = & z^6 - 6z^5y + 15z^4yy - 20z^3y^3 + 15zzy^4 - 6zy^5 + y^6 \\
-nx^5 & = & -nz^5 + 5nz^4y - 10nz^3yy + 10nzzy^3 - 5nzy^4 + ny^5 \\
-px^4 & = & -pz^4 + 4pz^3y - 6pzzyy + 4pzy^3 - py^4 \\
-qx^3 & = & -qz^3 + 3qzzy - 3qzyy + qy^3 \\
-rxx & = & -rzz + 2rzy - ryy \\
-sx & = & -sz + sy \\
-t & = & -t
\end{array}$$

Il faut prendre la moitié du coëficient du second terme de cette transformée; cette moitié est $-3z + \frac{1}{2}n$; & ôter le quarré de cette moitié, qui est $9zz - 3nz + \frac{1}{4}nn$ du coëficient du troisiéme terme, qui est $+15zz - 5nz - p$; & l'on aura le reste $+6zz - 2nz - \frac{1}{4}nn - p$: afin que ce reste soit positif, il faut que $+6zz$ surpasse $-2nz - \frac{1}{4}nn - p$.

Pour trouver la valeur de z qui soit telle que $+6zz$ surpasse $-2nz - \frac{1}{4}nn - p$, il faut auparavant trouver une valeur de z qui soit telle, que $+6zz$ soit égale à $2nz + \frac{1}{4}nn + p$, en feignant cette équation $+6zz = 2nz + \frac{1}{4}nn + p$, qui donne $6zz - 2nz = \frac{1}{4}nn + p$. Divisant chaque membre par 6, l'on aura $zz - \frac{1}{3}nz = \frac{1}{24}nn + \frac{1}{6}p$. Ajoutant à chaque membre $\frac{1}{36}nn$, qui est le quarré de la moitié du coëficient, $\frac{1}{3}n$ du second terme, l'on aura $zz - \frac{1}{3}nz + \frac{1}{36}nn = \frac{5}{72}nn + \frac{1}{6}p$, dont le 1er membre est un quarré qui a pour sa racine $z - \frac{1}{6}n$; ainsi tirant la racine quarrée de chaque membre,

on aura $z - \frac{1}{6}n = \sqrt{\frac{5}{72}nn + \frac{1}{6}p}$, & par tranſpoſition $z = \frac{1}{6}n + \sqrt{\frac{5}{72}nn + \frac{1}{6}p}$; ce qui fait voir qu'en ſuppoſant $z = \frac{1}{6}n + \sqrt{\frac{5}{72}nn + \frac{1}{6}p}$, l'on auroit $6zz = 2nz + \frac{1}{4}nn + p$.

Ainſi en prenant z plus grande que $\frac{1}{6}n + \sqrt{\frac{5}{72}nn + \frac{1}{6}p}$, le reſte du coëficient du troiſiéme terme de la transformée, après en avoir ôté le quarré de la moitié du coëficient du ſecond terme, ſera poſitif; lequel reſte eſt marqué dans la transformée par $+ 6zz - 2nz - \frac{1}{4}nn - p$. L'on a donc déja accompli une des conditions du Problême.

Pour accomplir l'autre, il faut, ſi la valeur de z qu'on vient de trouver, ne ſurpaſſe pas le plus grand coëficient négatif de la propoſée au moins d'une unité, augmenter cette valeur juſqu'à ce que cela arrive: ce qui eſt poſſible.

Enſuite après avoir mis dans $z - y = x$, la valeur de z plus grande 1°. que $\frac{1}{6}n + \sqrt{\frac{5}{72}nn + \frac{1}{6}p}$; 2°. plus grande au moins d'une unité que le plus grand coëficient négatif de la propoſée, il faut ſubſtituer cette valeur moins y, à la place de x dans la propoſée; & l'on trouvera une transformée, dont, 1°. le coëficient du troiſiéme terme ſurpaſſera le quarré de la moitié du coëficient du ſecond terme; 2°. dont les termes auront alternativement + & —. Ce qui étoit propoſé.

Quand on aura trouvé la valeur de y dans la transformée, en la ſubſtituant dans $z - y = x$; comme auſſi la valeur de z, on aura la valeur de l'inconnue x; c'eſt-à-dire on aura une racine de la propoſée.

PROBLÊME VII.

50. *LORSQUE le premier terme d'une équation composée a un coëficient different de l'unité, la transformer en une autre dont le premier terme n'ait que l'unité pour coëficient.*

PAR exemple, transformer l'équation $ax^3 - nxx + px - q = 0$, dont le premier terme a le coëficient a, en une autre dont le premier terme n'ait que l'unité pour coëficient.

1°. Il faut ſuppoſer l'inconnue x de la propoſée, égale à une autre inconnue y, diviſée par le coëficient a du premier terme de la propoſée; & l'on aura $x = \frac{y}{a}$. 2°. Il faut ſubſtituer $\frac{y}{a}$ & ſes puiſſances, dans la propoſée, à la place de x

& de ses puissances; & l'on aura la transformée $\frac{ay^3}{a^3} - \frac{nyy}{aa} + \frac{py}{a} - q = 0$. 3°. Il faut ôter les fractions de cette transformée, & diviser tous les termes par a; & l'on aura la transformée $y^3 - nyy + apy - aaq = 0$, dont le premier terme n'a pas d'autre coëficient que l'unité, & qui est la transformée qu'on cherche.

Si l'on trouve la valeur de y dans la transformée, en la substituant dans $x = \frac{y}{a}$, on aura la valeur de l'inconnue x de la proposée.

Abregé.

Il suffit, dans la pratique, de changer l'inconnue x de la proposée en une autre y, d'ôter le coëficient a du premier terme, & de multiplier le troisiéme terme par le coëficient a; le quatriéme par le quarré aa de ce coëficient; le cinquiéme terme par le cube a^3 de ce coëficient; & ainsi de suite.

PROBLÊME VIII.

51. *FAIRE en sorte que le coëficient de quel terme on voudra d'une équation, & même, si l'on veut, le dernier terme, devienne une grandeur connue; c'est-à-dire, transformer l'équation en une autre où cela se trouve.*

Pour le chercher par Analyse, soit la grandeur connue a, soit l'indéterminée z, qui représente la quantité propre à faire en sorte que le coëficient de quel terme on voudra d'une équation, devienne égal à a; & soit l'équation proposée $x^3 - nxx + px - q = 0$.

On supposera $x = \frac{y}{z}$; on substituera $\frac{y}{z}$ à la place de x, dans la proposée; & l'on aura la transformée $y^3 - nzyy + pzzy - qz^3 = 0$.

Si c'est le coëficient du second terme qu'on veuille rendre égal à a, on supposera $nz = a$; ce qui donnera $z = \frac{a}{n}$.

Si c'est le coëficient du troisiéme terme qu'on veuille rendre égal à a, on supposera $pzz = a$; ce qui donnera $z = \sqrt{\frac{a}{p}}$.

Si c'est le dernier terme, on supposera $qz^3 = a$; ce qui donnera $z = \sqrt[3]{\frac{a}{q}}$.

On changera l'inconnue x de la proposée en y, & on multipliera le second terme de la proposée par la valeur de z; le troisiéme par le quarré de cette valeur, le quatriéme par

le cube de cette valeur, &c. & l'on aura la transformée qu'on cherche. Ou bien on ſubſtituera la valeur de z dans $x = \frac{y}{z}$, & la ſubſtitution de cette valeur de x dans la propoſée, à la place de x, donnera la transformée qu'on cherche. Ou bien enfin on ſubſtituera la valeur de z dans la transformée indéterminée $y^3 - nzyy + pzzy - qz^3 = 0$, & l'on aura la transformée qu'on demande.

Quand on connoîtra la valeur de y dans la transformée, en la ſubſtituant dans $x = \frac{y}{z}$, comme auſſi la valeur de z, l'on aura la valeur de x.

PROBLÊME IX.

52. *FAIRE en ſorte dans les équations numeriques, que les coëficiens des termes ſoient diviſibles par tel nombre qu'on voudra ; ce qui eſt quelquefois commode pour faciliter le calcul des racines.*

IL faut multiplier par la méthode de la quatriéme transformation, chaque racine de l'équation propoſée, par le nombre, ou par le produit des nombres par leſquels on veut que les coëficiens de l'équation ſe puiſſent diviſer ; & on trouvera la transformée qu'on cherche.

Par exemple, ſi l'on propoſe de faire en ſorte que le coëficient du troiſiéme terme de $x^3 - 14x - 55 = 0$, devienne diviſible par 2, & le dernier terme par 3, on multipliera chaque racine de la propoſée par 6, produit de 2 par 3 ; c'eſt-à-dire, après avoir changé x en y, on multipliera le troiſiéme terme par 36, quarré de 6 ; le quatriéme par 216, cube de 6 ; & l'on aura la transformée $y - 504y - 11880 = 0$, qui a les conditions qu'on demande.

PROBLÊME X.

53. *OTER toutes les fractions d'une équation, dont le premier terme n'a pas d'autre coëficient que l'unité, de maniere que le premier terme de la transformée n'ait pas auſſi d'autre coëficient que l'unité.*

IL faut multiplier toutes les racines de la propoſée par le dénominateur de la fraction, s'il n'y en a qu'une, ou par le produit de tous les dénominateurs des fractions, s'il y en a pluſieurs ; & l'on aura la transformée qu'on demande.

Par exemple, pour ôter les fractions de $x^3 - \frac{n}{a}xx + \frac{px}{b} - \frac{q}{c} = 0$, on prendra le produit abc de tous les dénominateurs des fractions, & on supposera $x = \frac{y}{abc}$; on substituera $\frac{y}{abc}$ dans la proposée, à la place de x; & après avoir ôté les fractions, on trouvera la transformée $y^3 - bcnyy + aabccpy - a^3b^3ccq = 0$, qui n'a point de fractions, & dont le premier terme n'a pas d'autre coëficient que l'unité.

Quand on connoîtra la valeur de y, en la substituant dans $x = \frac{y}{abc}$, à la place de y, on aura la valeur de x.

PROBLÊME XI.

54. *LORSQU'IL y a des incommensurables dans les coëficiens des termes d'une équation, comme dans* $x^3 - xx\sqrt{n} + px - q\sqrt{n} = 0$, *les ôter dans plusieurs cas.*

IL faut multiplier les racines de la proposée par la grandeur incommensurable $\sqrt{n}$, en supposant $x = \frac{y}{\sqrt{n}}$; & substituant ensuite dans la proposée $\frac{y}{\sqrt{n}}$, à la place de x, on trouvera la transformée $y^3 - nyy + npy - nnq = 0$, qui n'a plus d'incommensurables.

De même pour ôter les incommensurables de $x^4 - x^3\sqrt[3]{nn} + pxx\sqrt[3]{n} - qx + \frac{r}{\sqrt[3]{n}} = 0$, il faut multiplier les racines par $\sqrt[3]{n}$, en supposant $x = \frac{y}{\sqrt[3]{n}}$; & substituant $\frac{y}{\sqrt[3]{n}}$ dans la proposée, à la place de x, on trouvera la transformée $y^4 - ny^3 + npyy - nqy + nr = 0$, qui n'a plus d'incommensurables.

Quand on connoîtra la valeur de y dans la transformée, on trouvera la valeur de x, en substituant la valeur de y dans $x = \frac{y}{\sqrt{n}}$, dans le premier exemple; & dans $x = \frac{y}{\sqrt[3]{n}}$ dans le second exemple.

Remarque où l'on distingue les cas dans lesquels on peut ôter les incommensurables par cette méthode.

*36. 4e. Transformation. ON a vû * que pour multiplier les racines d'une équation par une grandeur donnée, qu'on suppose dans ce Problême être une incommensurable, il faloit multiplier le second terme par l'incommensurable donnée; le troisiéme par son quarré; le quatriéme par sa troisiéme puissance & ainsi de suite.

D'où il suit que pour oter l'incommensurable $\sqrt{n}$ de l'équation, il faut que $\sqrt{n}$ se trouve au second, quatriéme, sixiéme terme de la proposée, & que $\sqrt{n}$ ne se trouve point dans les autres termes.

Pour ôter l'incommensurable $\sqrt[3]{n}$, il faut que $\sqrt[3]{nn}$, qui est le quarré de $\sqrt[3]{n}$, se trouve au second terme de la proposée; que $\sqrt[3]{n}$ se trouve au troisiéme terme; qu'il n'y ait point d'incommensurable au quatriéme terme; que $\sqrt[3]{nn}$ se trouve au cinquiéme terme, $\sqrt[3]{n}$ au sixiéme; & qu'il n'y ait point d'incommensurable au septiéme terme; & ainsi de suite.

D'où il est facile de juger comment les autres incommensurables $\sqrt[4]{n}$, $\sqrt[5]{n}$, &c. doivent être distribuées dans les termes d'une équation, afin qu'on les puisse ôter par cette méthode.

PROBLÊME XII.

55. *FAIRE évanouir le penultiéme terme d'une équation* $x^4 + pxx - qx + r = 0$, *dans laquelle le second terme est évanoui.*

IL faut supposer $x = \frac{r}{y}$, & substituer $\frac{r}{y}$ dans la proposée, à la place de x; & après avoir ôté les fractions, & divisé les termes par r, on aura la transformée $y^4 - qy^3 + pryy + r^3 = 0$, où le penultiéme terme est évanoui.

Quand on connoîtra la valeur de y dans la transformée, on aura la valeur de x, en mettant la valeur de y dans $x = \frac{r}{y}$.

REMARQUE.

ON peut mettre dans l'équation supposée $x = \frac{r}{y}$, telle grandeur connue qu'on voudra, à la place de r; mais alors le premier terme de la transformée aura un coëficient, ou bien la transformée aura des fractions : Mais en mettant le dernier terme tout connu r dans $x = \frac{r}{y}$, la transformée n'aura pas de fractions, & le premier terme n'aura pas d'autre coëficient que l'unité.

On peut par la même méthode, quand ce n'est pas le second terme qui manque dans la proposée, mais le troisiéme, ou le quatriéme, &c. faire en sorte que le terme également éloigné du dernier terme, manque dans la transformée.

Enfin quand le penultiéme terme manque dans la proposée, on peut par la même méthode, faire en ſorte que le ſecond terme ſoit évanoui dans la transformée.

Les exemples en ſont faciles à faire, ſans qu'il ſoit neceſſaire d'en prolonger ce Traité.





ANALYSE COMPOSÉE, OU ANALYSE QUI ENSEIGNE A RESOUDRE les Problêmes qui se réduisent à des équations composées.

LIVRE IV.

Où l'on explique la résolution des équations en general, c'est-à-dire de tous les degrez, lorsque leurs racines sont commensurables ; la maniere de réduire les équations composées au plus simple degré, & ce qui regarde les équations qui ont des racines égales.

SECTION I.

Où l'on explique la résolution des équations en general, lorsque leurs racines sont commensurables.

PROBLÊME I.

56. *TROUVER les racines commensurables d'une équation composée numerique ou litterale, de quelque degré qu'elle puisse être dont zero est le second membre, lorsque son premier terme n'a pas d'autre coëficient que l'unité ; qu'il n'y a dans ses termes ni fractions, ni incommensurables ; & que tous les termes sont homogenes lorsque l'équation est litterale.*

MÉTHODE GENERALE.

1°. IL faut trouver tous les diviseurs du dernier terme, dont l'unité & le dernier terme lui-même, sont toujours du nombre, & écrire tous ces diviseurs de suite & par ordre,

c'eſt-à-dire, les plus ſimples les premiers. 2°. Il faut diviſer l'équation propoſée ſucceſſivement par l'inconnue lineaire de l'équation moins chacun de ces diviſeurs du dernier terme, en commençant par les plus ſimples, ſuppoſé qu'on connoiſſe par les ſignes qu'il y a des racines poſitives dans l'équation. Il faut enſuite la diviſer ſucceſſivement par l'inconnue lineaire plus chacun des diviſeurs du dernier terme, en allant par ordre des plus ſimples aux plus compoſez, ſuppoſé qu'on connoiſſe par les ſignes qu'il y a des racines negatives dans l'équation. Le premier des diviſeurs par lequel
* 26. l'équation ſera diviſée ſans reſte, * contiendra une des racines qu'on cherche, qui ſera poſitive, ſi dans le diviſeur elle eſt jointe à l'inconnue par le ſigne —; & négative, ſi c'eſt par le ſigne +. 3°. Après avoir trouvé une racine de l'équation, on continuera d'operer de la même maniere ſur le quotient qu'on aura trouvé, & ſi on trouve une ſeconde racine; on operera de la même maniere ſur le nouveau quotient; ce que l'on continuera juſqu'à ce qu'on ait trouvé toutes les racines de l'équation : & on les trouvera toutes par cette méthode, ſi elles ſont toutes commenſurables.

EXEMPLE I.

POUR trouver les racines de l'équation $x^3 - 3xx - 10x + 24 = 0$, 1°. il faut chercher tous les diviſeurs du dernier terme, & l'on trouvera 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. 2°. Il faut faire les équations ſimples $x - 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, $x - 4 = 0$, $x - 6 = 0$, $x - 8 = 0$, $x - 12 = 0$, $x - 24 = 0$, dont les racines ſont pôſitives, & contiennent de ſuite tous les diviſeurs du dernier terme. Il faut faire de même les équations ſimples $x + 1 = 0$, $x + 2 = 0$, $x + 3 = 0$, &c. dont les racines ſont négatives, & contiennent les mêmes diviſeurs.

S'il n'y avoit que des racines poſitives, les premieres équations ſimples ſuffiroient; & les dernieres ſuffiroient s'il n'y en avoit que de négatives : mais il faut ſe ſervir des unes & des autres, les ſignes des termes de l'équation propoſée faiſant voir qu'elle contient des racines poſitives & négatives.

Il faut enſuite diviſer l'équation propoſée par $x - 1 = 0$, & comme l'on trouve un reſte, & que la diviſion n'eſt pas exacte, on eſt aſſuré que $x - 1 = 0$ ne contient pas une

racine positive de la proposée, c'est-à-dire que $+1$ n'est pas une racine de la proposée.

Il faut la diviser par $x+1=0$; & comme l'on trouve un reste; $x+1=0$ ne contient pas une racine négative de l'équation. Les deux diviseurs $x-1=0$, $x+1=0$ n'ayant pas fait trouver de racines, il faut se servir par ordre des suivans, en commençant par $x-2=0$: mais l'on trouve que la proposée se divise exactement par $x-2=0$, & le quotient est $xx-1x-12=0$. Cela fait voir que $x-2=0$ contient une racine positive, qui est $+2$, de l'équation proposée.

3°. Il ne faut plus diviser la proposée, mais seulement le quotient $xx-1x-12=0$, non par les diviseurs $x-1=0$, $x+1=0$, qui ont donné des restes, (car s'ils étoient des diviseurs exacts de ce quotient, ils le seroient aussi de la proposée,) mais par les diviseurs $x-2=0$, $x+2=0$, & les autres suivans, & l'on trouve qu'en le divisant par $x-2=0$, par $x+2=0$, par $x-3=0$, il y a des restes; mais qu'il se divise exactement par $x+3=0$, & le quotient est $x-4=0$; ainsi $x+3=0$, & $x-4=0$, contiennent les deux autres racines de la proposée, qui sont la négative -3, & la positive $+4$. Et l'équation est resolue; les trois racines sont $+2$, -3, $+4$.

EXEMPLE II.

POUR trouver les racines de l'équation $x^3-9xx+22x-8=0$.

1°. Il faut chercher tous les diviseurs du dernier terme, qui sont 1, 2, 4, 8.

2°. Il faut faire les seules équations simples $x-1=0$, $x-2=0$, $x-4=0$, $x-8=0$; parceque les signes alternatifs $+$ & $-$ de la proposée, font voir que toutes ses racines sont positives.

Il faut diviser la proposée successivement par ces équations simples, & l'on trouve que $x-1=0$, $x-2=0$, donnent des restes; mais que la division se fait exactement par $x-4=0$; & le quotient est $xx-5x+2=0$. Cela fait voir que $+4$ est une racine de la proposée.

3°. Il faut diviser le quotient non par $x-1=0$, $x-2=0$, qui ont donné des restes, mais par $x-4=0$, $x-8=0$,

& la division ne pouvant se faire exactement, le quotient ou l'équation $xx - 5x + 2 = 0$, n'a pas de racines commensurables.

Si l'on veut avoir la résolution entiere de la proposée $x^3 - 9xx + 22x - 8 = 0$, dont on connoît déja une des racines, qui est $+4$, on cherchera les deux autres en résolvant l'équation $xx - 5x + 2 = 0$, qui est du second degré. Il faut faire passer le dernier terme dans le second membre, & l'on aura $xx - 5x = -2$; ajouter $+\frac{25}{4}$, qui est le quarré de la moitié du coëficient du second terme, à chaque membre, & l'on aura $xx - 5x + \frac{25}{4} = \frac{25}{4} - 2 = \frac{17}{4}$, & enfin tirer la racine quarrée de chaque membre, & l'on aura $x - \frac{5}{2} = \sqrt{\frac{17}{4}}$, & par transposition $x = \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{17}{4}}$, ou $x = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17}$; & l'on aura encore $x = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17}$, en divisant $xx - 5x + 2 = 0$, par $x - \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17} = 0$. Et la proposée sera entierement résolue.

EXEMPLE III.

POUR trouver les racines de

$$\begin{array}{l} x^3 - 2axx - 3aax + 6aab = 0 \\ \quad\; - 2bxx + 4abx + 9aac \\ \quad\; - 3cxx + 6acx \end{array}$$

1°. Il faut chercher tous les diviseurs du dernier terme, qui sont $1 . 3 . a . aa . 3a . 3aa . 2b + 3c . 6b + 9c . 2ab + 3ac . 6ab + 9ac . 2aab + 3aac . 6aab + 9aac$.

2°. Les équations simples qui doivent servir de diviseurs pour les racines positives, sont $x - 1 = 0$. $x - 3 = 0$. $x - a = 0$. $x - aa = 0$. $x - 3a = 0$, &c. Pour les racines négatives, $x + 1 = 0$. $x + 3 = 0$. $x + a = 0$. $x + aa = 0$. $x + 3a = 0$, &c.

En faisant la division de la proposée par $x - 1 = 0$. $x + 1 = 0$. $x - 3 = 0$. $x + 3 = 0$. $x - a = 0$, on trouve des restes: mais divisant la proposée par $x + a = 0$, la division est exacte, & le quotient est

$$\begin{array}{l} xx - 3ax + 6ab = 0 \\ \quad - 2bx + 9ac \\ \quad - 3cx \end{array}$$

Ainsi $x + a = 0$ contient une racine négative de la proposée, qui est $-a$.

3°. Continuant de diviser ce quotient, qui ne contient que des racines positives, comme les signes alternatifs + & — le font voir, par les seuls diviseurs des racines positives, en

passant ceux qui ont déja donné des restes, on trouve que la division se fait exactement par $x - 3a = 0$, & que le quotient est $x - 2b - 3c = 0$; ainsi $+3a$, & $+2b+3c$ sont les deux autres racines de la proposée, qui sont positives : & la proposée est résolue.

Ces exemples suffisent pour faire concevoir clairement la méthode du premier Problême, dont la démonstration est évidente par la formation des équations composées.

COROLLAIRES.

I.

57. LORSQUE l'inconnue n'est pas lineaire dans le penultiéme terme, mais regardant la puissance de l'inconnue qui est dans ce penultiéme terme comme lineaire, les autres termes, excepté le dernier, en contiennent les puissances exactes, comme dans l'équation

$$\begin{array}{llll} x^6 + aax^4 & - a^4xx & - a^6 & = 0. \\ - 2cc & + c^4 & - 2a^4cc & \\ & & - aac^4 & \end{array}$$

Dans ce cas il ne faut pas prendre dans les équations simples qui doivent être les diviseurs de la proposée, l'inconnue lineaire, mais la puissance de l'inconnue qui est dans le penultiéme terme.

Dans cet exemple, où les diviseurs du dernier terme sont $1.\ a.\ aa.\ aa+cc$, &c. les équations simples qui doivent servir de diviseurs seront $xx - 1 = 0$, $xx - a = 0$, $xx - aa = 0$, $xx - aa - cc = 0$, &c. En faisant la division de la proposée par $xx - aa - cc = 0$, on trouve qu'elle se fait sans reste; ainsi $+aa+cc$ est une racine positive de la proposée, & le quotient

$$\begin{array}{lll} x^4 + 2aaxx & + a^4 & = 0, \\ - cc & + aacc & \end{array}$$

contient les deux autres racines qui sont incommensurables.

En résolvant ce quotient, qui est une équation du second degré, on trouvera que les deux autres racines sont $\frac{1}{2}cc - aa + \frac{1}{2}c\sqrt{cc - 8aa}$, & $\frac{1}{2}cc - aa - \frac{1}{2}c\sqrt{cc - 8aa}$.

II.

58. Au lieu de faire la division de la proposée par l'inconnue $-$ ou $+$ chacun des diviseurs du dernier terme, on peut substituer successivement dans la proposée, chacun des diviseurs du dernier terme & ses puissances, à la place de l'inconnue & de ses puissances : celui des diviseurs dont la substi-

tution fera que tous les termes se détruiront par les signes
*33. contraires, * sera une des racines de l'équation : & les diviseurs dont la substitution ne fera pas détruire tous les termes par des signes contraires, ne seront pas les racines de l'équation : ceux de ces diviseurs du dernier terme qui étant substituez dans la proposée avec le signe +, feront détruire tous
*33. les termes de l'équation, * seront les racines positives : ceux qui étant substituez avec le signe —, feront détruire tous
*33. les termes de la proposée, * seront les racines négatives.

En substituant par ordre dans le premier exemple $x^3 - 3xx - 10x + 24 = 0$, les diviseurs du dernier terme $+1$, $+2$, $+3$, &c. ou -1, -2, -3, &c. on trouve que la substitution de $+1$, & de -1, ne fait pas détruire les termes ; mais la substitution de $+2$ à la place de x, donne $+8 - 12 - 20 + 24$, dont tous les termes se détruisent ; ainsi $+2$ est une racine positive de la proposée.

On abaissera ensuite la proposée, en la divisant par $x - 2 = 0$; & l'on trouvera le quotient $xx - 1x - 12 = 0$, qui contient les deux autres racines de la proposée ; & substituant dans ce quotient, non les diviseurs $+1$, -1, qui n'ont pas fait evanouir tous les termes de la proposée, mais les autres $+2$, -2, $+3$, -3, &c. l'on trouve que la substitution de -3 fait détruire tous les termes, les rendant égaux à zero, ainsi -3 est une racine négative de l'équation proposée.

Divisant le quotient $xx - 1x - 12 = 0$, par $x + 3 = 0$, l'on trouve le quotient juste $x - 4 = 0$, qui fait voir que $+4$ est la troisiéme racine de la proposée.

La démonstration de ce Corollaire est évidente *par* 31.

III.

Le coëficient du second terme d'une équation composée contenant les racines de l'équation, il est évident que les diviseurs du dernier terme, qui ont plus de dimensions que le coëficient du second terme, sont inutiles, & qu'ils ne peuvent servir pour former les équations lineaires qui peuvent exactement diviser la proposée ; ainsi dans le troisiéme exemple, où le coëficient du second terme est lineaire, les diviseurs du dernier terme qui ont plus d'une dimension, sont inutiles, & ne peuvent être les racines de l'équation.

Dans les équations numeriques, s'il y avoit des diviseurs

qui surpassent le plus grand coëficient négatif augmenté de l'unite, ils seroient inutiles pour trouver les racines positives, étant plus grands que les racines positives.* *47.

IV.

Lorsque la méthode du Problême fait trouver quelques racines, mais non pas toutes, il est évident que l'équation contient des racines commensurables, qui sont celles que fait trouver la méthode ; & d'autres incommensurables, qui sont celles qu'on ne peut pas trouver par la méthode : Et si l'on n'en peut trouver aucune par le Problême, elles sont toutes incommensurables.* *35.

V.

Il y a des cas où quand même l'équation composée contiendroit des incommensurables, on ne laisseroit pas d'en trouver les racines par la méthode generale ; il faut dans ces cas que la grandeur incommensurable soit un diviseur exact du dernier terme de l'équation, ou qu'elle soit une partie d'un diviseur exact du dernier terme, comme dans cet exemple :

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & + 2bx\sqrt{ab+3bb} & + 18b^3 & = 0 \\ \quad - xx\sqrt{ab+3bb} & & - 6bb\sqrt{ab+3bb} & \end{array}$$

La grandeur $-3b+\sqrt{ab+3bb}$, est un diviseur exact du dernier terme. En divisant la proposée par $x+3b-\sqrt{ab+3bb}=0$, la division est exacte, & l'on trouve le quotient $xx-2bx+6bb=0$, ainsi $-3b+\sqrt{ab+3bb}$, est une racine de la proposée, & le quotient contient les deux autres racines, qui sont imaginaires, l'une étant $b+\sqrt{-5bb}$, & l'autre $b-\sqrt{-5bb}$.

VI.

Lorsqu'une équation composée est le produit d'autres équations composées d'un moindre degré que la proposée, & qu'il y en a quelqu'une parmi ces dernieres qui n'a que le premier & le dernier terme, comme $xx-aa=0$, $x^3-a^3=0$, &c. & que ce dernier terme $-aa$, ou $-a^3$ est une grandeur commensurable, on peut trouver par la méthode generale ces équations d'un moindre dégré, qui n'ont que le premier & le dernier terme.

Par exemple, on veut resoudre l'équation

$$\begin{array}{l} x^4 - 2bx^3 - aaxx + 2aabx - 4aabb = 0, \\ \qquad\qquad\quad + 4bbxx. \end{array}$$

les diviseurs du dernier

terme sont $1 . a . b . ab . aa . bb . aab . aabb$. On trouve qu'en divisant la proposée par les équations $x - 1 = 0$, $x + 1 = 0$, $x - a = 0$, $x + a = 0$, $x - b = 0$, $x + b = 0$, la division n'est pas exacte.

Il faut voir ensuite si la proposée ne peut point être divisée par $xx - ab = 0$, $xx + ab = 0$, $xx - aa = 0$; & l'on trouve qu'elle se divise exactement par $xx - aa = 0$; & que le quotient est $xx - 2bx + 4bb = 0$: Ainsi $xx - aa = 0$ est une des équations dont la proposée est le produit, & l'autre est le quotient $xx - 2bx + 4bb = 0$.

En resolvant $xx - aa = 0$, on trouve $xx = aa$, $x = \sqrt{aa}$, & $x = -\sqrt{aa}$, qui sont deux racines de la proposée.

Le quotient $xx - 2bx + 4bb = 0$, contient les deux autres racines $+b + \sqrt{-3bb}$, $+b - \sqrt{-3bb}$, qui sont imaginaires.

PROBLÊME II.

59. *LORSQU'UNE équation composée, de quelque degré qu'elle puisse être, a un coëficient different de l'unité dans son premier terme; qu'elle n'a ni fractions, ni incommensurables; trouver toutes les racines commensurables qu'elle peut avoir.*

MÉTHODE GENERALE.

1°. IL faut trouver tous les diviseurs du coëficient du premier terme, & tous les diviseurs du dernier terme; & après avoir multiplié tous les diviseurs du premier terme par l'inconnue lineaire, il faut faire des équations simples de ces produits, & de chacun des diviseurs du dernier terme, mettant le signe − devant chacun de ces diviseurs du dernier terme, pour trouver les racines positives de la proposée; & + pour trouver les négatives.

2°. Il faut diviser la proposée successivement par ces équations simples, jusqu'à ce qu'on en trouve une qui fasse la division sans reste: Elle contiendra une des racines de la proposée.

3°. Il faut continuer l'operation sur le quotient, jusqu'à ce qu'on trouve une seconde racine de la proposée, & faire la même operation sur le quotient que fera trouver cette seconde racine.

En

En continuant cette operation, on trouvera toutes les racines de la proposée, si elles sont commensurables.

S'il se trouve des quotiens dont on ne puisse trouver des racines par cette méthode, la proposée aura des racines incommensurables, qui sont celles de ces quotiens. Et si l'on ne pouvoit trouver aucune racine de la proposée par cette méthode, elles seroient toutes incommensurables.

EXEMPLE.

POUR trouver les racines de

$$\begin{array}{llll} ccfx^3 & -aacfxx & +aabbcx & -3aab^4=0 \\ & -bbccxx & +3aabbfx & \\ & -3bbcfxx & +3b^4cx & \end{array}$$

1°. tous les diviseurs du coëficient ccf du premier terme sont $1.\ c.\ cc.\ f.\ cf.\ ccf.$ Tous les diviseurs du dernier terme $3aab^4$ sont $1.\ 3.\ a.\ 3a.\ aa.\ 3aa.\ b.\ 3b.\ ab.\ 3ab.\ aab.\ 3aab.\ bb.\ 3bb$, &c. Tous les produits des diviseurs du coëficient du premier terme par l'inconnue x, sont $x.\ cx.\ ccx.\ fx.\ cfx.\ ccfx.$ Les équations simples par lesquelles il faut diviser la proposée qui n'a que des racines positives, comme les signes alternatifs $+$ & $-$ le font voir, sont $x-1=0$, $x-3=0$, $x-a=0$, $x-3a=0$, &c. $cx-1=0$, $cx-3=0$, $cx-a=0$, $cx-3a=0$, $cx-aa=0$, &c. $ccx-1=0$, $ccx-3=0$, &c. $fx-1=0$, $fx-3=0$, &c. & ainsi de suite.

Si la proposée avoit des racines négatives, il faudroit encore faire les équations simples $x+1=0$, $x+3=0$, &c. $cx+1=0$, $cx+3=0$, &c. $ccx+1=0$, $ccx+3=0$, &c. & ainsi de suite.

2°. Il faut diviser la proposée par ces équations simples, & l'on trouve que $cx-aa=0$, fait la division sans reste; & que le quotient est $\begin{array}{l} cfxx-3bbfx+3b^4=0. \\ -bbcx \end{array}$ Ainsi $cx-aa=0$, contient une racine de la proposée qui est $x=\frac{aa}{c}$.

3°. Il faut continuer la même operation sur le quotient; mais il ne faut se servir que des équations simples, dont le premier terme est le produit d'un des diviseurs du coëficient cf du premier terme du quotient par x, & dont le second terme est un des diviseurs du dernier terme $3b^4$ du quotient, & passer toutes les autres comme inutiles, comme aussi celles qui ont donné des restes dans la premiere operation; & l'on trouvera que le quotient $\begin{array}{l} cfxx-3bbfx+3b^4=0, \\ -bbcx \end{array}$ se divise

exactement par $fx - bb = 0$, & que le quotient qui en vient est $cx - 3bb = 0$. Ainsi l'on a les deux autres racines de la proposée, qui sont $x = \frac{bb}{f}$, & $x = \frac{3bb}{c}$.

La démonstration de ce Problême est évidente par la formation des équations composées, dont le premier terme
*27. a un coëficient different de l'unité. *

AVERTISSEMENT.

ON verra l'usage du second Problême dans la suite, lorsqu'on enseignera à abaisser une équation composée au plus simple degré; & l'on voit assez qu'il sert à trouver les racines des équations composées qui ont des fractions, lorsqu'on ne veut pas prendre la peine de les transformer en d'autres qui n'ayent que l'unité pour le coëficient du premier terme.

SECTION II.

Où l'on explique d'autres méthodes pour résoudre le premier & le second Problême qui abregent souvent les operations.

PREMIERE MÉTHODE.

60. 1°. IL faut partager toutes les grandeurs de l'équation en deux sommes, & chercher par la méthode qu'on a donnée pour trouver le plus grand diviseur commun, un diviseur commun à ces deux sommes : si ce diviseur commun contient l'inconnue lineaire, il contient necessairement une racine de l'équation; & l'équation étant divisée par ce diviseur commun, le quotient contiendra les autres racines, qu'on cherchera de la même maniere.

2°. Si ce diviseur commun contient differentes puissances de l'inconnue, il faut diviser l'équation proposée par ce diviseur commun; & si le quotient exact, qui en viendra necessairement, contient l'inconnue lineaire, ce quotient contiendra une des racines de la proposée, & le diviseur commun contiendra les autres. Si ce quotient contient differentes puissances de l'inconnue, on est assuré que ce quotient & le diviseur commun sont deux équations dont la proposée est le produit : On operera sur chacune comme l'on a

fait sur la proposée ; c'est-à-dire, on partagera le diviseur commun en deux sommes, dont on cherchera le diviseur commun ; & on partagera de même le quotient en deux sommes, dont on cherchera le diviseur commun, &c. Et en continuant d'operer de cette maniere, si l'on arrive à un diviseur commun, ou à un quotient exact, où l'inconnue soit lineaire, il contiendra une racine de la proposée ; & on les trouvera toutes les unes après les autres, si elles sont commensurables.

3°. Pour observer de l'ordre dans ce partage de toutes les grandeurs d'une équation en deux sommes, on mettra dans une des deux sommes toutes les quantitez de l'équation où se trouve une même lettre, & toutes les autres dans l'autre. Et si cela ne réussit pas, on mettra dans une des sommes les grandeurs de l'équation, où une même lettre a un même nombre de dimensions, & les autres dans la seconde somme : ou bien on mettra dans la premiere somme les grandeurs où sont deux lettres differentes, & les autres dans la seconde, &c.

4°. Quand on a fait le partage de l'équation en deux sommes, on peut chercher le diviseur commun de la proposée & de l'une des deux sommes, au lieu de chercher celui des deux sommes.

EXEMPLE I.

POUR trouver les racines de $\begin{array}{l} x^3 - 2axx - 3aax - 3aab = 0 \\ \quad\;\; - cxx + 3acx + 3abc \\ \quad\;\; + bxx - 2abx \\ \qquad\qquad\;\; - bcx \end{array}$

1°. Il faut partager toutes les quantitez de l'équation en deux sommes, on mettra toutes celles où se trouve c dans l'une, & les autres dans l'autre somme ; & l'on aura

$\begin{array}{l} x^3 - 2axx - 3aax - 3aab \\ \quad + bxx - 2abx \end{array}$ Et $\begin{array}{l} - cxx + 3acx + 3abc \\ \qquad\qquad - bcx \end{array}$

La seconde somme contenant c dans toutes ses grandeurs, il faut la diviser par $-c$, & l'on aura pour la seconde $\begin{array}{l} xx - 3ax \\ \quad\; + bx \end{array}$ $- 3ab$. Il faut diviser la premiere par cette seconde, & l'on trouvera que la division se fait exactement ; ainsi cette seconde somme est un diviseur commun de la premiere & de la seconde somme, & par consequent de la proposée.

2°. Ce diviseur commun $\begin{array}{l} xx - 3ax - 3ab = 0 \\ \quad\; + bx \end{array}$, étant

une équation composée, & non pas lineaire, il faut diviser la proposée par ce diviseur commun, & l'on trouvera pour quotient exact l'équation lineaire $x + a - c = 0$, qui contient une racine de la proposée qui est $x = -a + c$. Le diviseur commun $\begin{array}{l} xx - 3ax - 3ab = 0 \\ \quad + bx \end{array}$, contient les deux autres racines de la proposée.

Pour les trouver, on partagera $\begin{array}{l} xx - 3ax - 3ab = 0 \\ \quad + bx \end{array}$ en deux sommes, mettant dans la premiere les grandeurs où est b, & les autres dans la seconde ; & l'on aura $bx - 3ab$, & $xx - 3ax$. Divisant la premiere par b, & la seconde par x, elles seront réduites à $x - 3a = 0$, $x - 3a = 0$, qui étant la même grandeur, ont pour diviseur commun $x - 3a = 0$, qui est necessairement un diviseur exact de la proposée ; & étant lineaire, il contient une seconde racine de la proposée, qui est $x = 3a$.

On divisera $\begin{array}{l} xx - 3ax - 3ab = 0 \\ \quad + bx \end{array}$, qui contient les deux dernieres racines de la proposée, par l'équation lineaire $x - 3a = 0$, qui contient l'une de ces racines ; & le quotient $x + b = 0$, contiendra la derniere racine, qui est $x = -b$.

EXEMPLE II.

POUR trouver les racines de l'équation

$$\begin{array}{lllll} x^4 - 2ax^3 & - 3aaxx & + 15aabx & - 18aabb & = 0 \\ \quad - c & + 3ac & - 15abc & + 18abbc & \\ \quad - 5b & + 10ab & - 3aad & + 9aabd & \\ \quad + d & - 2ad & + 3acd & - 9abcd & \\ & + 5bc & - 12abb & & \\ & - dc & + 6abd & & \\ & + 6bb & - 6bbc & & \\ & - 3bd & + 3bcd & & \end{array}$$

1°. Il faut partager toutes les quantitez de l'équation en deux sommes ; on peut mettre dans la premiere toutes les quantitez où sont les deux lettres b & d, & toutes les autres dans la seconde ; & l'on aura

$$\begin{array}{llll} - 5bx^3 & + 10abxx & + 15aabx & - 18aabb \\ + d & - 2ad & - 15abc & + 18abbc \\ & + 5bc & - 3aad & + 9aabd \\ & - dc & + 3acd & - 9abcd \\ & + 6bb & - 12abb & \\ & - 3bd & + 6abd & \\ & & - 6bbc & \\ & & + 3bcd & \end{array}$$

Et $\begin{array}{lll} x^4 - 2ax^3 & - 3aaxx \\ \quad - cx^3 & + 3acxx \end{array}$

La seconde peut être divisée par xx; & faisant la division, l'on trouve pour la seconde $xx - 2ax - 3aa$
$- cx + 3ac$

Il faut chercher le plus grand diviseur commun de la premiere somme & de cette seconde somme, & l'on trouve que $xx - 2ax - 3aa = 0$, est elle-même le plus grand
$- cx + 3ac$
diviseur commun.

2°. Il faut diviser la proposée par ce diviseur commun, & l'on trouve le quotient exact $xx - 5bx + 6bb = 0$; on est
$+ dx - 3bd$
assuré que la proposée est le produit de ces deux équations

$$\begin{array}{ll} xx - 2ax - 3aa = 0, & xx - 5bx + 6bb = 0, \\ \quad - cx + 3ac & \quad + dx - 3bd \end{array}$$

Il faut chercher séparément les racines de chacune, de la même maniere qu'on a cherché celles de la proposée, c'est-à-dire, il faut partager la premiere en deux sommes, en mettant dans la premiere les grandeurs où se trouve la lettre c, & les autres dans la seconde; & l'on trouve

$- cx + 3ac$, Et $xx - 2ax - 3aa$.

Divisant la premiere par $- c$, l'on trouve $x - 3a$, qui est un diviseur commun de la premiere & de la seconde; par consequent $x - 3a = 0$, contient une racine de l'équation $xx - 2ax - 3aa = 0$; & par consequent une racine de la
$- cx + 3ac$
proposée, qui est $x = 3a$. En divisant $xx - 2ax - 3aa = 0$,
$- cx + 3ac$
par $x - 3a = 0$, le quotient $x + a - c = 0$, contient une autre racine.

Il faut à present trouver les racines de $xx - 5bx + 6bb$
$+ dx - 3bd$
$= 0$; pour cela on partagera cette équation en deux sommes, mettant dans la premiere les grandeurs où se trouve d, & les autres dans la seconde; & l'on aura

$+ dx - 3bd$, Et $xx - 5bx + 6bb$.

On divisera la premiere par d, & l'on aura $x - 3b$, qui est un diviseur de la seconde $xx - 5bx + 6bb$. Ainsi $x - 3b = 0$, contient une racine de $xx - 5bx + 6bb = 0$. Divi-
$+ dx - 3bd$
sant cette équation par $x - 3b = 0$, l'on trouvera le quo-

tient $x-2b+d=0$, qui contient l'autre racine ; & l'on a les quatre racines de la proposée.

Démonstration de cette méthode.

ELLE dépend de cet axiome, qu'un diviseur commun aux deux parties d'un tout, est diviseur du tout ; & qu'un diviseur commun du tout & d'une partie, est diviseur de l'autre partie.

Les équations faites de l'inconnue de l'équation proposée, & de quelques-unes des grandeurs connues de la proposée, quand elles sont des diviseurs exacts de la proposée, contiennent les racines de la proposée. Or il est évident par l'axiome précedent, qu'on trouve par la méthode ces équations qui divisent exactement la proposée ; on trouve donc par la méthode les racines de la proposée ; ou quand elles n'en ont pas de commensurables, on trouve les équations plus simples que la proposée, qui contiennent ces racines, quand elle est le produit d'autres équations plus simples commensurables.

Application de la même méthode au second Problême.

POUR trouver les racines de $\begin{array}{l} ccfx^3 - aacfxx + aabbcx - 3aab^4 = 0 \\ \quad\quad\quad - bbccxx + 3aabbfx \\ \quad\quad\quad - 3bbcfxx + 3b^4cx \end{array}$

1°. on partagera l'équation en deux sommes, mettant dans la premiere toutes les grandeurs où se trouve b, & les autres dans la seconde ; & l'on aura

$$\begin{array}{l} -bbccxx + aabbcx - 3aab^4 \\ -3bbcfxx + 3aabbfx \\ \quad\quad\quad + 3b^4cx \end{array} \quad \text{Et } ccfx^3 - aacfxx$$

Divisant la premiere par $-bb$, & la seconde par $cfxx$, on aura

$$\begin{array}{l} ccxx - aacx + 3aabb \\ +3cfxx - 3aafx \\ \quad\quad\quad - 3bbcx \end{array} \quad \text{Et } cx - aa$$

On cherchera le plus grand diviseur commun, & on trouvera que $cx-aa=0$, est le plus grand diviseur commun ; par consequent $cx-aa=0$ contient une racine de la proposée, qui est $x=\frac{aa}{c}$.

On divisera la proposée par $cx-aa=0$, & l'on aura le quotient $\begin{array}{l} cfxx - 3bbfx + 3b^4 = 0 \\ \quad - bbcx. \end{array}$, qui contient les deux

autres racines de la proposée. On le partagera en deux sommes, mettant dans la premiere les grandeurs où est f, & les autres dans la seconde ; & l'on aura

$$cfxx - 3bbfx, \qquad \text{Et} \quad - bbcx + 3b^4.$$

Divisant la premiere par fx, & la seconde par $-bb$, l'on aura $cx - 3bb$, Et $cx - 3bb$. Ces deux sommes contenant les mêmes grandeurs, chacune est leur diviseur commun ; par consequent $cx - 3bb = 0$, contient une seconde racine de la proposée, qui est $x = \frac{3bb}{c}$.

Enfin divisant $\begin{matrix} cfxx - 3bbfx + 3b^4 = 0 \\ - bbcx \end{matrix}$, par $cx - 3bb = 0$, on trouvera pour quotient $fx - bb = 0$, qui contient la troisiéme racine de la proposée, qui est $x = \frac{bb}{f}$.

La démonstration est la même.

REMARQUES.

I.

ON pourroit proposer la même méthode de cette autre maniere. Il faut supposer toutes les grandeurs de l'équation proposée où se trouve une même lettre, ou deux lettres differentes, égales à zero ; en supposant que cette lettre, ou chacune de ces lettres, est égale à zero, & feindre une équation de toutes ces grandeurs ; & si l'on veut une autre de toutes les autres grandeurs de l'équation, & chercher un diviseur commun à ces deux équations ; ou bien (si l'on veut) chercher un diviseur commun à la proposée, & à l'une de ces deux équations, & faire le reste de l'operation marquée dans la méthode.

II.

Lorsque toutes les racines d'une équation composée sont incommensurables, & qu'elle ne peut pas être le produit d'équations simples commensurables, elle le peut être souvent de deux ou de plusieurs équations composées plus simples, chacune d'un moindre degré que la proposée, lesquelles équations composantes, quoiqu'elles n'ayent pas leurs racines commensurables, peuvent pourtant être elles-mêmes commensurables ; c'est-à-dire, elles peuvent ne contenir aucunes incommensurables. Or il est évident que la méthode qu'on vient d'expliquer, ne sert pas seulement à

trouver les racines commensurables de la proposée, mais aussi les équations composantes plus simples que la proposée, & dont elle est le produit, lorsque ces équations plus simples sont commensurables; ce qui sert à abaisser la proposée à un moindre degré.

III.

Lorsqu'après avoir fait le partage de toutes les grandeurs d'une équation composée en deux sommes, de toutes les manieres qu'il est possible, on ne trouve aucune équation simple qui la divise exactement, c'est une marque qu'elle n'a aucune racine commensurable; & lorsqu'on ne trouve aucune équation composée plus simple que la proposée qui la divise exactement, c'est une marque qu'elle ne peut être abaissée à un degré plus simple; c'est-à-dire, qu'elle ne peut être le produit d'autres équations composées plus simples qui soient commensurables.

IV.

Cette méthode s'étend aussi aux équations qui ont des incommensurables, lorsque ces équations sont le produit d'autres équations plus simples qui contiennent les mêmes incommensurables, ou du moins dont une les contient.

Pour trouver, par exemple, les racines de

$$\begin{matrix} x^3 + bxx \\ - xx\sqrt{ab+3bb} \end{matrix} + 2bx\sqrt{ab+3bb} + \begin{matrix} 18b^3 \\ - 6bb\sqrt{ab+3bb} \end{matrix} = 0,$$

on partagera cette équation en deux sommes, mettant dans la premiere les grandeurs où se trouve l'incommensurable $\sqrt{ab+3bb}$, & les autres dans la seconde; & l'on aura

$$- xx\sqrt{ab+3bb} + 2bx\sqrt{ab+3bb} - 6bb\sqrt{ab+3bb}.$$

Et $x^3 + bxx + 18b^3$. Divisant la premiere par $-\sqrt{ab+3bb}$, l'on aura pour la premiere $xx - 2bx + 6bb$. On cherchera le plus grand diviseur commun de la premiere & de la seconde somme, & l'on trouvera que $xx - 2bx + 6bb = 0$, est ce diviseur commun, par lequel divisant la proposée, on trouvera le quotient exact $x + 3b - \sqrt{ab+3bb} = 0$, qui contient une racine de la proposée, qui est $x = -3b + \sqrt{ab+3bb}$. Le diviseur $xx - 2bx + 6bb = 0$, contient les deux autres qui sont imaginaires, la premiere étant $x = b + \sqrt{-5bb}$; la seconde, $x = b - \sqrt{-5bb}$.

SECONDE

SECONDE MÉTHODE.

61. 1°. IL faut regarder une des grandeurs connues de l'équation composée dont on veut trouver les racines, ou bien les équations commensurables plus simples qui la divisent exactement, comme l'inconnue de l'équation ; & considerer l'inconnue de l'équation comme une grandeur connue, & ordonner l'équation par rapport à cette inconnue supposée.

2°. Il faut ensuite appliquer à l'équation ainsi ordonnée, la méthode du second Problême, ou la premiere méthode de cette section ; & si l'on trouve des équations, dans lesquelles l'inconnue de la proposée soit lineaire, qui divisent exactement cette équation, on aura les racines de la proposée. Si l'on trouve des équations qui divisent exactement cette équation, qui contiennent des puissances de l'inconnue de la proposée, l'on aura les équations composées plus simples que la proposée, dont elle est le produit. L'on operera sur chacune de ces équations composées plus simples, comme l'on a fait sur la proposée.

3°. Dans le choix qu'on fera d'une grandeur connue de la proposée, pour en faire l'inconnue de l'équation, il faut en prendre une dont la plus haute puissance soit moindre que celle de l'inconnue de la proposée, pour avoir une équation d'un moindre degré que la proposée, & qui soit par consequent plus facile à resoudre.

EXEMPLE.

POUR trouver les racines de cette équation du troisiéme degré,

$$\begin{array}{llll} x^3 & -2cxx & -acx & +ccd = 0, \\ & +axx & -bcx & -acd \\ & +bxx & +abx & -bcd \\ & +dxx & +ccx & +abd \\ & & -2cdx & \\ & & +adx & \\ & & +bdx & \end{array}$$

1°. on regardera la connue c comme inconnue, & l'inconnue x comme connue ; & après avoir ordonné l'équation par raport à l'inconnue c, on aura l'équation suivante du second degré

$$\begin{array}{lll} dcc & -adc & +abd = 0 \\ +xcc & -bdc & +abx \\ & -axc & +adx \\ & -bxc & +bdx \\ & -2dxc & +axx \\ & -2xxc & +bxx \\ & & +dxx \\ & & +x^3 \end{array}$$

2°. Pour se servir de la méthode du second Problême, il faut trouver tous les diviseurs du coëficient du premier terme $d+x$, qui sont $1 . d+x$; & leurs produits par l'inconnue c, qui sont c, $cd+cx$. Il faut aussi trouver tous les diviseurs du dernier terme. Pour les trouver, on feindra que ce dernier terme est une équation ; & l'on aura

$$\begin{aligned} x^3 + dxx &+ bdx + abd = 0. \\ + bxx &+ adx \\ + axx &+ abx \end{aligned}$$

On cherchera tous les diviseurs de son dernier terme abd, qui sont $1 . a . b . d . ab . ad . bd . abd$. On fera les équations simples $x+1=0$. $x+a=0$. $x+b=0$. $x+d=0$. Il est inutile d'en faire d'autres, parceque les racines de cette équation feinte sont toutes négatives, & les diviseurs ab. ad, &c. ont plus de dimensions qu'il n'en faut dans ces équations simples. L'on trouvera que la division de cette équation feinte se fait exactement par $x+a=0$, $x+b=0$, $x+d=0$.

Si l'on avoit besoin de tous les diviseurs du dernier terme, il n'y auroit qu'à multiplier ces équations simples les unes par les autres deux à deux ; mais ces diviseurs seroient inutiles, ayant plus de dimensions qu'il n'en faut.

Ayant les diviseurs du dernier terme, dont on a besoin, on fera, selon la méthode du second Problême, les équations simples de l'inconnue c, & de chacun des diviseurs du dernier terme ; & l'on aura $c-x-a=0$, $c-x-b=0$, $c-x-d=0$, &c. On ne fait pas les équations simples $dc+xc-x-a=0$, &c. parceque le premier terme $dc+xc$, a plus de dimensions qu'il ne faut. On divisera l'équation, dont c est supposée l'inconnue, par ces équations simples, & on trouvera qu'elle se divise sans reste par $c-x-a=0$, & par $c-x-b=0$. Ainsi ces équations simples contiennent chacune une racine de la proposée. La premiere est $x=c-a$; la seconde, $x=c-b$; & l'on trouvera, après avoir divisé la proposée par les équations simples $x+a-c=0$, $x+b-c=0$, le quotient exact $x+d=0$, qui contient la troisiéme racine $x=-d$.

REMARQUE.

ON auroit beaucoup abregé l'operation précedente, si l'on avoit examiné, avant de chercher les diviseurs du dernier

terme de l'équation dont c a été ſuppoſée l'inconnue, ſi un des diviſeurs du premier terme $dcc + xcc$, par exemple $d + x$, ne le ſeroit point auſſi de toute cette équation ; & comme l'on auroit trouvé qu'il la diviſe ſans reſte, & que le quotient eſt

$$\begin{array}{lll} cc & - ac & + ab = 0, \\ & - bc & + ax \\ & - 2xc & + bx \\ & & + xx \end{array}$$

le diviſeur $d + x = 0$, contiendroit déja une racine de la propoſée qui eſt $x = -d$. L'on trouveroit les deux autres en operant ſeulement ſur le quotient : mais on ne s'eſt pas ſervi de cet abregé, afin de faire mieux concevoir cette ſeconde méthode.

Autre maniere par la premiere méthode de cette Section.

ON partagera l'équation ordonnée par raport à la lettre c, conſiderée comme inconnue, en deux ſommes, mettant dans la premiere les grandeurs où ſe trouve la lettre d, & les autres dans la ſeconde, & l'on aura

$$\begin{array}{lll} + dcc & - adc & + abd \\ & - bdc & + adx \\ & - 2dxc & + bdx \\ & & + dxx \end{array} \quad \text{Et} \quad \begin{array}{lll} xcc & - axc & + abx \\ & - bxc & + axx \\ & - 2xxc & + bxx \\ & & + x^3 \end{array}$$

Diviſant la premiere par d, & la ſeconde par x, on aura pour l'une & l'autre,

$$\begin{array}{lll} cc & - ac & + ab \\ & - bc & + ax \\ & - 2xc & + bx \\ & & + xx \end{array}$$

Ainſi le plus grand diviſeur commun des deux ſommes eſt

$$\begin{array}{lll} cc & - ac & + ab = 0, \\ & - bc & + ax \\ & - 2xc & + bx \\ & & + xx \end{array}$$

On diviſera l'équation, dont c eſt ſuppoſée l'inconnue, par ce diviſeur commun, & l'on trouvera le quotient $d + x = 0$, qui contient une racine de la propoſée, qui eſt $x = -d$; pour avoir les deux autres, on partagera le diviſeur commun en deux ſommes, mettant dans la premiere les grandeurs où ſe trouve a, & les autres dans la ſeconde ; & l'on aura

$$\begin{array}{ll} - ac & + ab \\ & + ax \end{array} \quad \text{Et} \quad \begin{array}{lll} cc & - bc & + bx \\ & - 2xc & + xx \end{array}$$

Divisant la premiere par $-a$, l'on aura pour la premiere $c-b-x$, qui divise exactement la seconde ; ainsi $c-b-x=0$ contient une seconde racine de la proposée, qui est $x=c-b$. Divisant $cc-ac+ab=0$, par $c-b-x=0$,

$$\begin{array}{l} cc - ac + ab = 0 \\ \quad - bc + ax \\ \quad - 2xc + bx \\ \qquad\quad + xx \end{array}$$

l'on trouvera le quotient $c-a-x=0$, qui contient la troisiéme racine qui est $x=c-a$.

Démonstration de la seconde méthode.

IL est évident que les diviseurs exacts de l'équation qu'on a ordonnée par raport à une des lettres connues de la proposée, regardée comme inconnue, sont aussi des diviseurs exacts de la proposée ; & que s'ils contiennent l'inconnue
*26 & 27. lineaire x de la proposée, * ils en contiennent les racines ; s'ils contiennent les puissances de l'inconnue x de la proposée, ce sont les équations commensurables plus simples que la proposée, dont elle est le produit : Or la méthode fait trouver ces diviseurs exacts, lorsqu'il y en a ; elle fait donc trouver les racines commensurables de la proposée, ou les équations commensurables plus simples que la proposée, dont elle est le produit.

Troisiéme méthode par le moyen des transformations.

Remarques necessaires pour concevoir clairement cette méthode.

CETTE troisiéme méthode servira à abreger la méthode generale du premier Problême, principalement dans les équations numeriques ; elle s'étend aussi aux équations litterales ; mais les deux méthodes qui précedent, sont ordinairement les plus courtes de toutes pour ces équations.

La longueur de la méthode generale du premier Problême pour trouver les racines d'une équation composée, vient de ce qu'étant necessaire de diviser cette équation par une équation simple qui contienne l'inconnue plus ou moins un des diviseurs du dernier terme ; quand ce dernier terme a beaucoup de diviseurs, il y a beaucoup de divisions à faire, avant de trouver les équations simples, qui en sont les di-

viſeurs ; ainſi la maniere d'abreger cette méthode, ſeroit de diminuer le nombre des diviſeurs du dernier terme de la propoſée, ou de pouvoir diſtinguer parmi ces diviſeurs ceux-là ſeulement qui ſont utiles, & de laiſſer les autres.

Cela ſe peut faire par le moyen des transformations ; 1°. en trouvant une transformée dont le dernier terme contienne moins de diviſeurs que la propoſée ; par cette maniere on trouvera plus facilement les racines de la transformée, qui feront enſuite connoître celles de la propoſée. 2°. En trouvant une ou pluſieurs transformées, dont les racines ſoient celles de la propoſée augmentées ou diminuées d'une grandeur connue ; car les racines de ces transformées étant diminuées ou augmentées de la même grandeur connue, ſeront celles de la propoſée ; & ces racines des transformées devant être des diviſeurs de leurs derniers termes, en diminuant ou augmentant tous les diviſeurs des derniers termes de ces transformées de la même grandeur connue, il eſt évident qu'il n'y aura que les diviſeurs ainſi diminuez ou augmentez, qui ſeront communs avec les diviſeurs du dernier terme de la propoſée, qui pourront être les racines de la propoſée ; ce qui fera diſtinguer parmi tous les diviſeurs du dernier terme de la propoſée, ceux-là ſeulement qui en pourront être les racines.

Mais comme l'on n'a beſoin que des ſeuls derniers termes des transformées, il faut ſe ſouvenir pour abreger le calcul, 1°. qu'en ſubſtituant une grandeur connue poſitive dans la propoſée à la place de l'inconnue, * la ſomme de toutes les grandeurs de l'équation, après la ſubſtitution, eſt le dernier terme de la transformée, dont les racines ſeroient celles de la propoſée diminuées de cette même grandeur connue : 2°. qu'en ſubſtituant une grandeur connue négative dans la propoſée à la place de l'inconnue, * la ſomme de toutes les grandeurs de l'équation, après la ſubſtitution, eſt le dernier terme de la transformée, dont les racines ſeroient celles de la propoſée augmentées de la même grandeur connue. Et dans ce dernier cas, il ſuffit de ſubſtituer la grandeur connue comme ſi elle étoit poſitive, & de changer tous les ſignes des termes où les puiſſances de l'inconnue ont des expoſans impairs ; c'eſt-à-dire, où il y a x, x^3, x^5, &c. Ces choſes ſuppoſées. Voici la troiſiéme méthode.

* 39.

* 39.

62. *Méthode pour transformer une équation proposée en une autre, dont le dernier terme ait moins de diviseurs que le dernier terme de la proposée.*

PREMIER CAS.

QUAND les puissances de suite d'un diviseur du coëficient du second terme, sont des diviseurs de tous les termes suivans; & quand le second terme étant évanoui, les puissances de suite d'un quarré diviseur du coëficient du troisiéme terme, sont des diviseurs de tous les termes suivans.

IL faut trouver la transformée, dont les racines soient les racines de l'équation, divisées par le diviseur du second terme, dont les puissances prises de suite, sont des diviseurs des coëficiens suivans & du dernier terme; & le dernier terme de la transformée aura beaucoup moins de diviseurs que celui de la proposée.

Lorsque le second terme est évanoui, il faut trouver la transformée, dont les racines soient les racines de la proposée, divisées par la racine du quarré diviseur du troisiéme terme, dont les puissances prises de suite, sont des diviseurs des coëficiens suivans & du dernier terme.

EXEMPLE I.

POUR transformer l'équation $x^3 - 4xx + 12x - 144 = 0$, en une autre, dont le dernier terme ait moins de diviseurs que 144, qui en a beaucoup, je remarque que les puissances 4 & 8 de 2, qui est un diviseur du second terme 4, sont des diviseurs de 12 & de 144; c'est-à-dire 4, quarré de 2, est diviseur de 12, & 8 cube de 2, l'est de 144.

Je divise chaque racine de la proposée par 2, c'est-à-dire, je suppose * $\frac{x}{2} = y$, d'où je tire $x = 2y$; je fais la substitution de cette valeur de x, à la place de x, dans la proposée, ce qui se fait par abregé, en divisant 4 par 2, 12 par 4, 144 par 8; je trouve la transformée $y^3 - 2yy + 3y - 18 = 0$, dont le dernier terme 18 a bien moins de diviseurs que 144. Les diviseurs de 18 sont 1. 2. 3. 6. 9. 18.

* 36. 5e Transformation.

Je trouve que $y^3 - 2yy + 3y - 18 = 0$, se divise exactement par $y - 3 = 0$, & que le quotient est $yy + 1y + 6 = 0$. Ainsi $+ 3$ est une racine positive de la transformée; le quotient contient les deux autres qui sont imaginaires. En

ſubſtituant 3 à la place de y dans $x = 2y$, l'on aura $x = 6$; ainſi 6 eſt la racine de la propoſée.

EXEMPLE II.

SOIT la propoſée $x^3 - 144x - 10368 = 0$, dont le dernier terme a beaucoup de diviſeurs, mais il eſt diviſible par la troiſiéme puiſſance de 12; & le troiſiéme terme $144x$ eſt diviſible par le quarré de 12.

Il faut transformer cette équation en une autre qui ſoit telle, que les racines de la propoſée, diviſées par 12, ſoient celles de la transformée; ainſi il faut ſuppoſer $x = 12y$; & après la ſubſtitution, qui ſe fait par abregé, * en diviſant 144 par 144 quarré de 12, & 10368 par 1728 cube de 12, l'on aura la transformée $y^3 - 1y - 6 = 0$, dont le dernier terme 6, n'a que les diviſeurs 1. 2. 3. 6.

* 36. 5e Transformation.

Diviſant cette transformée par $y - 2 = 0$, la diviſion ſe fait ſans reſte, & l'on trouve le quotient $yy + 2y + 3 = 0$. Ainſi + 2 eſt une racine poſitive de la transformée; & les deux autres que contient le quotient, ſont imaginaires.

Subſtituant + 2 à la place de y dans $x = 12y$, l'on a $x = 24$; ainſi + 24 eſt la racine de la propoſée.

Second cas pour toutes les équations.

TRANSFORMER une équation, dont le dernier terme a beaucoup de diviſeurs, en une autre dont le dernier terme en ait moins, lorſque l'équation n'a pas les conditions du premier cas.

SOIT la propoſée $x^3 - 10xx + 19x - 24 = 0$, qu'il faut transformer en une autre, dont le dernier terme ait moins de diviſeurs que celui de la propoſée.

Il faut ſubſtituer dans la propoſée, à la place de x & de ſes puiſſances, 1°. l'unité, c'eſt-à-dire + 1; 2°. — 1; 3°. + 2 & ſes puiſſances; 4°. — 2 & ſes puiſſances; & ainſi de ſuite + 3, — 3, &c. Il faut prendre la ſomme des grandeurs de l'équation après chaque ſubſtitution.

Quand on en trouvera une qui a moins de diviſeurs que le dernier terme de la propoſée, il faudra ſuppoſer l'inconnue de la propoſée $x = y +$ ou — le nombre dont la ſubſtitution a donné la ſomme qui a le moins de diviſeurs, & ſubſtituer cette valeur de x, à la place de x, dans la pro-

posée ; & l'on aura une transformée, dont le dernier terme aura moins de diviseurs que celui de la proposée.

Il faut en chercher les racines ; & quand on les aura trouvées, elles feront connoître celles de la proposée.

En substituant $+ 1$ dans l'exemple proposé $x^3 - 10xx + 19x - 24 = 0$, à la place de x, l'on trouve $1 - 10 + 19 - 24 = - 14$: or 14 a moins de diviseurs que 24. C'est pourquoi je suppose $x = y + 1$; & substituant $y + 1$ & ses puissances, à la place de x & de ses puissances, dans la proposée, je trouve la transformée suivante $y^3 - 7yy + 2y - 14 = 0$. Les diviseurs du dernier terme sont 1 . 2 . 7 . 14. Cette transformée se divise exactement par $y - 7 = 0$, & le quotient est $yy + 2 = 0$; ainsi $y = 7$, & substituant 7 à la place de y, dans $x = y + 1$, je trouve $x = 8$; ainsi 8 est une racine positive de la proposée.

63. *Méthode pour faire distinguer parmi les diviseurs du dernier terme d'une équation, ceux qui en peuvent être les racines.*

1°. Il faut substituer successivement dans la proposée 1 . 2 . 3 . 4, &c. à la place de l'inconnue.

2°. Il faut prendre la somme de toutes les grandeurs de l'équation, après la substitution de chacun de ces nombres, & l'on aura autant de sommes qu'on a substitué de nombres.

3°. Il faut trouver tous les diviseurs du dernier terme de la proposée, & tous les diviseurs de chacune de ces sommes.

4°. Il faut ajouter à tous les diviseurs de chaque somme, le nombre dont la substitution a donné la somme de laquelle ils sont diviseurs ; & après les avoir ainsi augmentez, leur ajouter le signe +, c'est-à-dire, les regarder comme positifs.

Il faut retrancher de tous les mêmes diviseurs de chaque somme, le même nombre dont la substitution a donné la somme de laquelle ils sont les diviseurs, marquant + devant les restes de ceux qui étoient moindres que le nombre qu'on en a retranché, & le signe — devant les restes de ceux qui étoient plus grands.

5°. Il faut choisir parmi tous les diviseurs augmentez positifs de chaque somme, ceux-là seulement qui sont communs avec les diviseurs du dernier terme de la proposée ; & ce seront les seuls qui pourront être les racines positives de la proposée ; ainsi il faudra diviser la proposée par x moins chacun

chacun de ces diviſeurs communs ; & les diviſions qui ſe feront ſans reſte, feront connoître les racines poſitives de la propoſée.

On choiſira de même parmi les diviſeurs négatifs diminuez, ceux-là ſeulement qui ſont communs avec les diviſeurs du dernier terme de la propoſée, & on diviſera la propoſée par x plus chacun de ces diviſeurs ; & lorſque la diviſion ſe fera ſans reſte, on connoîtra les racines négatives de la propoſée.

EXEMPLE

L'ÉQUATION propoſée eſt $x^3 - 10xx + 19x - 24 = 0$; on ſubſtituera 1 . 2 . 3 . 4, &c. à la place de x, comme on le voit ici.

x^3	$-10xx$	$+19x$	$-24 = 0.$
1	1	1	
8	4	2	
27	9	3	
64	16	4	

					Sommes.
Subſtitution de 1,	$+1$	-10	$+19$	-24	$= -14$
Subſtitution de 2,	$+8$	-40	$+38$	-24	$= -18$
Subſtitution de 3,	$+27$	-90	$+57$	-24	$= -30$
Subſtitution de 4,	$+64$	-160	$+76$	-24	$= -44.$

Diviſeurs de 24, 1 . 2 . 3 . 4 . 6 . 8 . 12 . 24.

Diviſeurs de 14, 1 . 2 . 7 . 14.
Diviſeurs de 18, 1 . 2 . 3 . 6 . 9 . 18.
Diviſeurs de 30, 1 . 2 . 3 . 5 . 6 . 10 . 15 . 30.
Diviſeurs de 44, 1 . 2 . 4 . 11 . 22 . 44.

Diviſeurs de 14 augmentez de l'unité, $+2, +3, +8, +15$.
Diviſeurs de 14 diminuez de 1, $0, -1, -6, -13$.
Diviſeurs de 18 augmentez de 2, $+3, +4, +5, +8, +11, +20$.
Diviſeurs de 18 diminuez de 2, $+1, 0, -1, -4, -7, -16$.
Diviſeurs de 30 augmentez de 3, $+4, +5, +6 + 8 + 9 + 13 + 18, +33$.
Diviſeurs de 30 diminuez de 3, $+2, +1, 0, -2, -3, -7 - 12, -27$.
Diviſeurs de 44 augmentez de 4, $+5, +6, +8, +15, +26, +48$.
Diviſeurs de 44 diminuez de 4, $+3, +2, 0, -7, -18 -40$.

Après avoir ainſi fait les ſubſtitutions de 1, 2, 3, 4; trouvé les ſommes après les ſubſtitutions, & tous les diviſeurs de chaque ſomme, & augmenté & diminué tous les diviſeurs de chaque ſomme, du nombre dont la ſubſtitution a fait trouver la ſomme, & bien diſtingué les poſitifs & les négatifs; il faut choiſir parmi les poſitifs les ſeuls qui ſont communs à chaque ſomme & aux diviſeurs du dernier terme 24 de la propoſée.

L'on trouve qu'il n'y a que 8 qui ſoit commun; ainſi l'on eſt réduit à diviſer la propoſée par $x - 8 = 0$, & la diviſion étant exacte, l'on a une racine de la propoſée qui eſt $x = 8$.

L'on chercheroit de même ſi parmi tous les diviſeurs négatifs de toutes les ſommes, il n'y en auroit point de commun à toutes les ſommes & aux diviſeurs de 24; & s'il y en avoit quelqu'un, on feroit la diviſion de la propoſée par $x +$ ce diviſeur commun; & ſi la diviſion étoit juſte, on auroit une racine négative: mais il n'y en a aucun dans notre exemple, qui ne peut avoir que des racines poſitives, tous les termes ayant alternativement $+$ & $-$.

Démonſtration de cette méthode.

CHACUNE des ſommes qu'on trouve après les ſubſtitutions des nombres à la place de x dans la propoſée, eſt le dernier terme de la transformée, dont les racines poſitives ſont les racines poſitives de la propoſée, diminuées du nombre dont la ſubſtitution a donné cette ſomme, & dont les racines négatives ſont les négatives de la propoſée, augmentées du nombre dont la ſubſtitution a donné la ſomme, & dont enfin les racines négatives moindres chacune que le nombre ſubſtitué, ſont encore celles des racines poſitives de la propoſée moindres que le même nombre, qui étant diminuées de ce même nombre plus grand qu'elles, ſont devenues négatives dans la transformée, par le ſurplus de ce nombre ſur ces racines poſitives. Cela eſt évident par le troiſiéme & qua-

38 & 39. triéme Corollaires des transformations, qu'il faut ſe rendre familiers pour bien entendre cette démonſtration.

D'où il ſuit que les racines poſitives des transformées étant augmentées du nombre dont la ſubſtitution a donné leur dernier terme, ſont les racines poſitives de la propoſée; & les racines négatives des transformées étant diminuées du

même nombre, ſont les racines négatives de la propoſée; enfin les racines négatives des transformées moindres que le nombre dont la ſubſtitution a donné leur dernier terme, étant retranchées de ce nombre, les quantitez de ſurplus ſont les racines poſitives de la propoſée qui ſont moindres que ce nombre.

Mais dans le temps qu'on ignore les racines des transformées & de la propoſée, on regarde tous les diviſeurs des derniers termes des transformées comme leurs racines; ainſi après les avoir augmentez du nombre qui a donné le dernier terme de chaque transformée, on peut regarder ces diviſeurs ainſi augmentez, comme les racines poſitives de la propoſée; & après les avoir diminuez du même nombre, on les peut regarder comme les racines négatives de la propoſée; & enfin après avoir retranché du nombre qui a donné le dernier terme d'une transformée, les diviſeurs moindres que ce nombre, on peut regarder les reſtes comme les racines poſitives de la propoſée, qui ſont moindres que ce nombre.

Cependant les transformées n'ayant pas d'autres racines que la propoſée, ſçavoir les poſitives de la propoſée, diminuées du nombre qui a donné le dernier terme de la transformée, & les négatives augmentées du même nombre, il faut que ceux des diviſeurs de leurs derniers termes qui ſont leurs racines, étant augmentez ou diminuez du même nombre qui a donné le dernier terme de la transformée, ſoient égaux aux racines de la propoſée; & par conſequent ceux d'une transformée à ceux de l'autre, & que les mêmes ſoient égaux à ceux des diviſeurs du dernier terme de la propoſée qui en ſont les racines.

D'où il ſuit que ceux qui ne ſont pas communs, ne peuvent être les racines de la propoſée, & qu'il n'y a que ceux qui ſont communs qui puiſſent en être les racines. La méthode fait donc diſtinguer les diviſeurs du dernier terme de la propoſée, qui en peuvent être les racines; ce qui étoit propoſé.

Application de la méthode précedente aux équations litterales.

SOIT $x^3 - 2axx + aax + aab = 0$, dont il faut trouver
$$\begin{matrix} & & -abx & & \end{matrix}$$
les racines par cette methode.

Il faut d'abord trouver tous les diviſeurs de ſon dernier terme, qui ſont 1, a, b, aa, ab, aab.

Il n'y aura que les trois premiers qui ſerviront; les autres ayant deux dimenſions, ne peuvent ſervir à former les équations ſimples par leſquelles il faut diviſer la propoſée, pour en trouver les racines.

Il faut transformer la propoſée en une autre, dont les racines poſitives ſoient celles de la propoſée, diminuées d'une grandeur connue, & les négatives ſoient les négatives de la propoſée, augmentées de la même grandeur connue; c'eſt-à-dire, il faut trouver le ſeul dernier terme de cette transformée.

On prendra cette grandeur connue parmi les grandeurs connues de la propoſée; on ſuppoſera, par exemple, que c'eſt $2a$.

On fera la ſubſtitution de $2a$, au lieu de x dans la propoſée, & on trouvera que la ſomme des grandeurs de l'équation, après la ſubſtitution, eſt $2a^3 - aab$; c'eſt-à-dire, c'eſt le dernier terme de la transformée.

Les diviſeurs lineaires de cette ſomme ſont 1, a, $2a - b$; ceux de deux dimenſions ſont inutiles.

Les augmentant de $2a$, on aura $+ 2a + 1$, $+ 3a$, $+ 4a - b$.

Retranchant de $2a$ les diviſeurs moindres 1 & a, l'on aura $+ 2a - 1$, $+ a$.

Les ſeules grandeurs poſitives que donne la transformée pour trouver les racines poſitives de la propoſée, ſont donc $+ 2a + 1$, $+ 3a$, $+ 4a - b$, $+ 2a - 1$, $+ a$.

Retranchant $2a$ du diviſeur $2a - b$, l'on aura $- b$ pour la ſeule grandeur négative que donne la transformée, pour trouver les racines négatives de la propoſée.

Or il n'y a que la grandeur $+ a$, parmi les poſitives, de commune avec le diviſeur $+ a$ du dernier terme de la propoſée; ainſi il faut voir ſi la propoſée peut être diviſée par $x - a = 0$; & la diviſion ſe faiſant ſans reſte, $x - a = 0$ contient une racine de la propoſée, qui eſt $x = a$; & le quotient $xx - ax - ab = 0$, contient les deux autres, qui ſont $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + ab}$, & $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + ab}$.

SECTION III.

Où l'on explique la méthode generale pour trouver par Analyse toutes les équations commensurables plus simples, dont une équation composée est le produit; c'est-à-dire, la méthode de la réduire au moindre degré.

DÉFINITION.

TOUTE équation composée, qu'on suppose sans incommensurables, peut être divisée sans reste par des équations commensurables plus simples qu'elle n'est; ou bien elle ne le peut pas.

Lorsqu'elle peut être ainsi divisée, on dit qu'elle est *réductible*, & qu'elle n'est pas du degré où elle se trouve, mais seulement des degrez plus simples, dont sont les équations plus simples, par lesquelles elle peut être exactement divisée, supposé que ces équations plus simples ne puissent pas être divisées par d'autres équations commensurables encore plus simples.

Mais lorsqu'elle ne peut être ainsi divisée sans reste par d'autres équations commensurables plus simples, on dit qu'elle est *irréductible*, & qu'elle est du degré où elle se trouve.

Ainsi une équation du cinquiéme degré, par exemple, qui ne peut être divisée sans reste, par aucune équation commensurable plus simple, est *irréductible*, & elle est proprement du cinquiéme degré.

Mais une équation du cinquiéme degré, qui peut être divisée sans reste par une équation irréductible du second degré, & par une équation irréductible du troisiéme degré, est *réductible*, & elle n'est pas proprement du cinquiéme degré, mais du second & du troisiéme degré.

REMARQUES.

POUR faire le dénombrement exact des équations commensurables plus simples, par lesquelles les équations composées réductibles de chaque degré, peuvent être divisées sans reste, on peut dire que dans chaque degré elles ne le peu-

vent être que par autant d'équations plus ſimples qu'on peut partager le nombre qui en exprime le degré en d'autres nombres entiers, y comprenant l'unité, qui joints enſemble, feront ce même nombre.

On peut partager le nombre 3 qui exprime le troiſiéme degré : 1°. en 1, 1, 1 ; 2°. en 1, 2.

Ainſi les équations du troiſiéme degré ne peuvent être réductibles qu'en trois équations du premier degré, ou en deux équations, l'une du premier, & l'autre du ſecond degré.

On peut partager le nombre 4 qui exprime le quatriéme degré : 1°. en 1, 1, 1, 1 ; 2°. en 1, 1, 2 ; 3°. en 1, 3 ; 4°. en 2, 2. Ainſi les équations réductibles du 4e degré ne peuvent être diviſées ſans reſte que par quatre équations chacune du premier degré, ou par trois, dont deux ſoient du premier, & la troiſiéme du ſecond degré ; ou par deux, dont l'une ſoit du premier, & l'autre du troiſiéme degré ; ou par deux, dont chacune ſoit du ſecond degré.

On peut appliquer facilement ce qu'on vient de dire aux degrez plus élevez.

Lorſqu'on cherche les équations commenſurables plus ſimples, par leſquelles une équation compoſée peut être exactement diviſée, l'ordre naturel & la facilité de l'operation exigent qu'on commence par les plus ſimples ; c'eſt à-dire, 1°. qu'on cherche les équations du premier degré par leſquelles elle peut être diviſée ; & après en avoir trouvé une, qu'on cherche encore ſi le quotient peut être diviſé par une équation du premier degré, en continuant ainſi juſqu'à ce qu'on trouve un quotient qui ne puiſſe être diviſé par une équation du premier degré : 2°. ſi la propoſée ne peut être diviſée par une équation du premier degré, ou ſi l'on eſt arrivé à un quotient qui ne le puiſſe être, il faut chercher ſi elle, ou le quotient ne peuvent point être diviſez par une du ſecond degré ; & ſi on n'en peut trouver du ſecond degré, il en faut chercher une du troiſiéme ; & ainſi de ſuite, ne paſſant aux degrez plus compoſez, qu'après être aſſuré qu'on ne peut trouver d'équations plus ſimples, qui faſſent exactement la diviſion de la propoſée.

Il faut même remarquer, qu'en cherchant ainſi les équations commenſurables plus ſimples, qui ſont des diviſeurs exacts d'une propoſée, il faut ſe borner à celle dont le

degré eſt la moitié du degré de la propoſée, lorſque la propoſée eſt d'un degré pair ; par exemple, ſi elle eſt du quatriéme degré, il ne faut pas paſſer le ſecond ; ſi elle eſt du ſixiéme, ne pas paſſer le troiſiéme, &c. & ſi la propoſée eſt d'un degré impair, il faut ſe borner à l'équation qui eſt moindre d'un demi que la moitié du degré de la propoſée ; ainſi il faut ſe borner à une équation du ſecond degré, lorſque la propoſée eſt du cinquiéme degré ; à une du troiſiéme, lorſque la propoſée eſt du ſeptiéme, &c.

La raiſon eſt que, quand on aura ces équations moindres jusqu'à celle du degré, qui eſt la moitié de celui de la propoſée, ou d'un demi moindre que la moitié de celui de la propoſée, en diviſant la propoſée par ces équations moindres, les quotiens ſont les équations plus élevées, dont la propoſée eſt le produit ; & ſi l'on ne trouve aucune de ces équations moindres, on eſt aſſuré que la propoſée n'eſt pas diviſible par les équations plus élevées, puiſqu'elle ne le ſçauroit être par ces équations plus élevées, qu'elle ne le ſoit auſſi par les moindres, dont le degré joint avec celui des plus élevées, feroit le degré de l'équation propoſée.

D'où il ſuit, que ſi une équation du troiſiéme degré ne ſe peut diviſer par une du premier degré, elle eſt irreductible ; ſi une du quatriéme ne peut être diviſée par une du premier, & par une du ſecond, elle eſt irréductible ; ſi une du cinquiéme ne le peut être par une du premier, ou par une du ſecond, elle eſt irréductible, & ainſi de ſuite.

On a déja donné la methode generale pour trouver les équations commenſurables du premier degré, par leſquelles une équation compoſée peut être exactement diviſée ; ainſi on ſuppoſera dans cette ſection, qu'on a déja trouvé toutes les équations ſimples commenſurables du premier degré, par leſquelles une équation compoſée peut être exactement diviſée, & qu'il ne s'agit plus que de trouver les autres équations commenſurables du ſecond, troiſiéme degré, &c. par leſquelles elle peut ſe diviſer exactement. On ne parlera point du troiſiéme degré, puiſqu'il ſuffit de trouver ſi une équation du troiſiéme degré peut ou ne peut pas ſe diviſer ſans reſte par une équation du premier degré, pour ſçavoir ſi elle eſt réductible ou irréductible.

On n'appliquera auſſi les méthodes qu'on va donner, qu'aux

équations du quatriéme, cinquiéme & sixiéme degré, parceque dans l'usage ordinaire, on n'a pas besoin des degrez plus élevez, où les calculs sont immenses; cependant ces méthodes peuvent s'étendre à tous les degrez.

Pour mettre de l'ordre dans cette section, on expliquera, 1°. la méthode de trouver les équations commensurables du second degré, par lesquelles les équations du quatriéme, cinquiéme & sixiéme degré peuvent être divisées exactement, lorsqu'il manque quelque terme dans une de ces équations du second degré, dont elles sont le produit; comme aussi la méthode de trouver les équations du second, troisiéme & quatriéme degré, dont les équations du cinquiéme & sixiéme peuvent être le produit, lorsqu'il manque quelque terme dans celle de ces deux équations plus simples, qui est du troisiéme degré, ou du quatriéme. 2°. La méthode de trouver les mêmes équations commensurables plus simples, par lesquelles les équations du quatriéme, cinquiéme & sixiéme degré peuvent être divisées sans reste, lorsqu'il ne manque aucun terme dans ces équations plus simples.

PROBLÊME III.

64. *TROUVER les équations commensurables du second degré, par lesquelles une équation réductible du quatriéme peut être divisée sans reste, lorsque le second terme manque dans une de ces équations du second degré. Trouver l'équation du second degré, & celle du troisiéme ou du quatriéme, par lesquelles les équations réductibles du cinquiéme & sixiéme degré peuvent être divisées sans reste, lorsqu'il manque quelque terme dans l'une ou l'autre de ces équations du second & troisiéme, ou quatriéme degré. Trouver enfin les deux équations chacune du troisiéme degré, par lesquelles une équation réductible du sixiéme degré, peut être divisée sans reste, lorsqu'il manque un ou plusieurs termes dans une de ces équations plus simples du troisiéme degré.*

MÉTHODE.

1°. POUR le trouver generalement, il faut supposer que toutes les équations du quatriéme, cinquiéme & sixiéme degré, sont exprimées par ces formules.

$$x^4 + nx^3 + pxx + qx + r = 0.$$
$$x^5 + nx^4 + px^3 + qxx + rx + s = 0.$$
$$x^6 + nx^5 + px^4 + qx^3 + rxx + sx + t = 0.$$

Les

Les lettres n, p, q, &c. marquent d'une maniere generale les coëficiens avec leurs signes ; c'est-à-dire, quoique ces lettres n, p, q, &c. ayent les signes $+$, il faut supposer que ces signes marquent ceux des termes des équations qu'expriment ces formules ; & quand ils marquent des moins, il faut changer les signes dans les formules qu'on trouvera dans les résolutions devant ces lettres, aux degrez impairs ; par exemple, si $+n$ marque un coëficient négatif, on marquera dans les formules des résolutions le signe $-$ devant n, n^3, &c. Lorsqu'il manquera quelques termes dans les équations que représentent les formules, on supposera les mêmes termes des formules égaux à zero.

2°. Il faut supposer les deux équations plus simples qu'on cherche, exprimées d'une maniere indéterminée, c'est-à-dire, de maniere que chacune ait la même inconnue x que la proposée, & que les coëficiens de leurs termes soient marquez par des lettres indéterminées ; on prendra pour ces lettres indéterminées, les lettres f, g, h, i, k, l, m, laissant les lettres a, b, c, d, e, pour marquer les grandeurs connues & déterminées ; les lettres v, x, y, z, pour marquer les inconnues ; & les lettres n, p, q, r, s, t, pour marquer les coëficiens des formules d'une maniere generale.

Ainsi pour le quatriéme degré, on supposera que les équations du second degré qu'on cherche, sont $xx+fx+g=0$, & $xx+hx+i=0$; pour le cinquiéme degré ; $xx+fx+g=0$, & $x^3+hxx+ix+k=0$; pour le sixiéme degré, $xx+fx+g=0$, & $x^4+hx^3+ixx+kx+l=0$; ou bien lorsque l'on cherche pour le sixiéme degré deux équations chacune du troisiéme degré, on supposera $x^3+fxx+gx+h=0$, & $x^3+ixx+kx+l=0$.

Mais parceque dans ce Problême on suppose que le second terme manque dans une des deux équations plus simples, on supposera dans le quatriéme degré $xx+fx+g=0$, & $xx+i=0$; pour le cinquiéme degré, $xx+fx+g=0$, & $x^3+ix+k=0$; pour le sixiéme, $xx+fx+g=0$, & $x^4+ixx+kx+l=0$; ou bien $x^3+gx+h=0$, & $x^3+ixx+kx+l=0$.

Si c'étoit quelqu'autre terme qui manquât dans l'une ou l'autre des deux équations plus simples de chaque degré, on

ſuppoſeroit dans les équations indéterminées qu'on vient de former, que ces termes ſont évanouis.

3°. Il faut multiplier les deux équations indéterminées qui ſont pour chaque degré, l'une par l'autre, & leur produit ſera une équation indéterminée du même degré que la propoſée.

On ſuppoſera chaque terme de cette équation indéterminée (excepté le premier) égal à celui qui lui répond dans la formule; c'eſt-à-dire, le ſecond terme de l'indéterminée égal au ſecond terme de la propoſée, le troiſiéme égal au troiſiéme, &c. ce qui donnera autant d'équations particulieres qu'on a ſuppoſé de lettres indéterminées.

4°. On regardera toutes ces équations particulieres comme les équations du Problême, qu'il faut réduire à une ſeule, dont l'inconnue ſoit la lettre indéterminée de celle des deux équations indéterminées plus ſimples, qui n'a que les ſeuls premier & dernier termes, ou dont l'inconnue ſoit la lettre indéterminée qui marque le coëficient du ſecond terme de la plus ſimple des deux équations indéterminées, ou ſi le ſecond terme en eſt évanoui, la lettre indéterminée qui marque le coëficient du troiſiéme terme de la même équation; c'eſt-à-dire, on dégagera toutes les déterminées comme étant des inconnues, obſervant de ne pas dégager l'indéterminée, qui doit ſervir d'inconnue à l'équation du Problême.

Cette équation qui a pour inconnue une des lettres indéterminées des équations indéterminées, s'appelle la *Réduite*.

5°. On cherchera la valeur commenſurable de l'indéterminée de la réduite par la méthode generale, ou lorſque la réduite n'eſt que du ſecond degré, par la méthode qu'on a donnée pour le ſecond degré.

Ou bien on trouvera une ſeconde réduite qui ait pour inconnue la même indéterminée, & on cherchera le diviſeur commun des deux réduites, & enſuite la valeur de l'inconnue du diviſeur commun.

La valeur de l'indéterminée de la réduite étant connue, en la ſubſtituant dans les équations particulieres, on déterminera tous les coëficiens indéterminez, & par conſequent on aura les deux équations qu'on cherche.

Ou bien on ſubſtituera la valeur de l'indéterminée de la réduite dans la plus ſimple des deux équations indétermi-

nées qu'on a ſuppoſées, & l'on aura après les ſubſtitutions, les formules qui marquent une des équations plus ſimples, par leſquelles la propoſée peut ſe diviſer exactement, ſi elle n'eſt pas irréductible, ou bien on aura les formules des deux équations plus ſimples, ſi on a fait toutes les ſubſtitutions. On s'en ſervira enſuite pour réduire une équation composée aux plus ſimples dont elle eſt compoſée.

Tout ceci s'éclaircira par les applications qu'on en va faire aux équations du quatriéme, cinquiéme & ſixiéme degré.

Application de la méthode aux équations du quatriéme degré.

POUR trouver les équations commenſurables du ſecond degré, par leſquelles une équation réductible du quatriéme degré peut ſe diviſer ſans reſte, dans les cas où le ſecond terme manque dans l'une des deux équations du ſecond degré qui en ſont les diviſeurs.

1°. On ſuppoſera la formule du quatriéme degré $x^4 + nx^3 + pxx + qx + r = 0$.

2°. On ſuppoſera les deux équations indéterminées du ſecond degré $xx + fx + g = 0$, $xx + i = 0$, dans leſquelles f, g, i, ſont des indéterminées, & le ſecond terme eſt évanoui dans la ſeconde $xx + i = 0$.

3°. On prendra le produit de ces deux équations du ſecond degré, & l'on aura l'équation indéterminée du quatriéme degré $x^4 + fx^3 + gxx + fix + gi = 0$.
$ + ixx$

On comparera les termes de cette équation (excepté le premier) avec ceux de la formule, qui leur répondent; c'eſt-à-dire, on les ſuppoſera égaux; ce qui donnera ces quatre équations, 1re, $f = n$; 2e, $g + i = p$; 3e, $fi = q$; 4e, $gi = r$.

4°. On regardera ces quatre équations particulieres comme les équations du Problême; les indéterminées f, g, i, ſeront conſiderées comme des inconnues qu'il faut dégager, & il faut réduire ces équations à une ſeule équation qui ait pour inconnue l'indéterminée i de l'équation $xx + i = 0$.

La premiere équation $f = n$, détermine déja la valeur de f; & la ſubſtituant dans la troiſiéme $fi = q$, l'on aura $ni = q$; & diviſant chaque membre par n, l'on aura $i = \frac{q}{n}$.

Cette égalité rendant i déterminée, l'équation indéterminée $xx + i = 0$, devient déterminée, & l'on a $xx + \frac{q}{n}$

$=0$, pour l'une des deux équations du ſecond degré, par leſquelles une équation du quatriéme degré peut ſe diviſer exactement, lorſqu'elle eſt le produit de deux équations du ſecond degré, dans l'une deſquelles le ſecond terme eſt évanoui.

On peut déterminer l'autre équation indéterminée $xx+fx+g=0$, en ſubſtituant la valeur de i, qui eſt $\frac{q}{n}$, dans la ſeconde équation $g+i=p$, ou dans la quatriéme $gi=r$; car la ſeconde donnera, après la ſubſtitution, $g=p-\frac{q}{n}$, & la quatriéme $g=\frac{nr}{q}$; ainſi l'équation indéterminée $xx+fx+g=0$, ſe changera en l'equation déterminée $xx+nx+p-\frac{q}{n}=0$, ou bien en $xx+nx+\frac{nr}{q}=0$.

On peut encore trouver une autre équation pour déterminer la lettre indéterminée i; car en prenant les valeurs de g dans la ſeconde & dans la quatriéme équation particuliere $g+i=p$, & $gi=r$, l'on aura $g=p-i$, $g=\frac{r}{i}$; par conſequent $p-i=\frac{r}{i}$; & multipliant par i, l'on aura l'équation du ſecond degré $ii-pi+r=0$, qui eſt celle qu'on a nommée la réduite; & la réſolvant, on trouvera $i=\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}pp-r}$.

Application des formules qu'on vient de trouver, à une équation particuliere du quatriéme degré.

SOIT l'équation du quatriéme degré $x^4+3ax^3+abxx-aaxx-3a^3x-a^3b=0$. Il s'agit de trouver ſi elle n'eſt point réductible en deux équations du ſecond degré, dans l'une deſquelles le ſecond terme ſoit évanoui.

1°. Afin que la formule du quatriéme degré $x^4+nx^3+pxx+qx+r=0$, repréſente cette équation, il faut ſuppoſer $+n=+3a$; $+p=ab-aa$; $+q=-3a^3$; $+r=-a^3b$.

2°. Il faut mettre dans la formule $xx+\frac{q}{n}=0$, la grandeur repréſentée par $+\frac{q}{n}$, qui eſt $-3a^3$ diviſée par $+3a=-aa$; & l'on aura au lieu de $xx+\frac{q}{n}=0$, l'équation $xx-aa=0$.

3°. Il faut diviſer la propoſée par $xx-aa=0$, & l'on trouve que la diviſion ſe fait ſans reſte, & que le quotient exact eſt $xx+3ax+ab=0$.

Ainſi la propoſée n'eſt pas du quatriéme degré, mais elle ſe réduit aux deux équations du ſecond degré $xx-aa=0$, $xx+3ax+ab=0$.

On trouveroit auſſi l'équation $xx + 3ax + ab = 0$, en mettant dans la formule $xx + nx + p - \frac{q}{n} = 0$, les grandeurs repréſentées par n, p, $\frac{q}{n}$.

Application de la méthode du troiſiéme Problême aux équations du cinquiéme degré.

POUR trouver les équations commenſurables du ſecond & du troiſiéme degré, par leſquelles une équation réductible du cinquiéme degré peut ſe diviſer ſans reſte, ſuppoſé que le ſecond terme manque dans l'équation du ſecond degré.

1°. Après avoir ſuppoſé la formule du cinquiéme degré $x^5 + nx^4 + px^3 + qxx + rx + s = 0$, on ſuppoſera 2°. les deux équations indéterminées $xx + g = 0$, $x^3 + hxx + ix + k = 0$; dans leſquelles g, h, i, k, ſont indéterminées, & le ſecond terme eſt évanoui dans $xx + g = 0$.

3°. On en prendra le produit $x^5 + hx^4 + ix^3 + kxx + gix$
$+ gx^3 + ghxx$
$+ gk = 0$; & comparant les termes de cette équation avec ceux de la formule, on aura les cinq équations particulieres qui ſuivent. 1re, $h = n$; 2e, $i + g = p$; 3e, $k + gh = q$; 4e, $gi = r$; 5e, $gk = s$.

4°. Regardant ces équations comme celles du Problême, on les réduira à une ſeule, qui n'aura pour inconnue que la lettre indéterminée g.

On trouve d'abord que l'indéterminée h eſt égale à n; & prenant dans la ſeconde & la quatriéme la valeur de i, & comparant ces valeurs de i, l'on trouve la réduite qu'on cherche, $i = p - g = \frac{r}{g}$; donc $gg - pg + r = 0$.

Réſolvant cette réduite, on trouve $g = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - r}$; par conſequent $xx + g = 0$, ſe change en $xx + \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - r} = 0$.

On peut trouver une autre réduite en comparant les valeurs de k priſes dans la troiſiéme & la cinquiéme équation; car l'on aura $k = q - ng = \frac{s}{g}$; donc $ngg - qg + s = 0$, ou bien $gg - \frac{q}{n}g + \frac{s}{n} = 0$; & réſolvant cette équation, on trouve $g = \frac{q}{2n} \pm \sqrt{\frac{qq}{4nn} - \frac{s}{n}}$; par conſequent $xx + g = 0$, ſe change en $xx + \frac{q}{2n} \pm \sqrt{\frac{qq}{4nn} - \frac{s}{n}} = 0$.

On peut, si l'on veut, par les substitutions déterminer l'équation $x^3 + hxx + ix + k = 0$; mais cela est assez inutile, car quand on voudra voir si une équation particuliere du cinquiéme degré se peut diviser sans reste par une plus simple du second degré, dans laquelle le second terme soit évanoui, & par une du troisiéme degré, il suffira de substituer dans la formule $xx + \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - r} = 0$, ou dans $xx + \frac{q}{2n} \pm \sqrt{\frac{qq}{4nn} - \frac{s}{n}} = 0$, les grandeurs représentées par n, p, q, r, s, & diviser ensuite l'équation proposée par cette équation du second degré qu'on vient de trouver, car si la proposée se peut diviser sans reste par cette équation du second degré, le quotient sera l'équation du troisiéme degré, dont la proposée est composée, & si elle ne peut se diviser sans reste par cette équation du second degré, la proposée ne sçauroit être réduite en deux équations dont l'une soit du second degré, où le second terme est évanoui, & l'autre du troisiéme degré.

Application de la méthode du troisiéme Problême aux équations du sixiéme degré.

LORSQU'UNE équation du sixiéme degré dont la formule generale est $x^6 + nx^5 + px^4 + qx^3 + rxx + sx + t = 0$, peut être exactement divisée par une équation du second degré dont le second terme est évanoui, & par une du 4e degré, qui a tous ses termes; on supposera 1°. pour les trouver, les deux équations indéterminées $xx + g = 0$, & $x^4 + hx^3 + ixx + kx + l = 0$, & après en avoir trouvé le produit

$$x^6 + hx^5 + ix^4 + kx^3 + lxx + gkx + gl = 0$$
$$\quad\quad + gx^4 + ghx^3 + gixx$$

on comparera les termes de ce produit avec ceux de la formule generale qui leur répondent; ce qui donnera les six équations particulieres suivantes.

1re, $h = n$; 2e, $i + g = p$; 3e, $k + gh = q$; 4e, $l + gi = r$; 5e, $gk = s$; 6e, $gl = t$.

2°. Regardant ces équations comme celles du Problême, on cherchera la réduite, qui n'ait pour inconnue que la lettre indéterminée g.

On la trouvera en comparant les deux valeurs de k prises dans la troisiéme & la cinquiéme; car on aura $k = q - ng = \frac{s}{g}$; d'où l'on déduira $ngg - qg + s = 0$, ou bien $gg - \frac{q}{n}g$

$+ \frac{s}{n} = 0$, qui étant résolue, donnera $g = \frac{q}{2n} \pm \sqrt{\frac{qq}{4nn} - \frac{s}{n}}$; substituant cette valeur de g dans $xx + g = 0$, elle sera changée en $xx + \frac{q}{2n} \pm \sqrt{\frac{qq}{4nn} - \frac{s}{n}} = 0$, qui est la formule dont on a besoin.

Car quand on aura une équation particuliere du sixiéme degré ; pour voir si elle peut être divisée par une du second, où le second terme manque, & par une du quatriéme qui ait tous ses termes, on substituera dans la formule $xx + \frac{q}{2n} \pm \sqrt{\frac{qq}{4nn} - \frac{s}{n}} = 0$, les grandeurs représentées par les lettres n, q, s; & on divisera ensuite la proposée par l'équation qu'on trouvera ; & si la division est exacte, on aura ce qu'on cherche.

Autre application de la méthode du troisiéme Problème aux équations du cinquiéme degré.

QUAND une équation du cinquiéme degré, dont la formule generale est $x^5 + nx^4 + px^3 + qxx + rx + s = 0$, se peut diviser exactement par une équation du second degré qui a tous ses termes, & par une autre du troisiéme degré, dont le second terme est évanoui ; on supposera pour les trouver, 1°. ces deux équations indéterminées $xx + fx + g = 0$, $x^3 + ix + k = 0$; & après avoir trouvé leur produit

$$\begin{aligned} x^5 + fx^4 + ix^3 &+ kxx + fkx + gk = 0 \\ + gx^3 &+ fixx + gix \end{aligned}$$

, on comparera les termes de ce produit avec ceux de la formule generale qui leur répondent, ce qui donnera les cinq équations particulieres suivantes ; 1re, $f = n$; 2e, $i + g = p$; 3e, $k + fi = q$; 4e, $fk + gi = r$; 5e, $gk = s$.

2°. On cherchera par ces équations une reduite qui n'ait pour inconnue que l'indéterminée g, & on la trouvera en prenant la valeur de i dans la 2e ; qui est $i = p - g$; & substituant cette valeur de i dans la 3e, on aura une valeur de $k = q - np + ng$; enfin comparant cette valeur de k avec une autre valeur de k prise dans la 5e, qui est $k = \frac{s}{g}$, l'on aura la réduite $q - np + ng = \frac{s}{g}$, qui se réduit à

$$\begin{aligned} ngg &- npg - s = 0 \\ &+ qg \end{aligned}$$

, ou bien

$$\begin{aligned} gg &- pg - \frac{s}{n} = 0 \\ &+ \frac{q}{n}g \end{aligned}$$

, laquelle étant résolue, l'on aura $g = \frac{1}{2}p - \frac{q}{2n} \pm \sqrt{\overline{\frac{1}{2}p - \frac{q}{2n}}^2 + \frac{s}{n}}$.

Substituant les valeurs de $f = n$ & de g dans $xx + fx + g = 0$;

l'on aura $xx + nx + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2n} \pm \sqrt{\overline{\frac{1}{2}p - \frac{q}{2n}}^2 + \frac{s}{n}} = 0$, qui est la formule dont on a besoin.

On peut encore trouver une seconde réduite qui n'ait d'inconnue que l'indéterminée g, en prenant les valeurs de k dans la troisiéme & la quatriéme équation ; car l'on aura $k = q - ni = \frac{r-gi}{n}$; & mettant dans cette équation la valeur de i prise dans la seconde, qui est $i = p - g$, l'on aura $q - np + ng = \frac{r - pg + gg}{n}$, qui se réduit à $gg - pg + r = 0$:

$$\begin{array}{l} gg - pg + r = 0 \\ - nng + nnp \\ - nq \end{array}$$

Cette équation étant résolue, on aura $g = \frac{1}{2}p + \frac{nn}{2} \pm \sqrt{\overline{\frac{1}{2}p + \frac{nn}{2}}^2 - r - nnp + nq}$.

Substituant les valeurs de f & de g dans $xx + fx + g = 0$, on aura $xx + nx + \frac{1}{2}p + \frac{nn}{2} \pm \sqrt{\overline{\frac{1}{2}p + \frac{nn}{2}}^2 - r - nnp + nq} = 0$, qui est une seconde formule pour la résolution.

Application de ces formules à une équation particuliere du cinquiéme degré.

SOIT une équation du 5ᵉ degré

$$\begin{array}{l} x^5 + ax^4 - aax^3 + aabxx \\ + abx^3 - a^3xx \end{array}$$

$+ a^3bb = 0$; il faut voir si elle ne peut point se réduire à deux équations plus simples, l'une du second degré, & l'autre du troisiéme dont le second terme soit évanoui, qui en soient des diviseurs.

1°. Pour la rapporter à la formule generale, il faut supposer $+n = +a$, $+p = -aa + ab$, $+q = +aab - a^3$, $+r = 0$, $+s = +a^3bb$.

2°. Il faut substituer dans la formule $xx + nx + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2n} \pm \sqrt{\overline{\frac{1}{2}p - \frac{q}{2n}}^2 + \frac{s}{n}} = 0$, les valeurs des lettres n, p, &c. & l'on trouve que $\frac{1}{2}p - \frac{q}{2n} = -\frac{aa+ab}{2} - \frac{ab+aa}{2} = 0$; ainsi le quarré $\overline{\frac{1}{2}p - \frac{q}{2n}}^2 = 0$; mais $\sqrt{+\frac{s}{n}} = \sqrt{+aabb} = ab$, ainsi la formule se change en $xx + ax + ab = 0$.

Divisant la proposée par $xx + ax + ab = 0$, on trouve le quotient exact $x^3 - aax + aab = 0$. Ce qui étoit proposé.

On trouveroit la même équation $xx + ax + ab = 0$, en se servant de la seconde formule $xx + nx + \frac{1}{2}p + \frac{nn}{2} \pm \sqrt{\overline{\frac{1}{2}p + \frac{nn}{2}}^2 - r - nnp + nq} = 0$.

Autre

Autre application de la méthode du troisiéme Problême aux équations du sixiéme degré.

LORSQU'UNE équation du sixiéme degré, représentée par la formule generale $x^6 + nx^5 + px^4 + qx^3 + rxx + sx + t = 0$, est le produit d'une équation du second degré qui a tous ses termes, & d'une autre du quatriéme, dont le second terme est évanoui; pour trouver les formules propres à la réduire à ces deux équations plus simples:

1°. Après avoir supposé ces deux équations indéterminées $xx + fx + g = 0$, $x^4 + ixx + kx + l = 0$, & pris leur produit

$$\begin{array}{l} x^6 + fx^5 + gx^4 + kx^3 + lxx + gkx + gl = 0 \\ \qquad\quad + ix^4 + fix^3 + gixx + flx \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + fkxx \end{array}$$

on comparera les termes de ce produit avec ceux de la formule generale qui leur répondent; & l'on trouvera les six équations particulieres qui suivent: 1re, $f = n$; 2e, $g + i = p$; 3e, $k + fi = q$; 4e, $l + gi + fk = r$; 5e, $gk + fl = s$; 6e, $gl = t$.

2°. Considerant ces six équations comme celles du Problême, on cherchera en dégageant les indéterminées comme si c'étoit des inconnues, une réduite dont l'inconnue soit l'indéterminée g; & l'on trouvera par la 2e, $i = p - g$, par la 3e, $k = q - fi = q - np + ng$, par la 4e, $l = r - gp + gg - nq + nnp - nng$; par la 5e, $l = \frac{s - qg + npg - ngg}{n}$.

Comparant ces deux valeurs de l, on aura la réduite qu'on cherche, qui étant ordonnée, est

$$\begin{array}{llll} 2ngg & - 2npg & + n^3p & = 0; \\ & + qg & - nnq & \\ & - n^3g & + nr & \\ & & - s & \end{array}$$

ou bien divisant le tout par $2n$, $gg - \frac{2pg + \frac{q}{n}g - nng}{2} + \frac{nnp - nq + r - \frac{s}{n}}{2} = 0$.

On peut encore trouver une seconde réduite du second degré dont g soit l'inconnue; 1°. en comparant les valeurs de l prises dans la cinquiéme & sixiéme équation; car l'on aura $l = \frac{s - qg + npg - ngg}{n} = \frac{t}{g}$, qui se réduit à

$$\begin{array}{lll} ngg & - npg & - s \\ & + qg & + \frac{nt}{g} \end{array} = 0;$$

d'où l'on déduira $gg = pg + \frac{s}{n} - \frac{q}{n}g - \frac{t}{g}$. L'on a déja par la

premiere réduite $gg = \frac{2pg - \frac{q}{n}g + nng}{2} - \frac{nnp + nq - r + \frac{s}{n}}{2}$; par conſequent $pg + \frac{s}{n} = \frac{2pg - \frac{q}{n}g + nng - nnp + nq - r + \frac{s}{n}}{2}$;
$$- \frac{q}{n}g - \frac{t}{g}$$
ôtant les fractions, ordonnant cette équation, & faiſant en ſorte que le premier terme n'ait pour coëficient que l'unité, on aura la ſeconde réduite $gg - \frac{nnpg + nqg - rg - \frac{s}{n}g}{nn + \frac{q}{n}}$ $+ \frac{2t}{nn + \frac{q}{n}} = 0$.

Quand on voudra examiner ſi une équation particuliere du ſixiéme degré eſt le produit de deux équations commenſurables plus ſimples, dont l'une eſt du ſecond degré avec tous ſes termes, & l'autre du quatriéme, dont le ſecond terme eſt évanoui, il faudra, après avoir ſubſtitué dans laquelle on voudra des deux réduites précedentes, les grandeurs de l'équation propoſée, repreſentées par les lettres n, p, q, &c. trouver la valeur de l'indéterminée g, & ſubſtituer enſuite cette valeur, & celle de f, dans $xx + fx + g = 0$, & diviſer la propoſée par l'équation réelle dans laquelle $xx + fx + g = 0$ aura été changée; & ſi la diviſion ſe fait exactement, on aura les deux équations plus ſimples du ſecond & du quatriéme degré, auſquelles la propoſée peut être réduite.

Ou bien, ſi l'on veut, on pourra ſubſtituer les grandeurs de la propoſée, repréſentées par n, p, q, &c. dans les deux réduites, & trouver enſuite le plus grand diviſeur commun des deux réduites après la ſubſtitution; ce plus grand diviſeur commun fera trouver facilement la valeur de g; après quoi on la ſubſtituera avec la valeur de f dans $xx + fx + g = 0$, & on diviſera la propoſée par l'équation du ſecond degré qui en naîtra.

Autre application de la méthode du troiſiéme Problème aux équations du ſixiéme degré.

QUAND une équation du ſixiéme degré, repréſentée par la formule generale $x^6 + nx^5 + px^4 + qx^3 + rxx + sx + t = 0$, eſt le produit de deux équations plus ſimples chacune du troiſiéme degré, dans l'une deſquelles le ſecond terme eſt évanoui; pour trouver les formules ou les réduites propres à trouver ces deux équations plus ſimples.

1°. Après avoir ſuppoſé les deux équations indéterminées $x^3 + gx + h = 0$, $x^3 + ixx + kx + l = 0$, & pris leur produit

$$\begin{array}{l} x^6 + ix^5 + gx^4 + hx^3 + hixx + hkx + hl = 0, \\ \qquad\qquad + kx^4 + lx^3 + gkxx + glx \\ \qquad\qquad\qquad\quad + gix^3 \end{array}$$

on comparera les termes de ce produit avec ceux de la formule generale ; ce qui donnera les ſix équations particulieres qui ſuivent: 1re, $i = n$; 2e, $g + k = p$; 3e $h + l + gi = q$; 4e, $hi + gk = r$; 5e, $hk + gl = s$; 6e, $hl = t$.

2°. Pour trouver la réduite dont g ſoit l'inconnue, on aura par la 2e $k = p - g$; par la 3e, $l = q - h - ng$; par la 4e, $k = \frac{r - nh}{g}$; par la 5e, $l = \frac{s - hp + hg}{g}$.

Comparant les deux valeurs de k, l'on aura $p - g = \frac{r - nh}{g}$ d'où l'on déduit $h = \frac{gg - pg + r}{n}$. Il faut remarquer cette valeur de h.

Comparant enſuite les deux valeurs de l, on aura $q - h - ng = \frac{s - hp + hg}{g}$, qui ſe réduit à $-ngg + qg - s = 2hg - hp$; d'où l'on déduit $h = \frac{-ngg + qg - s}{2g - p}$.

Comparant enſemble les deux valeurs de h, on trouvera $\frac{gg - pg + r}{n} = \frac{-ngg + qg - s}{2g - p}$, qui ſe réduit à

$$\begin{array}{l} 2g^3 + nngg - nqg + ns \\ \qquad - 3pgg + 2rg - pr \\ \qquad\qquad + ppg \end{array}$$

$= 0$, qui eſt la réduite qu'on cherche.

Pour trouver une ſeconde réduite dont g ſoit l'inconnue, on comparera enſemble la valeur de $h = \frac{gg - pg + r}{n}$, déja trouvée, avec la valeur de h priſe dans la ſixiéme équation, qui eſt $h = \frac{t}{l}$, après avoir mis dans $h = \frac{t}{l}$ la valeur de $l = q - h - ng = \frac{-gg + pg - r}{n} - ng + q = \frac{-gg + pg - nng - r + nq}{n}$, & l'on aura $\frac{gg - pg + r}{n} = \frac{nt}{-gg + pg - nng - r + nq}$; après en avoir ôté les fractions, on aura

$$\begin{array}{l} g^4 - 2pg^3 - nnpgg + nnrg - nqr = 0. \\ \qquad + nng^3 + ppgg - 2prg + rr \\ \qquad\qquad\quad - nqgg + npqg + nnt \\ \qquad\qquad\quad + 2rgg \end{array}$$

qui eſt une ſeconde réduite, qu'on abaiſſera au ſecond degré en prenant dans la réduite précedente la valeur de g^4 & de g^3, & les ſubſtituant dans cette équation. L'operation ſe fait de la maniere ſuivante.

Il faut multiplier la ſeconde réduite par 2, & l'on aura

$$\begin{array}{l} 2g^4 - 4pg^3 - 2nnpgg + 2nnrg - 2nqr = 0. \\ \qquad + 2nng^3 + 2ppgg - 4prg + 2rr \\ \qquad\qquad\quad - 2nqgg + 2npqg + 2nnt \\ \qquad\qquad\quad + 4rgg \end{array}$$

Il faut multiplier la premiere réduite par g, & l'on aura

$$\begin{array}{llll} 2g^4 = & -nng^3 & +nqgg & -nsg. \\ & +3pg^3 & -2rgg & +prg \\ & & -ppgg & \end{array}$$

& ſubſtituer dans la ſeconde la valeur de $2g^4$, & l'on aura

$$\begin{array}{lllll} -pg^3 & -2nnpgg & +2nnrg & -2nqr & = 0. \\ +nng^3 & +ppgg & -3prg & +2rr & \\ & -nqgg & +2npqg & +2nnt & \\ & +2rgg & -nsg & & \end{array}$$

Il faut ſubſtituer la valeur de g^3, priſe de la premiere réduite, dans cette équation. Pour cela il faut multiplier cette équation par 2, & l'on aura

$$\begin{array}{lllll} -2pg^3 & -4nnpgg & +4nnrg & -4nqr & = 0. \\ +2nng^3 & +2ppgg & -6prg & +4rr & \\ & -2nqgg & +4npqg & +4nnt & \\ & +4rgg & -2nsg & & \end{array}$$

& ſubſtituer la valeur de $-2pg^3 + 2nng^3$, que l'on voit ici, (qui eſt priſe de la premiere réduite multipliée par $-p + nn$) dans l'équation précedente ; & on trouvera enfin cette ſeconde réduite du 2e degré,

$$\left.\begin{array}{l} -2pg^3 \\ +2nng^3 \end{array}\right\} = \begin{array}{lll} +nnpgg & -npqg & +nps \\ -n^4gg & +n^3qg & -n^3s \\ -3ppgg & +2prg & -ppr \\ +3nnpgg & -2nnrg & +nnpr \\ & +p^3g & \\ & -nnppg & \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} -ppgg & -4prg & +4rr & = 0. \\ -n^4gg & +3npqg & +4nnt & \\ +4rgg & +2nnrg & -4nqr & \\ -2nqgg & -2nsg & -ppr & \\ & +p^3g & +nps & \\ & +n^3qg & +nnpr & \\ & -nnppg & -n^3s & \end{array}$$

ou bien en changeant tous les ſignes, on aura cette ſeconde réduite du 2e degré.

$$\begin{array}{llll} +ppgg & +4prg & -4rr & = 0. \\ +n^4gg & -3npqg & -4nnt & \\ -4rgg & -2nnrg & +4nqr & \\ +2nqgg & +2nsg & +ppr & \\ & -p^3q & -nps & \\ & -n^3qg & -nnpr & \\ & +nnppg & +n^3s & \end{array}$$

Quand on voudra voir ſi une équation particuliere du ſixiéme degré eſt le produit de deux plus ſimples commenſurables chacune du troiſiéme degré, dont l'une des deux n'ait pas ſon ſecond terme, 1°. il faudra ſubſtituer les grandeurs de l'équation repréſentées par n, p, q, &c. dans ces deux réduites ; trouver leur plus grand commun diviſeur ; & par le plus grand diviſeur commun, trouver la valeur de g ; ou bien la trouver ſeulement en reſolvant la ſeconde réduite du ſecond degré.

2°. Il faudra ſubſtituer la valeur de g qu'on vient de trouver, dans l'équation $h = \frac{gg - pg + r}{n}$, ce qui donnera la valeur de h.

3°. Il faudra ſubſtituer les valeurs de g & de h dans $x^3 + gx + h = 0$, & diviſer la propoſée par l'équation qui naîtra de la ſubſtitution ; & ſi la diviſion eſt exacte, on aura les deux équations, dont la propoſée eſt le produit.

AVERTISSEMENT.

LES applications qu'on vient de faire de la méthode du troiſiéme Problême ſuffiſent pour la faire concevoir, & pour apprendre à trouver ſoi-même les formules des réſolutions de tous les cas où il manque un ou pluſieurs termes dans les équations ſimples, dont la compoſée eſt le produit ; on les peut voir dans l'onziéme regle de Mr Hudde dans la lettre de la réduction des équations, qui eſt à la fin du premier Volume de la Geometrie de Mr Deſcartes.

Démonſtration du troiſiéme Problême.

LES deux équations indéterminées qu'on ſuppoſe, comme dans le premier exemple $xx + fx + g = 0$, $xx + i = 0$, repréſentent par leurs coëficiens indéterminez f, g, i, les deux équations réelles plus ſimples, dont la propoſée, qui eſt repréſentée par la formule generale $x^4 + nx^3 + pxx + qx + r = 0$, eſt le produit ; par conſequent le produit de ces deux équations indéterminées, qui eſt $x^4 + fx^3 + gxx + fix + gi = 0$ (avec $+ ixx$ sous gxx), repréſente l'équation propoſée, & n'eſt qu'une même équation, que quelques-uns appellent *identique* ; ainſi l'une eſt égale à l'autre, & l'on a l'équation

$$\begin{array}{l} x^4 + fx^3 + gxx + fix + gi = x^4 + nx^3 + pxx + qx + r \\ + ixx \end{array}$$

ou bien

$$\begin{array}{l} x^4 + fx^3 + gxx + fix + gi = 0. \\ + ixx \\ - x^4 - nx^3 - pxx - qx - r \end{array}$$

Les termes de l'une ſont égaux aux termes correſpondans de l'autre, ou (ſi l'on veut) chaque terme de l'une moins le terme correſpondant de l'autre, eſt égal à zero ; l'on a donc autant d'équations particulieres pour déterminer les indéterminées, qui peuvent être regardées comme les inconnues du Problême, qu'on a ſuppoſé d'indeterminées ; ainſi on les peut toutes déterminer.

Or il eſt évident qu'après qu'on aura trouvé les valeurs

réelles des indéterminées, si on substitue ces valeurs à leur place dans les deux équations indéterminées $xx+fx+g=0$, $xx+i=0$, ces deux équations étant devenues réelles, de feintes qu'elles étoient, leur produit sera precisément la proposée : car les valeurs réelles des indéterminées n'ont été trouvées qu'en vertu de cette supposition. Elles sont donc, étant devenues réelles, les deux équations plus simples qu'on cherchoit, par lesquelles la proposée peut être exactement divisée.

La méthode du troisiéme Problême fait donc trouver ce qui étoit proposé.

Remarques sur la méthode qui employe dans les équations outre les inconnues, des grandeurs indéterminées.

65. LA méthode de se servir d'équations qui contiennent des grandeurs indéterminées, est un des principes les plus feconds de l'Analyse pour faire des découvertes, c'est-à-dire, pour résoudre les Problêmes les plus composez. Cette méthode consiste à représenter par des grandeurs indéterminées les grandeurs veritables que l'on cherche ; à supposer que cette expression indéterminée est égale à l'expression de ces mêmes grandeurs que l'on a trouvée par le Problême qu'on veut résoudre, c'est-à-dire, que cette expression indéterminée est égale à l'équation qui exprime ce Problême, & à supposer aussi que chacun des termes de l'expression indéterminée est égal au terme correspondant de l'équation qu'on veut résoudre ; à trouver par le moyen des équations particulieres que fournit cette supposition, les valeurs des indéterminées que l'on a supposées ; enfin à substituer ces valeurs à la place des indéterminées dans l'expression indéterminée qui représente les grandeurs veritables que l'on cherche, qui par ces substitutions devient la veritable expression de ces grandeurs. Comme on se servira beaucoup de cette méthode dans le reste de ce Traité, il est bon de faire ici quelques remarques qui serviront à la faire mieux concevoir, & à en rendre l'usage plus facile.

1°. Pour former ces équations feintes ou indéterminées, qui deviennent ensuite réelles, il faut que les grandeurs indéterminées qu'on y employe, expriment les raports de celles qu'on cherche par leur moyen : par exemple, quand on

veut chercher les équations plus ſimples auſquelles une équation compoſée réductible peut être réduite, lorſqu'il manque quelque terme dans quelqu'une de ces équations plus ſimples, on doit auſſi ſuppoſer qu'il eſt évanoui dans les équations indéterminées; les coëficiens de ces équations indéterminées doivent repréſenter les coëficiens connus des équations réelles qu'elles repréſentent; c'eſt pourquoi il doit y avoir une indéterminée pour chacun, afin qu'en déterminant chaque indéterminée, on puiſſe trouver chacun de ces coëficiens; lorſque quelqu'une des équations plus ſimples auſquelles une équation compoſée peut être réduite, renferme des racines égales, il faut ne mettre qu'une même indéterminée pour chacune des racines égales; & ainſi de tous les autres raports poſſibles qu'il faut repréſenter par les indéterminées.

2°. Il ne faut employer dans les équations indéterminées, qu'autant de lettres indéterminées, qu'on peut faire d'équations particulieres, parcequ'autrement on ne pourroit pas les dégager toutes, c'eſt-à-dire, trouver la valeur de toutes.

3°. On doit faire en ſorte que toutes les équations particulieres qui ſervent à trouver les valeurs des indéterminées, & les réduites qui en naiſſent, ne ſoient pas auſſi difficiles ou plus difficiles à réſoudre, que les équations mêmes dont on cherche la réſolution par ces équations indéterminées, puiſqu'autrement cette voye ſeroit inutile.

Ainſi il faut que ces équations ſoient ou lineaires, ou du ſecond degré, ou du moins d'un degré inferieur à celui de l'équation qu'on veut réſoudre par cette voye: où s'il arrivoit que ces équations particulieres, ou les réduites, fuſſent d'un degré égal à celui de l'équation qu'on veut réſoudre, ou même plus élevé, il faudroit que la valeur de l'indéterminée qui ſert d'inconnue à ces réduites, ſe pût trouver en diviſant la réduite par une équation lineaire de l'inconnue de la réduite plus ou moins un diviſeur de ſon dernier terme, ou qu'elle pût ſe trouver par une équation du ſecond degré: car alors, quoique la réduite fût d'un degré plus élevé que l'équation qu'on veut réſoudre, la réſolution en ſeroit plus facile.

4°. Lorſque pour la réſolution d'un Problême ou d'une équation compoſée, par exemple du cinquiéme degré, on

n'a beſoin que d'une équation d'un degré inferieur, par exemple du ſecond degré ; on ſuppoſera une équation indéterminée ou feinte du ſecond degré, qui repréſentera par le moyen des indéterminées l'équation du ſecond degré dont on a beſoin, & enſuite on la multipliera par une équation indéterminée du degré, qui étant joint avec celui du ſecond, fait le degré de la propoſée ; dans le cinquiéme degré, il faudra multiplier l'équation du ſecond par une du troiſiéme, laquelle équation du troiſiéme degré ait une indéterminée dans chacun de ſes termes, excepté le premier ; il faudra enſuite comparer les termes de l'équation indéterminée qui naîtra de cette multiplication, avec ceux de la propoſée qui leur répondent, & l'on aura autant d'équations particulieres que l'on a ſuppoſé d'indéterminées, & l'on pourra en trouver les valeurs. Ou bien au lieu d'élever l'équation indéterminée du degré inferieur à celui de la propoſée, en la multipliant par une autre équation indéterminée, on pourra diviſer la propoſée par l'équation indéterminée du degré inferieur à celui de la propoſée, juſqu'à ce qu'on ſoit arrivé à un reſte où l'inconnue ſoit d'un degré moindre que dans l'équation indéterminée qui a ſervi de diviſeur : & alors il faudra ſuppoſer ce reſte égal à zero, & chacun de ſes termes égal à zero, & l'on aura par ces ſuppoſitions autant d'équations particulieres qu'on a ſuppoſé d'indéterminées ; & l'on s'en ſervira pour trouver les réduites qui donneront les valeurs des indéterminées de l'équation indéterminée qu'on a ſuppoſée : Et on aura la réſolution qu'on cherche.

Tout ce qu'on vient de dire s'éclaircira par l'uſage qu'on en fera dans la ſuite.

PROBLÊME IV.

66. *TROUVER les équations commenſurables plus ſimples par leſquelles une équation compoſée du 4e, 5e, & 6e degré, qui eſt réductible, peut ſe diviſer exactement, lorſqu'il n'y a aucun terme évanoui dans ces équations plus ſimples, & que la moindre eſt au moins du ſecond degré.*

MÉTHODE.

ON fera les mêmes choſes qu'au Problême précedent, excepté qu'on ne ſuppoſera aucun terme évanoui dans les équations

équations indéterminées, & qu'on laiſſera dans les réduites la lettre indeterminée qui fait le dernier terme de l'une des deux équations indéterminées, ſans en dégager la valeur, & elle marquera un des diviſeurs du dernier terme de la propoſée : cela abregera de beaucoup le calcul des formules, & rendra les réduites plus ſimples, comme on le verra dans l'application de ce Problême au 4e, 5e, & 6e degré.

Pour le quatriéme degré.

TOUTES les équations du quatriéme degré ſont repréſentées par la formule generale $x^4 + nx^3 + pxx + qx + r = 0$.

Pour trouver les deux équations du ſecond degré qui ont tous leurs termes, par leſquelles une équation réductible du quatriéme, peut être exactement diviſée, on ſuppoſera les deux équations indéterminées $xx + fx + g = 0$, $xx + hx + i = 0$; & après en avoir pris le produit

$$\begin{array}{l} x^4 + fx^3 + gxx + ghx + gi = 0; \\ \quad\;\; + hx^3 + ixx + fix \\ \quad\quad\quad\quad\;\; + fhxx \end{array}$$

on en comparera les termes avec ceux de la formule generale qui leur répondent, & l'on aura les quatre équations particulieres ſuivantes: 1re, $f + h = n$; 2e, $g + i + fh = p$; 3e, $gh + fi = q$; 4e, $gi = r$.

On regardera g comme connue, & elle marquera un diviſeur exact du dernier terme de la propoſée, puiſque le dernier terme de la propoſée eſt le produit des deux derniers termes des deux équations du ſecond degré, dont la propoſée eſt le produit. On cherchera une valeur de f qui ne contienne que des connues avec g; pour la trouver, on prendra la valeur de h dans la premiere & la troiſiéme équation, & l'on aura $h = n - f = \frac{q - fi}{g}$; on prendra enſuite la valeur de i dans la quatriéme équation, qui eſt $i = \frac{r}{g}$, & on la ſubſtituera dans l'équation qu'on vient de trouver, & l'on aura $n - f = \frac{q - \frac{fr}{g}}{g}$; d'où l'on déduira $f = \frac{q - gn}{\frac{r}{g} - g}$; on ſubſtituera cette valeur de f dans $xx + fx + g = 0$, & l'on aura $xx + \frac{q - gn}{\frac{r}{g} - g}x + g = 0$.

Quand on voudra examiner ſi une équation particuliere du quatriéme degré, peut ſe diviſer exactement par deux

autres du second degré, on prendra tous les diviseurs du dernier terme de la proposée, & si elle est litterale & homogene, il suffira de prendre les diviseurs de deux dimensions. On substituera ces diviseurs successivement avec le signe de +, & ensuite celui de —, dans la formule $xx + \frac{q - gn}{\frac{r}{g} - g} x + g = 0$, au lieu de g; comme aussi les valeurs de n, q, r; & on divisera la proposée par l'équation qui naîtra de la substitution; & si la division est exacte, on aura ce qu'on cherche.

Par exemple, on voudroit sçavoir si l'équation

$$\begin{matrix} x^4 + 2ax^3 - acxx + 2abbx + aabc = 0, \\ - 2bx^3 - 5abxx - 2aacx \end{matrix}$$

est reductible en deux équations du second degré.

1°. Afin que la formule generale du quatriéme degré $x^4 + nx^3$, &c. représente la proposée, il faut supposer $n = 2a - 2b$, $p = -ac - 5ab$, $q = 2abb - 2aac$, $r = + aabc$.

2°. Il faut prendre parmi les diviseurs du dernier terme de la proposée, ceux qui sont de deux dimensions, c'est-à-dire, aa, ab, ac, bc.

2°. Il faut substituer chacun de ces diviseurs successivement avec le signe +, & ensuite avec le signe —, dans la formule $xx + \frac{q - gn}{\frac{r}{g} - g} x + g = 0$, à la place de g, & y substituer aussi les valeurs de n, q, r: l'on trouvera qu'en y substituant à la place de g, $+ aa$, $- aa$, $+ ab$, l'on n'auroit pas un diviseur exact de la proposée, mais en substituant $- ab$ à la place de g, la formule est changée en $xx + 2ax - ab = 0$, par laquelle la proposée se divise sans reste, & l'on trouve le quotient $xx - 2bx - ac = 0$.

Ainsi la proposée n'est pas du quatriéme degré, mais elle se réduit aux deux équations précedentes du second degré.

On peut encore trouver une réduite dont f soit l'inconnue, & dans laquelle g soit regardée comme une connue qui représente un diviseur du dernier terme de la proposée, en prenant deux valeurs de l'indéterminée i, l'une dans la 2ᵉ & l'autre dans la 4ᵉ équation particuliere; & l'on aura $i = p - g - fh = \frac{r}{g}$; substituant la valeur de $h = n - f$ dans cette équation, l'on aura $p - g - nf + ff = \frac{r}{g}$, ou bien $ff - nf + p = 0$, qui est la réduite qu'on cherche.

$$\begin{matrix} - g \\ - \frac{r}{g} \end{matrix}$$

Résolvant cette équation du second degré, on aura $f = \frac{1}{2}n \pm \sqrt{\frac{1}{4}nn - p + g + \frac{r}{g}}$; substituant cette valeur de f dans $xx + fx + g = 0$, on aura la formule $xx + x \times \overline{\frac{1}{2}n \pm \sqrt{\frac{1}{4}nn - p + g + \frac{r}{g}}} + g = 0$. Cette formule servira à faire trouver les équations du second degré, dans lesquelles se peut réduire une équation particuliere du quatriéme degré, comme dans l'exemple précedent.

Pour le cinquiéme degré.

POUR trouver les deux équations commensurables, l'une du second degré, & l'autre du troisiéme, qui ayent tous leurs termes, par lesquelles une équation reductible du 5e degré représentée par la formule generale $x^5 + nx^4 + px^3 + qxx + rx + s = 0$, peut se diviser exactement; on supposera, 1°. $xx + fx + g = 0$, $x^3 + hxx + ix + k = 0$: Et après avoir pris leur produit

$$\begin{array}{l} x^5 + fx^4 + ix^3 + kxx + fkx \\ + hx^4 + gx^3 + ghxx + gix \\ + fhx^3 + fixx \end{array}$$

$+ gk = 0$, on comparera les termes de ce produit avec ceux de la formule; & l'on aura les cinq équations particulieres qui suivent : 1re, $f + h = n$; 2e, $i + g + fh = p$; 3e, $k + gh + fi = q$; 4e, $fk + gi = r$; 5e, $gk = s$.

2°. On cherchera une réduite du second degré, dont f soit l'inconnue, & on regardera g comme une connue qui représente un diviseur du dernier terme de l'équation du cinquiéme degré qu'on veut résoudre. Pour la trouver, on prendra les valeurs de h dans la premiere & la seconde, & l'on aura $h = n - f = \frac{p-i-g}{f}$; d'où l'on déduira $i = ff - nf + p - g$: On prendra une autre valeur de i dans la quatriéme, & l'on aura $i = \frac{r - fk}{g}$; substituant dans cette valeur de i celle de k prise dans la cinquiéme équation, qui est $k = \frac{s}{g}$, l'on aura $i = \frac{r - \frac{sf}{g}}{g} = ff - nf + p - g$. Cette équation étant mise en ordre, on aura la réduite qu'on cherche,

$$\begin{array}{l} ff - nf + p = 0. \\ + \frac{sf}{gg} - g \\ - \frac{r}{g} \end{array}$$

On peut trouver une autre réduite du second degré, en prenant la valeur de h dans la premiere & la troisiéme

équation, car l'on aura $h = n - f = \frac{q - fi - k}{g}$; ou bien $gn - gf = q - fi - k$; ſubſtituant dans cette équation la valeur de i priſe dans la quatriéme, qui eſt $i = \frac{r - fk}{g}$, l'on aura $gn - gf = q - \frac{fr + ffk}{g} - k$: Enfin ſubſtituant dans cette équation la valeur de k priſe dans la cinquiéme, qui eſt $k = \frac{s}{g}$, on aura $gn - gf = q - \frac{rf}{g} + \frac{sff}{gg} - \frac{s}{g}$, qui ſe réduit à

$$\begin{array}{l} ff - \frac{grf}{s} - \frac{g^3n}{s} = 0, \\ \quad + \frac{g^3f}{s} - g \\ \qquad\quad + \frac{ggq}{s} \end{array}$$

C'eſt la ſeconde réduite qu'on cherchoit.

Quand on voudra voir ſi une équation particuliere du cinquiéme degré eſt reductible en deux plus ſimples, l'une du ſecond & l'autre du troiſiéme degré, on prendra tous les diviſeurs de ſon dernier terme; & ſi elle eſt litterale & homogene, il ſuffira de prendre ceux qui ſont de deux dimenſions; on les ſubſtituera les uns après les autres dans laquelle on voudra de ces deux réduites ſous le ſigne +, & enſuite ſous le ſigne —; on y ſubſtituera auſſi les grandeurs de la propoſée repréſentées par n, p, q, &c. on prendra enſuite la valeur de f, & on la ſubſtituera, comme auſſi le diviſeur pris pour g, dans $xx + fx + g = 0$; & ſi la propoſée ſe diviſe exactement par l'équation qui naîtra de la ſubſtitution, on aura ce qu'on cherche: ſinon, on mettra un autre diviſeur du dernier terme à la place de g dans la réduite, & on continuera l'operation comme on vient de le preſcrire.

On pourroit auſſi ſubſtituer les diviſeurs du dernier terme les uns après les autres avec le ſigne +, & enſuite avec le ſigne —, dans les deux réduites, avec les valeurs de n, p, q, &c. & trouver enſuite le plus grand diviſeur commun des réduites; & par le plus grand diviſeur commun, trouver la valeur de f, & la ſubſtituer avec celle de g, dans $xx + fx + g = 0$, & diviſer enſuite la propoſée par l'équation qui en naîtroit.

Voici un exemple qui fera concevoir les deux manieres d'appliquer la méthode à une équation particuliere.

Pour voir ſi l'équation

$$\begin{array}{llll} x^5 + 2ax^4 & - 3aax^3 & - aabxx & + a^3bx \\ & - 4abx^3 & & + 3aabbx \end{array}$$

$+ a^3bb = 0$, peut être exactement diviſée par une équation

du ſecond degré, & par une du troſiéme degré, qui ayent tous leurs termes : 1°. il faut prendre les diviſeurs du dernier terme qui ſont de deux dimenſions ; ces diviſeurs ſont ab, aa, bb.

2°. Afin que la formule generale $x^5 + nx^4$, &c. repréſente la propoſée, il faut ſuppoſer $n = 2a$, $p = -3aa - 4ab$, $q = -aab$, $r = +a^3b + 3aabb$, $s = +a^3bb$.

3°. Il faut ſubſtituer dans laquelle on voudra des deux réduites, $+ab$ à la place de g, & les valeurs de n, p, q, &c. à leur place ; & comme la valeur de f qu'on trouve après la ſubſtitution de $+ab$ à la place de g, étant ſubſtituée dans $xx + fx + ab = 0$, l'équation qui en vient n'eſt pas un diviſeur exact de la propoſée, il faut ſubſtituer $-ab$ à la place de g, dans laquelle on voudra des réduites, & les valeurs de n, p, q, &c, & l'on trouvera au lieu de la premiere réduite cette équation $ff - af - 2aa = 0$; & au lieu de la ſeconde réduite l'on trouvera $\begin{matrix} ff + af + 2ab = 0. \\ + 2bf \end{matrix}$

4°. Ayant trouvé par le moyen de l'une ou l'autre de ces deux réduites que $f = -a$, on ſubſtituera $-a$ au lieu de f dans $xx + fx + g = 0$, & $-ab$ à la place de g ; & l'on aura $xx - ax - ab = 0$, par laquelle diviſant la propoſée, on trouvera le quotient juſte $x^3 + 3axx - 3abx - aab = 0$; ainſi la propoſée n'eſt pas du cinquiéme degré, mais elle ſe réduit aux deux équations précedentes du ſecond & du troiſiéme degré.

On peut auſſi trouver la valeur de f, en prenant le plus grand diviſeur commun des deux réduites, après qu'on y aura ſubſtitué $-ab$ à la place de g, & les valeurs de n, p, q, &c. car l'on trouvera que le plus grand diviſeur commun eſt $f + a = 0$, par conſequent $f = -a$.

Cette maniere de trouver la valeur de f par le plus grand diviſeur commun des réduites, après qu'on y a fait les ſubſtitutions, eſt d'uſage, lorſque les réduites ſont au-deſſus du ſecond degré ; mais quand les réduites ne paſſent pas le ſecond degré, il eſt d'ordinaire plus court de prendre la valeur de f dans une ſeule réduite.

Pour le sixiéme degré.

LORSQU'IL peut se réduire à une équation du second degré & à une autre du 4e, dans lesquelles aucun terme n'est évanoui.

IL faut supposer les deux équations indéterminées $xx + fx + g = 0$, $x^4 + hx^3 + ixx + kx + l = 0$; & après avoir pris leur produit

$$\begin{aligned} x^6 + hx^5 + ix^4 + kx^3 + lxx + flx + gl = 0; \\ + fx^5 + gx^4 + ghx^3 + gixx + gkx \\ + fhx^4 + fix^3 + fkxx \end{aligned}$$

il faut comparer les termes du produit avec ceux de la formule generale du sixiéme degré $x^6 + nx^5 + px^4 + qx^3 + rxx + sx + t = 0$, qui leur répondent; ce qui donnera les six équations particulieres qui suivent : 1re, $h + f = n$; 2e, $i + g + fh = p$; 3e, $k + gh + fi = q$; 4e, $l + gi + fk = r$; 5e, $fl + gk = s$; 6e, $gl = t$.

Pour trouver une réduite dont f soit l'inconnue, & dans laquelle g représente un diviseur du dernier terme de la proposée, on prendra deux valeurs de h dans la premiere & la seconde équation, & l'on aura $h = n - f = \frac{p - g - i}{f}$; d'où l'on déduira $i = ff - nf + p - g$; comparant cette valeur de i avec une autre prise dans la quatriéme, on aura $i = \frac{r - l - fk}{g} = ff - nf + p - g$; ou bien $r - l - fk = gff - gnf + gp - gg$; mettant dans cette équation la valeur de l prise dans la sixiéme équation, qui est $l = \frac{t}{g}$, l'on aura $r - \frac{t}{g} - fk = gff - gnf + gp - gg$; substituant la valeur de $l = \frac{t}{g}$ dans la cinquiéme, on aura $k = \frac{s - \frac{ft}{g}}{g}$. Cette valeur étant substituée à la place de k dans $r - \frac{t}{g} - fk = gff - gnf + gp - gg$, l'on aura la réduite $r - \frac{t}{g} - \frac{sf + \frac{tff}{g}}{g} = gff - gnf + gp - gg$, qui se réduit à

$$\begin{aligned} ff - \tfrac{tff}{g^3} - nf + p \\ + \tfrac{sf}{gg} - g \\ - \tfrac{r}{g} \\ + \tfrac{t}{gg} \end{aligned}$$

$= 0$; c'est la réduite qu'on cherche.

On peut trouver une seconde réduite en comparant la valeur de i déja trouvée, qui est $i = ff - nf + p - g$, avec une autre valeur de i prise dans la troisiéme équation, & l'on aura $i = \frac{q - k - gh}{f} = ff - nf + p - g$; il faut substituer

dans cette équation la valeur de h priſe dans la premiere équation, qui eſt $h = n - f$, & la valeur de k priſe dans la cinquiéme équation, qui eſt $k = \frac{s - fl}{g}$; & ſubſtituant à la place de l ſa valeur $l = \frac{t}{g}$ priſe dans la ſixiéme équation, on aura $k = \frac{s - \frac{tf}{g}}{g}$; ſubſtituant donc les valeurs de k & de h dans $\frac{q - k - gh}{f} = ff - nf + p - g$, l'on aura

$$\frac{q - \frac{s + \frac{tf}{g}}{g} - gn + gf}{f} = ff - nf + p - g$$

qui ſe réduit à
$$\begin{array}{llll} f^3 - nff & - 2gf & + gn & = 0\,; \\ & + pf & + \frac{s}{g} & \\ & - \frac{tf}{gg} & - q & \end{array}$$
c'eſt la ſeconde réduite qu'on cherchoit.

On ſe ſervira de ces réduites pour trouver ſi une équation du ſixiéme degré ſe peut réduire en deux plus ſimples qui ayent tous leurs termes, dont l'une ſoit du ſecond degré, & l'autre du quatriéme, comme on l'a enſeigné dans le cinquiéme degré.

Pour le ſixiéme degré, lorſqu'il peut ſe reduire à deux équations du troiſiéme degré qui ont tous leurs termes.

IL faut ſuppoſer les deux équations indéterminées $x^3 + fxx + gx + h = 0$, $x^3 + ixx + kx + l = 0$; & après avoir trouvé leur produit
$$\begin{array}{lllllll} x^6 & + fx^5 & + gx^4 & + hx^3 & + hixx & + hkx & + hl \\ & + ix^5 & + kx^4 & + lx^3 & + flxx & + glx & \\ & & + fix^4 & + gix^3 & + gkxx & & \\ & & & + fkx^3 & & & \end{array}$$
$= 0$; on comparera les termes de ce produit avec ceux de la formule generale du ſixiéme degré $x^6 + nx^5 + px^4 + qx^3 + rxx + sx + t = 0$, qui leur répondent; ce qui donnera les ſix équations particulieres qui ſuivent: 1re, $f + i = n$; 2e, $g + k + fi = p$; 3e, $h + l + gi + fk = q$; 4e, $hi + fl + gk = r$; 5e, $hk + gl = s$; 6e, $hl = t$.

Pour trouver une réduite dont f ſoit l'inconnue, & dans laquelle h repréſente un diviſeur du dernier terme de la propoſée, lequel diviſeur eſt de trois dimenſions dans les équations litterales & homogenes; il faut prendre dans la premiere & la ſeconde équation deux valeurs de i, & l'on aura $i = n - f = \frac{p - g - k}{f}$; d'où l'on déduira $k = ff - nf$

$+p-g$; on prendra une autre valeur de k dans la cinquiéme $k=\frac{s-gl}{h}$; par consequent $ff-nf+p-g=\frac{s-gl}{h}$. On substituera dans $\frac{s-gl}{h}$, la valeur de l prise dans la sixiéme équation $l=\frac{t}{h}$; & l'on aura $ff-nf+p-g=\frac{s-\frac{tg}{h}}{h}$; d'où l'on déduira $g=\frac{-hff+hnf-ph+s}{\frac{t}{h}-h}$. Il faut remarquer cette premiere valeur de g.

Pour avoir une seconde valeur de g à comparer avec cette premiere, on se servira de la troisiéme équation, qui donnera $g=\frac{q-h-l-fk}{i}$; substituant dans cette valeur celle de $l=\frac{t}{h}$ prise dans la sixiéme équation, celle de i prise dans la premiere, qui est $i=n-f$, & celle de k prise dans la seconde, qui est $k=p-g-fi=p-g-nf+ff$, l'on aura $g=\frac{q-h-\frac{t}{h}-pf+gf+nff-f^3}{n-f}$; d'où l'on déduira $g=\frac{f^3-nff+pf+\frac{t}{h}+h-q}{2f-n}$, qui est la seconde valeur de g; comparant les deux valeurs de g, on aura $-\frac{kff+hnf-ph+s}{\frac{t}{h}-h}=\frac{f^3-nff+pf+\frac{t}{h}+h-q}{2f-n}$, qui se reduit à

$$f^3-\frac{\frac{t}{h}nff-2hnff}{\frac{t}{h}+h}+\begin{array}{c}\frac{hnnf-2sf}{\frac{t}{h}+h}\\+pf\end{array}-\begin{array}{c}\frac{hnp+ns-\frac{t}{h}q+hq}{\frac{t}{h}+h}\\+\frac{t}{h}-h\end{array}$$

$=0$; c'est la premiere réduite qu'on cherche.

Pour trouver une seconde réduite dont f soit l'inconnue, on prendra deux valeurs de k, l'une dans la seconde équation particuliere, & l'autre dans la quatriéme; & l'on aura $k=p-g-fi=\frac{r-hi-fl}{g}$; substituant dans cette équation la valeur de i prise dans la premiere équation $i=n-f$, celle de l prise dans la sixiéme, qui est $l=\frac{t}{h}$, & la premiere valeur de g, qu'on a fait remarquer ci-dessus, l'équation $-g+p-fi=\frac{r-hi-fl}{g}$, sera changée en celle-ci, $\frac{hff-hnf+hp-s}{\frac{t}{h}-h}+p-nf+ff=\frac{r-hn+hf-\frac{tf}{h}}{\frac{-hff+hnf-hp+s}{\frac{t}{h}-h}}$; d'où ôtant les fractions, & faisant en sorte que le premier terme n'ait que l'unité pour coëficient, l'on trouvera l'équation suivante,

ſuivante, qui eſt la ſeconde réduite qu'on cherchoit,

$$\begin{array}{llll} f^4 - 2nf^3 & - \frac{hsff}{t} & + \frac{hnsf}{t} & - \frac{hps}{t} = 0. \\ & + 2pff & - 2npf & + pp \\ & + nnff & + \frac{nsf}{h} & + \frac{ss}{t} \\ & - \frac{sff}{h} & - \frac{ttf}{h^3} & - \frac{ps}{h} \\ & & + \frac{3tf}{h} & - \frac{nt}{h} \\ & & - 3hf & + \frac{rt}{hh} \\ & & + \frac{h^3f}{t} & + 2hn \\ & & & - 2r \\ & & & - \frac{h^3n}{t} \\ & & & + \frac{hhr}{t} \end{array}$$

On ſe ſervira de ces réduites pour trouver ſi une équation du ſixiéme degré peut ſe réduire en deux du troiſiéme qui ayent tous leurs termes, comme on l'a enſeigné dans le cinquiéme degré : Mais il faut remarquer que quand on aura trouvé une valeur de f, il faudra la ſubſtituer dans l'une des deux valeurs de g, laquelle on voudra, pour déterminer la valeur de g, afin de la ſubſtituer avec celle de f, & avec le diviſeur pris pour h dans $x^3 + fxx + gx + h = 0$; & après ces ſubſtitutions, on diviſera la propoſée par cette équation ainſi changée.

Ceux qui voudront prendre la peine du calcul, pourront abaiſſer cette ſeconde réduite par le moyen de la premiere, au ſecond degré, comme on l'a fait dans le problême précedent, *pag.* 147 & 148.

La démonſtration de ce quatriéme Problême eſt la même que celle du troiſiéme.

COROLLAIRE I.

Il eſt évident que ce quatriéme Problême comprend le précedent; car quand il arrive qu'il y a un terme évanoui dans l'une des deux équations plus ſimples, dans leſquelles une équation du 4ᵉ, 5ᵉ & 6ᵉ degré ſe peut réduire, on trouve alors une valeur de l'indéterminée qui répond à ce terme, priſe dans les réduites de ce quatriéme Problême, égale à zero.

COROLLAIRE II.

Lorsqu'après avoir ſubſtitué ſucceſſivement tous les diviſeurs du dernier terme de la propoſée dans les réduites,

on ne peut trouver aucunes valeurs des indéterminées, qui étant ſubſtituées dans $xx + fx + g = 0$, ou $x^3 + fxx + gx + h = 0$, les rendent des diviſeurs exacts de la propoſée, c'eſt une marque certaine que la propoſée eſt irréductible.

PROBLÊME V.

qui contient les deux précedens.

67. *TROUVER les équations plus ſimples commenſurables, par leſquelles une équation réductible de quelque degré qu'elle puiſſe être, peut ſe diviſer exactement, ſoit que ces équations plus ſimples ayent tous leurs termes, ſoit qu'elles en ayent d'évanouis.*

AVERTISSEMENT.

LA méthode qu'on va expliquer ſuffit ſeule pour réduire toutes les équations compoſées réductibles aux plus ſimples degrez, ou pour s'aſſurer ſi elles ſont irréductibles; mais dans la crainte que l'extrême longueur du calcul ne rebutât le Lecteur, on a cru qu'il étoit neceſſaire de faire préceder les méthodes du troiſiéme & quatriéme Problême, dont le calcul eſt bien moins embarraſſant, & qui cependant ſuffiſent pour réduire les équations. Pour faire concevoir clairement cette méthode, on l'appliquera en l'énonçant aux équations du quatriéme degré: Il faut ſe rendre cette application familiere pour entendre la démonſtration.

MÉTHODE GENERALE.

1°. IL faut d'abord ſuppoſer que $xx + fx + g = 0$, repréſente par ſes indéterminées f, g, l'équation du ſecond degré, par laquelle une équation compoſée ſe peut diviſer exactement.

2°. Il faut diviſer la formule generale du degré de l'équation qu'on voudra réduire, par $xx + fx + g = 0$. & continuer la diviſion juſqu'à ce qu'on ſoit arrivé à un reſte où l'inconnue x ſoit moins élevée d'un degré que dans $xx + fx + g = 0$.

3°. Il faut ſuppoſer chaque terme de ce reſte égal à zero, ce qui donnera autant d'équations qu'on a ſuppoſé d'indéterminées.

Au lieu de faire ce qui eſt marqué dans le ſecond & troiſiéme article, on pourra multiplier $xx + fx + g = 0$, par une autre équation indéterminée, dont le degré joint avec

celui de $xx+fx+g=0$, faſſe celui de l'équation qu'on veut réduire ; par exemple, pour le 4ᵉ degré, il faudra multiplier $xx+fx+g=0$, par $xx+hx+i=0$; pour le 5ᵉ degré, par $x^3+hxx+ix+k=0$; pour le 6ᵉ, par $x^4+hx^3+ixx+kx+l=0$; & ainſi des autres.

Il faudra enſuite comparer les termes du produit avec ceux de la formule generale du degré de l'équation qu'on veut réduire, qui leur répondent, comme dans le troiſiéme & quatriéme Problême ; ce qui donnera autant d'équations particulieres qu'il y a d'indéterminées dans les deux équations indéterminées qu'on a multipliées l'une par l'autre.

Il faudra dégager les indéterminées de l'équation indéterminée $xx+hx+i=0$, ou $x^3+hxx+ix+k=0$, &c. en ſe ſervant des premieres équations particulieres, & en ſubſtituant leurs valeurs dans les deux dernieres, on aura préciſément les deux mêmes équations trouvées par le ſecond & troiſiéme article.

Par exemple, pour réduire une équation du 4ᵉ degré, on prendra la formule generale du 4ᵉ degré $x^4+nx^3+pxx+qx+r=0$, & l'équation indéterminée $xx+fx+g=0$; on diviſera la premiere par la ſeconde, comme on le voit ici :

AVERTISSEMENT. *ɪ marque que la grandeur eſt effacée ; ainſi ɪ x^4 marque que x^4 eſt tranchée par une ligne.*

ɪ x^4	+ ɪ nx^3	+ ɪ pxx	+ qx	+ r	($xx+fx+g$
	− ɪ fx^3	− ɪ gxx	− ngx	− pg	$xx+nx+p$
		− ɪ $nfxx$	+ fgx	+ gg	$-fx-g$
		+ ɪ $ffxx$	− pfx	+ nfg	$-nf$
			+ fgx	− ffg	$+ff$
			+ $nffx$		
			− f^3x		

Et la diviſion ſera continuée juſqu'à ce qu'on ait trouvé le reſte $-f^3x+nffx+fgx-pfx+fgx-ngx+qx-ffg+nfg+gg-pg+r$, dans lequel x eſt d'un degré moins élevée que dans le diviſeur $xx+fx+g$.

On ſuppoſera chaque terme de ce reſte égal à zero, & l'on aura les deux équations $-f^3+nff\begin{array}{l}-pf\\+2gf\end{array}\begin{array}{l}-ng\\+q\end{array}=0$,

$$-gff+ngf+\begin{array}{l}gg\\-pg\\+r\end{array}=0 \text{ ;}$$

ou bien en tranſpoſant, $f^3-nff\begin{array}{l}+pf\\-2gf\end{array}\begin{array}{l}+ng\\-q\end{array}=0$,

$$gff-ngf\begin{array}{l}-gg\\+pg\\-r\end{array}=0.$$

On trouveroit les deux mêmes équations en comparant les termes du produit de $xx+fx+g=0$, par $xx+hx+i=0$, qui est
$$\begin{array}{l} x^4+fx^3+gxx+ghx+gi=0, \\ \qquad +hx^3+ixx+fix \\ \qquad\qquad +fhx \end{array}$$
avec ceux de la formule generale $x^4+nx^3+pxx+qx+r=0$; car en dégageant les indéterminées h & i dans les premieres des quatre équations particulieres que donneront ces comparaisons, qui sont : 1re, $f+h=n$; 2e, $g+i+fh=p$; 3e, $gh+fi=q$; 4e, $gi=r$, l'on trouveroit $h=n-f$, $i=p-g-nf+ff$; & substituant les valeurs de h & de i dans la 3e & la 4e, l'on auroit $f=\frac{q-ng+gf}{p-g-nf+ff}$; d'où l'on déduiroit
$$\begin{array}{l} f^3-nff-2gf+ng=0, \\ \qquad\quad +pf\ -q \end{array}$$
& $g=\frac{r}{p-g-nf+ff}$ d'où l'on déduiroit
$$\begin{array}{l} gff-ngf-gg=0. \\ \qquad\qquad\quad +pg \\ \qquad\qquad\quad -r \end{array}$$

4°. Pour trouver les valeurs de f & de g par le moyen de ces deux équations, on choisira laquelle on voudra des deux indéterminées f, g, pour en faire l'inconnue de la réduite; supposé qu'on se détermine à g, on ordonnera chacune de ces deux équations par raport à l'inconnue f qu'on veut faire disparoître de la réduite, & on regardera g comme connue, jusqu'à ce qu'on ait trouvé la réduite dont g soit l'inconnue.

Pour trouver cette réduite, on cherchera le plus grand diviseur commun des deux équations précedentes; & quand on sera arrivé à un reste où f soit lineaire, on mettra ce reste à part, & le supposant égal à zero, on prendra dans l'équation lineaire faite de ce reste, la valeur de f lineaire, laquelle ne contiendra que des grandeurs connues avec la seule inconnue g. Il faut remarquer cette valeur de f, parceque quand on aura trouvé la valeur de g dans la réduite, en la substituant dans cette valeur de f, on rendra f toute connue.

On continuera de chercher le plus grand diviseur commun avec le reste où f est lineaire, comme si on n'avoit pas mis ce reste à part; & quand l'inconnue f aura disparu, on supposera le reste qui n'aura point d'autre inconnue que g, égal à zero; & ordonnant l'équation qui en naîtra par

raport à l'inconnue g, elle ſera la réduite qu'on cherche.

Dans notre exemple on cherchera le plus grand diviſeur commun de $f^3 - nff - 2gf + ng = 0$, & de $\begin{array}{l} gff - ngf \\ \quad\;\; + pf - q \end{array}$ $- gg = 0$; & quand on ſera arrivé au reſte $\begin{array}{l} - ggf + rf \\ + pg \\ - r \end{array}$ $+ ngg - qg$, où f eſt lineaire, on le ſuppoſera égal à zero, d'où l'on déduira $f = \frac{ngg - qg}{gg - r}$. Il faut remarquer cette équation lineaire, qui fera trouver la valeur de f, quand g ſera connue.

On continuera enſuite la recherche du plus grand diviſeur commun des deux équations précedentes, comme ſi on ne s'étoit pas arrêté à mettre à part la valeur de f, en diviſant $\begin{array}{l} gff - ngf - gg = 0 \\ \quad\;\; + pg \\ \quad\;\; - r \end{array}$, par le reſte $\begin{array}{l} - ggf + ngg = 0 \\ + rf \;\; - qg \end{array}$, juſqu'à ce que l'inconnue f ait diſparu; & l'on ſuppoſera le reſte qui ne contiendra plus f, égal à zero, & après avoir ordonné ce reſte par raport à l'inconnue g, on aura la réduite

$$\begin{array}{llllll} g^6 - pg^5 & + nqg^4 & - qqg^3 & + nqrgg & - prrg & + r^3 = 0. \\ & - rg^4 & - nnrg^3 & - rrgg & & \\ & & + 2prg^3 & & & \end{array}$$

Si l'on vouloit trouver la réduite où f fût l'inconnue, on ordonneroit les deux équations trouvées par le ſecond & troiſiéme article de la méthode, par raport à l'inconnue g, & l'on auroit $\begin{array}{l} gg + nfg + r = 0 \\ \quad\; - pg \\ \quad\; - ffg \end{array}$, & $\begin{array}{l} 2fg - f^3 = 0. \\ - ng + nff \\ \qquad\;\; - pf \\ \qquad\;\; + q \end{array}$

On chercheroit leur plus grand diviſeur commun, & on feroit d'abord l'operation, juſqu'à ce qu'on fût arrivé à un reſte où g fût lineaire. Mais comme g eſt lineaire dans la ſeconde équation, ce reſte eſt tout trouvé ſans operer, & l'on a $g = \frac{f^3 - nff + pf - q}{2f - n}$.

Il faudroit enſuite continuer l'operation pour trouver le plus grand diviſeur commun, juſqu'à ce que g eût diſparu dans le reſte. Il faudroit ſuppoſer ce reſte où g n'eſt plus, égal à zero, & ordonner l'équation par raport à l'inconnue f, & l'on auroit la réduite.

$$\begin{array}{llllll} f^6 - 3nf^5 + 3nnf^4 - 4npf^3 & + ppff & - nnqf & - qq = 0. \\ \quad + 2pf^4 - n^3f^3 & + nqff & - nppf & + npq \\ & + 2nnpff & + 4nrf & - nnr \\ & - 4rff & & \end{array}$$

Si le second terme étoit évanoui dans une équation du quatriéme degré, alors n étant zero, toutes les grandeurs de la réduite précedente où se trouve n, devenant zero, l'on auroit la réduite du 3[e] degré $f^6 + 2pf^4 + ppff - qq = 0.$
$\qquad\qquad - 4rff.$

Pour trouver, par le moyen de ces réduites, si une équation particuliere du quatriéme degré, par exemple $x^4 \begin{array}{l} + 2ax^3 - acxx + 2abbx + aabc = 0, \\ - 2bx^3 - 5abxx - 2aacx \end{array}$ peut se diviser exactement par deux équations commensurables du second degré, il faut supposer, afin que la formule generale représente la proposée, $n = 2a - 2b$, $p = - ac - 5ab$, $q = 2abb - 2aac$, $r = + aabc$; & ensuite substituer dans laquelle on voudra des deux réduites, à la place de n, p, q, &c. les grandeurs qu'elles représentent.

Il faut ensuite trouver tous les diviseurs du dernier terme de la réduite ainsi changée; & si la proposée est litterale & homogene, il faudra prendre les seuls diviseurs de deux dimensions dans la réduite dont g est l'inconnue, & ceux d'une seule dimension dans la réduite dont f est l'inconnue.

Si l'on se sert de la réduite dont g est l'inconnue, comme g représente un diviseur de deux dimensions du dernier terme de la proposée, il n'y a parmi tous les diviseurs du dernier terme de la réduite, qui sont de deux dimensions, que ceux qui sont communs avec ceux du dernier terme de la proposée, qui peuvent servir; ce qui est un abregé lorsqu'on se sert de la réduite dont g est l'inconnue.

Il faut substituer les diviseurs dont on vient de parler successivement avec le signe de + & celui de —, à la place de g, dans la réduite, ou à la place de f, si l'on se sert de la seconde réduite; ou bien diviser successivement la réduite par g ou f plus ou moins chacun de ces diviseurs.

Celui de ces diviseurs dont la substitution rendra toutes les grandeurs de la réduite égales à zero, ou par le moyen duquel la division se fera sans reste, sera la valeur de g ou de f.

Dans notre exemple, après avoir mis dans la réduite dont g eſt l'inconnue, à la place de n, p, &c. les grandeurs de la propoſée qu'elles repréſentent, elle ſe trouve changée en celle-ci.

$$\begin{array}{llllll} g^6 + acg^5 & + 4aabbg^4 & - 4aab^4g^3 & + 4a^4b^3cgg & + a^5bbc^3g & + a^6b^3c^3 = 0. \\ \quad + 5abg^5 & - 4ab^3g^4 & + 6a^3bbcg^3 & - 4a^3b^4cgg & + 5a^5b^3ccg & \\ & - 4a^3cg^4 & - 4a^4ccg^3 & - 4a^5bccgg & & \\ & + 3aabcg^4 & - 4a^4bcg^3 & + 3a^4bbccgg & & \\ & & - 4aab^3cg^3 & & & \\ & & - 2a^3bccg^3 & & & \end{array}$$

Les diviſeurs du dernier terme, qui ſont de deux dimenſions, ſont ab, ac, bc, aa, bb, cc, parmi leſquels il n'y en a de communs avec les diviſeurs du dernier terme de la propoſée, que ab, ac, bc, aa. Ainſi il ne faut ſe ſervir que de ces quatre.

Or on trouve que ſubſtituant $-ab$ à la place de g, dans la réduite, toutes les grandeurs ſe détruiſent par des ſignes contraires; ou bien qu'en faiſant la diviſion de la réduite par $g + ab = 0$, la diviſion ſe fait ſans reſte : Ainſi $g = -ab$.

Il faut après avoir trouvé cette valeur de g, la ſubſtituer avec les valeurs de n, q, r, dans l'équation où f eſt lineaire, qui eſt $f = \frac{ngg - qg}{gg - r}$, & l'on trouve $f = 2a$.

Il faut mettre ces valeurs de f & de g dans l'équation indéterminée $xx + fx + g = 0$, & l'on aura $xx + 2ax - ab = 0$, qui eſt l'équation commenſurable du ſecond degré, par laquelle la propoſée peut être exactement diviſée: ſi l'on fait la diviſion, le quotient $xx - 2bx - ac = 0$, ſera l'autre équation, par laquelle la propoſée ſe peut exactement diviſer.

On trouveroit auſſi la ſeconde équation du ſecond degré, en ſubſtituant les valeurs de n, p, q, r, f, g, dans le quotient indéterminé, qui eſt

$$\begin{array}{ll} xx + nx & + p = 0. \\ \;\;\; - fx & - g \\ & - nf \\ & + ff \end{array}$$

Démonſtration du cinquiéme Problême.

ON ſuppoſe que $x^4 + nx^3 + pxx + qx + r = 0$, repréſente toute l'équation du quatriéme degré, qui ſe peut exactement diviſer par deux autres commenſurables du 2e degré, dont l'une eſt repréſentée par $xx + fx + g = 0$:

Ainsi f & g représentent des grandeurs commensurables. Selon cette supposition, en divisant $x^4 + nx^3$, &c. par $xx + fx + g = 0$, la division doit être exacte, & le quotient est

$$\begin{array}{l} xx + nx + p = 0. \\ \quad -fx - g \\ \qquad\;\; - nf \\ \qquad\;\; + ff \end{array}$$

Puisque la division est supposée se faire sans reste, le reste

$$\begin{array}{ll} +qx & +r \\ -ngx & -pg \\ +2fgx & +gg \\ -pfx & +nfg \\ +nffx & -ffg \\ -f^3x & \end{array}$$

doit donc être égal à zero, & les grandeurs de chaque terme du reste se doivent détruire ; & effectivement elles se détruiroient si l'on mettoit à la place des lettres n, p, q, r, f, g, les grandeurs qu'elles représentent ; car autrement la division ne se feroit pas sans reste, contre la supposition.

Chacun des termes du reste donne donc une équation, dont le 2e membre est zero. Ainsi $\begin{array}{l} -f^3 + nff - pf - ng \\ \qquad\qquad\qquad\quad + 2gf + q \end{array} = 0$, $\begin{array}{l} -gff + ngf + gg = 0. \\ \qquad\qquad\quad - pg \\ \qquad\qquad\quad + r \end{array}$

Si l'on conçoit dans chacune à la place des lettres, les grandeurs qu'elles représentent, toutes les grandeurs se détruiront par des signes contraires. Donc $f +$ ou $-$ la grandeur commensurable qu'elle représente, est une équation lineaire, qui est un diviseur exact de l'une & de l'autre de ces deux équations ; par la nature des équations.

De même $g +$ ou $-$ la grandeur commensurable qu'elle représente, est une équation lineaire, qui est un diviseur exact de ces deux mêmes équations, supposé qu'on les ordonne par raport à l'indéterminée g ; par consequent en recherchant le plus grand diviseur commun de ces deux équations, qui en ont un où f est lineaire, ou bien un où g est lineaire : Quand on sera arrivé à un reste dans lequel f ou bien g seront lineaires, ce sera un diviseur commun des deux équations. Ce reste est $f = \frac{ngg - qg}{gg - r}$, ou bien

$g =$

$g = \frac{f^3 - nff + pf - q}{2f - n}$. Ce reſte eſt donc une équation lineaire, qui contient une racine commenſurable de chacune de ces deux équations.

Si on continue la recherche du plus grand diviſeur commun, juſqu'à ce que f ou g diſparoiſſent, le nouveau reſte qui ne contiendra point f, ou point g, ſera donc égal à zero, puiſque le reſte precedent où f, ou bien où g étoit lineaire, eſt ſuppoſé un diviſeur exact, qui doit laiſſer zero pour reſte de la diviſion: Ce dernier reſte qui eſt la réduite, eſt donc tel, qu'en mettant à la place de l'inconnue f ou g de cette réduite, la grandeur commenſurable qu'elle repréſente, & y mettant auſſi les grandeurs repréſentées par n, p, q, &c. toutes les quantitez ſe détruiront par des ſignes contraires.

Par conſequent, ſelon la nature des équations, après avoir ſubſtitué dans la réduite les grandeurs repréſentées par n, p, q, &c. f + ou — un diviſeur du dernier terme de la réduite, ou bien g + ou — un diviſeur du dernier terme de la réduite, eſt une équation lineaire qui diviſe exactement la réduite, & qui en contient la racine; c'eſt-à-dire, la valeur de f ou de g.

La méthode fait donc trouver, lorſque l'équation propoſée eſt réductible, les valeurs de f & de g, qui étant miſes à leur place dans $xx + fx + g = 0$, changent cette équation indéterminée en une autre déterminée, qui eſt un diviſeur exact de la propoſée. Ce qu'il faloit démontrer.

Remarques ſur la méthode du cinquiéme Problême.

I.

68. Il ſuffit ici d'avoir fait concevoir, & d'avoir démontré la méthode, ceux qui voudront prendre la peine du calcul, pourront ſupputer deux réduites pour le cinquiéme degré, & deux pour le ſixiéme, dont les inconnues ſoient f & g; & de plus trois réduites pour le ſixiéme degré, lorſqu'il peut ſe réduire à deux équations chacune du troiſiéme degré, dont les inconnues ſeront les indéterminées f, g, h, de l'équation indéterminée $x^3 + fxx + gx + h = 0$.

Ils pourront toujours trouver par le moyen de ces réduites, ſi une équation quelconque du 4[e], 5[e] & 6[e] degré eſt réductible; & les équations plus ſimples auſquelles on la

peut réduire, par les ſeules ſubſtitutions des grandeurs de la propoſée, repréſentées par n, p, q, &c.

Pour abreger le calcul qu'il faut faire pour trouver ces réduites, on pourra ſuppoſer le ſecond terme, où eſt n, de chaque formule generale, évanoui; & alors il faudra faire évanouir le ſecond terme d'une équation propoſée, lorſqu'on voudra voir ſi elle eſt réductible.

II.

Lorſqu'on ſe ſert de la réduite dont l'inconnue g ou h eſt le dernier terme de l'équation indéterminée $xx+fx+g=0$, ou bien $x^3+fxx+gx+h=0$, la grandeur repréſentée par g ou h, devant être un diviſeur exact du dernier terme de la propoſée, lorſque cette grandeur eſt commenſurable; on a cet avantage de n'avoir beſoin pour trouver la racine de la réduite, que des diviſeurs du dernier terme de la propoſée, communs avec ceux du dernier terme de la réduite: & de plus ſi l'équation propoſée eſt litterale & homogene, on n'a beſoin que des diviſeurs du dernier terme de la propoſée qui ſont de deux dimenſions, lorſque l'on cherche une équation repréſentée par $xx+fx+g=0$ du ſecond degré; & de ceux qui ſont de trois dimenſions, lorſqu'on cherche une équation du troiſiéme degré repréſentée par $x^3+fxx+gx+h=0$.

Lorſqu'on ſe ſert de la réduite dont l'indéterminée f des équations $xx+fx+g=0$, $x^3+fxx+gx+h=0$ eſt l'inconnue, ou bien l'indéterminée g de l'équation $x^3+fxx+gx+h=0$, on a cet avantage que quand l'équation du ſecond ou du troiſiéme degré, par laquelle la propoſée ſe peut exactement diviſer, a le ſecond terme évanoui, on le trouve tout d'un coup, car après la ſubſtitution des grandeurs repréſentées par n, p, &c. dans la réduite, cette réduite ſe peut abaiſſer d'un degré; c'eſt-à-dire, f ſe trouve avoir une valeur égale à zero.

Il faut entendre la même choſe de la réduite, dont l'inconnue eſt l'indéterminée g de l'équation $x^3+fxx+gx+h=0$.

III.

Lorſqu'en examinant par la méthode qu'on vient d'expliquer, ſi une équation propoſée eſt réductible, on ne trouve aucune valeur commenſurable de l'inconnue de la

réduite, on eſt aſſuré que la propoſée eſt irréductible.

AVERTISSEMENT.

LES méthodes qu'on vient de donner pour trouver ſi une équation eſt réductible, demandent un long calcul, c'eſt pourquoi il ſeroit à ſouhaiter qu'on eût une méthode courte pour trouver quand une équation eſt irréductible. En voici une qui peut ſervir en pluſieurs rencontres.

Méthode pour trouver tout d'un coup, en pluſieurs cas, ſi une équation litterale eſt irréductible.

69. IL faut ſuppoſer chaque lettre differente de l'équation propoſée égale à un nombre, comme à 1, ou à 2, &c. ou bien ſuppoſer toutes les lettres differentes égales, ou ſeulement quelques-unes. On peut auſſi ſuppoſer l'unité ou le même nombre égal à pluſieurs lettres differentes de la propoſée; (on ſuppoſe qu'on n'a point abregé l'équation propoſée en ſuppoſant pluſieurs connues differentes exprimées par une ſeule lettre.)

Il faut enſuite ſubſtituer les nombres ou les lettres qu'on a ſuppoſé égales à celles de l'équation, à leur place dans la propoſée. Si la nouvelle équation qui en réſulte, eſt irréductible, c'eſt une marque certaine que la propoſée eſt irréductible.

Démonſtration. Par la ſuppoſition, l'équation nouvelle qui réſulte des ſubſtitutions, eſt irréductible. Mais ſi la propoſée étoit réductible en deux autres équations plus ſimples, cette équation qui réſulte des ſubſtitutions ſeroit neceſſairement réductible, comme on va le montrer: Ainſi ſi l'équation qui réſulte des ſubſtitutions eſt irréductible, la propoſée l'eſt auſſi. Car ſi la propoſée étoit réductible en deux autres plus ſimples, on pourroit concevoir qu'on ſubſtituât dans ces deux plus ſimples, à la place des lettres differentes qu'elles contiennent, les mêmes nombres ou lettres qu'on leur a ſuppoſées égales dans la propoſée; & on conçoit évidemment que le produit de ces plus ſimples ainſi changées, donneroit l'équation même qui a réſulté des ſubſtitutions. Elle ſeroit donc réductible en ces deux plus ſimples changées par les ſubſtitutions qu'on y a conçues. Elle ne ſeroit donc pas irréductible. Ce qui eſt contre la ſuppoſition.

REMARQUE.

CEPENDANT, quand en ſubſtituant des nombres ou des lettres à la place des lettres differentes d'une équation propoſée, l'équation qui en réſulte eſt réductible, ce n'eſt pas une marque certaine que la propoſée ſoit réductible; car ſi on ſuppoſe dans l'équation irréductible $x^3 - 3axx + 3abx - aab = 0$, que $b = a$, l'équation $x^3 - 3axx + 3aax - a^3 = 0$, qui en réſultera, ſera réductible.

Cela vient de ce que les lettres connues dans une équation litterale, repréſentant toutes les grandeurs poſſibles, on peut ſuppoſer de ces grandeurs à leur place qui ſoient telles, qu'elles donnent une nouvelle équation de même forme que la propoſée qui ait des racines commenſurables; car il y a des équations réductibles poſſibles de la même forme que la propoſée, & la generalité ou l'indétermination, pour ainſi parler, des lettres de la propoſée, eſt cauſe qu'elle repréſente ces équations réductibles de même forme, auſſi bien que les autres qui ne ſont pas réductibles.

COROLLAIRE DU CINQUIÉME PROBLÊME,

Où l'on explique la méthode de trouver tous les diviſeurs du dernier terme d'une équation, lorſque ce dernier terme eſt très-compoſé.

70. LA méthode du Problême précedent peut ſervir à trouver tous les diviſeurs du dernier terme d'une équation litterale, quelque compoſé qu'il puiſſe être, comme on le va voir dans l'exemple ſuivant.

Soit l'équation

$$\begin{array}{llllll} x^5 & + abx^3 & + aadxx & + a^3dx & + a^4d & = 0 \\ & - acx^3 & - abdxx & - aabdx & - a^3bd & \\ & + bbx^3 & + bcdxx & + abcdx & - a^3cd & \\ & & + aabxx & + a^3bx & + aabbd & \\ & & - a^3xx & - aabcx & + 2aabcd & \\ & & + aacxx & + ab^3x & - ab^3d & \\ & & - abbxx & & - abccd & \\ & & & & + b^3cd & \end{array}$$

dont le dernier terme eſt très-compoſé.

Pour trouver tous les diviſeurs de ce dernier terme, 1°. on feindra que c'eſt une équation; & prenant une des lettres qui s'y trouvent, comme a, pour l'inconnue de cette équation feinte, on ordonnera l'équation feinte par raport à l'inconnue a; & l'on aura l'équation feinte,

$$\begin{array}{lllll} da^4 & - bda^3 & + bbdaa & - b^3da & + b^3cd = 0. \\ & - cda^3 & + 2bcdaa & - bccda & \end{array}$$

2°. On verra ſi tous les termes ne ſont point multipliez par une même grandeur ; & comme on trouve qu'ils le ſont par d, on les diviſera par d, qui eſt déja un des diviſeurs ſimples du dernier terme ; il le faut mettre à part, & l'équation feinte ſera

$$\begin{array}{llllll} a^4 - ba^3 & + bbaa & - b^3a & + b^3c = 0. \\ - ca^3 & + 2bcaa & - bcca & \end{array}$$

3°. Il faut chercher par le premier Problême, ſi une équation lineaire de l'inconnue a plus ou moins un diviſeur du dernier terme b^3c, ne ſeroit point un diviſeur exact de cette équation feinte : Si l'on en trouvoit une qui fût un diviſeur exact, on la mettroit à part, comme étant un diviſeur lineaire du dernier terme de la propoſée, & on chercheroit de même ſi le quotient n'auroit point de ſemblables diviſeurs lineaires ; ce qu'on continueroit juſqu'à ce qu'on trouvât un quotient qui n'eût plus de ces diviſeurs lineaires.

Si le premier terme a^4 de l'équation feinte avoit un autre coëficient que l'unité, on ſe ſerviroit du ſecond Problême pour trouver les diviſeurs de l'équation feinte, dans leſquels l'inconnue a fût lineaire. Mais comme l'équation feinte qui ſert d'exemple n'a aucun de ces diviſeurs dans leſquels a ſoit lineaire, il faut trouver les diviſeurs dans leſquels a ſoit du ſecond degré.

4°. Pour les trouver, on y appliquera la méthode du cinquiéme Problême ; c'eſt-à-dire, ſuppoſant que la formule $x^4 + nx^3 + pxx + qx + r = 0$, repréſente cette équation feinte, on ſuppoſera $n = -b - c$, $p = bb + 2bc$, $q = -b^3 - bcc$, $r = b^3c$.

On ſubſtituera ces valeurs à la place de n, p, q, r, dans la réduite

$$\begin{array}{llllll} g^6 - pg^5 & + nqg^4 & - qqg^3 & + nqrgg & - prrg & + r^3 = 0 ; \\ & - rg^4 & - nnrg^3 & - rrgg & & \\ & & + 2prg^3 & & & \end{array}$$

& elle ſera changée en cette autre réduite,

$$\begin{array}{llllll} g^6 - bbg^5 & + b^4g^4 & - b^6g^3 & + b^7cgg & - b^8ccg & + b^9c^3 = 0. \\ - 2bcg^5 & + bbccg^4 & - bbc^4g^3 & + b^5c^3gg & - 2b^7c^3g & \\ & + bc^3g^4 & + b^5cg^3 & + b^4c^4gg & & \\ & & - b^3c^3g^3 & & & \end{array}$$

Il faudra chercher les diviſeurs de deux dimenſions communs au dernier terme b^9c^3 de cette réduite, & au dernier terme b^3c de l'équation feinte : ces diviſeurs ſont bb, bc. Il faudra enſuite ſubſtituer ſucceſſivement $+ bb$, $- bb$, $+ bc$

— bc à la place de g dans la réduite ; & parcequ'on trouve que la ſubſtitution de + bb fait détruire toutes les quantitez de la réduite par des ſignes contraires, bb eſt une valeur de g, c'eſt-à-dire $g = bb$.

Il faut ſubſtituer bb au lieu de g, & les valeurs de n, q, r, à leur place, dans $f = \frac{ng^2 - qg}{gg - r}$; & l'on trouvera $f = -c$. Subſtituant ces valeurs de f & de g dans $xx + fx + g = 0$, qui eſt dans cet exemple $aa + fa + g = 0$, on la changera en $aa - ca + bb = 0$, qui eſt un diviſeur exact de la propoſée ; le quotient eſt $aa - ab + cd = 0$. Ainſi les diviſeurs de deux dimenſions de la propoſée ſont $aa - ac + bb$, $aa - ab + cd$.

Comme il n'y a pas d'autres diviſeurs plus compoſez à chercher dans notre exemple, pour avoir tous les diviſeurs du dernier terme de la propoſée, il n'y a qu'à multiplier ceux qu'on a trouvez les uns par les autres, & on les aura tous.

Ce qui étoit propoſé.

REMARQUE.

SI le dernier terme de l'équation feinte du dernier terme de la propoſée, étoit encore fort compoſé, on feroit de ce dernier terme de l'équation feinte, une ſeconde équation feinte, & on en trouveroit tous les diviſeurs, comme on les a trouvé de la premiere, & ils ſerviroient enſuite à trouver tous les diviſeurs de la premiere équation feinte.

Cette méthode n'a pas beſoin de démonſtration, après celle du cinquiéme Problême.



SECTION IV.

Où l'on explique la maniere de résoudre les équations qui ont toutes leurs racines égales, ou qui en ont seulement quelques-unes d'égales & commensurables, & la maniere d'abaisser à un moindre degré les équations qui ont quelques-unes de leurs racines égales & incommensurables, & de diminuer le nombre de leurs inconnues, lorsqu'elles en ont plusieurs.

PROBLEME VI.

71. *RESOUDRE une équation composée, dont toutes les racines sont égales; c'est-à-dire, trouver toutes les racines égales.*

IL est évident qu'il suffit d'en trouver une seule; pour cela il faut prendre la racine du dernier terme de la proposée, dont l'exposant soit égal à celui du degré de la proposée, & elle sera la racine de la proposée.

Par exemple, l'équation $x^3 - 3axx + 3aax - a^3 = 0$, contient trois racines égales; pour les trouver, il faut tirer la racine troisiéme du dernier terme a^3, & l'on aura a pour la racine de la proposée, c'est à-dire $x = a$.

De même supposé qu'on sçache que l'équation $x^4 - 4x^3\sqrt[4]{2} + 6xx\sqrt[4]{4} - 4x\sqrt[4]{8} + 2 = 0$, a toutes ses racines égales, la racine quatriéme du dernier terme, qui est $\sqrt[4]{2}$, est la racine de la proposée, c'est-à-dire $x = \sqrt[4]{2}$.

La démonstration est évidente, si l'on fait reflexion que le dernier terme de l'équation est le produit de toutes les racines.

PROBLEME VII.

72. *LORSQU'IL y a plusieurs racines égales positives dans une équation composée quelconque, les trouver lorsqu'elles sont commensurables, & abaisser l'équation à un moindre degré, lorsque les racines égales sont incommensurables.*

MÉTHODE GENERALE.

1°. ON supposera que chaque racine égale est représentée par f, ainsi $x = f$, $x - f = 0$; & $xx - 2fx + ff = 0$,

repréſente une équation de deux racines égales ; $x^3 - 3fxx + 3ffx - f^3 = 0$, repréſente une équation de trois racines égales ; $x^4 - 4fx^3 + 6ffxx - 4f^3x + f^4 = 0$, en repréſente une de quatre racines égales, &c.

2°. Il faudra diviſer la formule generale des équations du ſecond degré, du troiſiéme, du quatriéme, &c. par $xx - 2fx + ff = 0$, lorſque l'on cherchera deux racines égales ; il faudra diviſer la formule du troiſiéme, quatriéme degré, &c. par $x^3 - 3fxx + 3ffx - f^3 = 0$, lorſqu'on cherchera trois racines égales ; & ainſi de ſuite. Il faudra continuer la diviſion juſqu'à ce qu'on ſoit arrivé à un reſte, dans lequel x ſoit moins élevée d'un degré que dans le diviſeur.

3°. Il faudra ſuppoſer chacun des termes de ce reſte égal à zero, & y mettre l'inconnue $x = f$ à la place de f.

Ces équations ſeront les formules generales propres à faire trouver les racines égales dans chaque degré, quand elles ſont commenſurables ; ou à abaiſſer l'équation qui aura des racines égales à un moindre degré, quand elles ſont incommenſurables.

Application de la méthode aux équations du 2e, 3e, 4e, 5e & 6e degré, qui ont deux racines égales.

Pour le ſecond degré.

1°. Il faut diviſer $xx + nx + p = 0$, par $xx - 2fx + ff = 0$; & l'on aura le reſte $+ nx + 2fx + p - ff$, où x eſt d'un degré moins élevée que dans le diviſeur.

2°. Il faut ſuppoſer chaque terme de ce reſte égal à zero, & l'on aura $2f + n = 0$, $- ff + p = 0$; il faut ſubſtituer dans ces équations $x = f$, à la place de f, & l'on aura $2x + n = 0$, $- xx + p = 0$; ce qui donne immédiatement la valeur de x dans le ſecond degré : car $x = -\frac{n}{2}$; ou bien encore $xx = p$, d'où l'on déduit $x = \sqrt{p}$.

Pour le troiſiéme degré.

1°. On diviſera $x^3 + nxx + px + q = 0$, par $xx - 2fx + ff = 0$, juſqu'à ce qu'on ſoit arrivé au reſte $+ px + 2nfx + 3ffx$, $+ q - nff - 2f^3$.

2°. On ſuppoſera chaque terme de ce reſte égal à zero, & après avoir mis dans les deux équations qui en naîtront, x à la place de f, l'on aura $3xx + 2nx + p = 0$, & $- 2x^3 - nxx + q = 0$.

Pour le quatriéme degré.

ON trouvera par une semblable operation ces deux formules $+4x^3+3nxx+2px+q=0$, & $-3x^4-2nx^3-pxx+r=0$.

Pour le cinquiéme degré.

ON trouvera $5x^4+4nx^3+3pxx+2qx+r=0$, & $-4x^5-3nx^4-2px^3-qxx+s=0$.

Pour le sixiéme degré.

ON trouvera ces deux formules $6x^5+5nx^4+4px^3+3qxx+2rx+s=0$, & $-5x^6-4nx^5-3px^4-2qx^3-rxx+t=0$.

Application de la méthode aux équations qui ont trois racines égales.

Pour le troisiéme degré.

IL faut diviser $x^3+nxx+px+q=0$, par $x^3-3fxx+3ffx-f^3=0$, & le reste

$$\begin{array}{lll} +nxx & +px & +q=0, \\ +3fxx & -3ffx & +f^3 \end{array}$$

contenant xx, qui est moins élevée d'un degré que x^3 dans le diviseur; on supposera chacun des termes de ce reste égal à zero, & l'on y substituera x à la place de f; ce qui donnera les trois formules suivantes $3x+n=0$, $-3xx+p=0$, $+x^3+q=0$.

Pour le quatriéme degré.

ON trouvera par une semblable operation en divisant x^4+nx^3, &c. par x^3-3fxx, &c. le reste $+6ffxx+3nfxx+pxx-8f^3x-3nffx+qx+3f^4+nf^3+r=0$; on supposera chaque terme égal à zero; & après avoir substitué $x=f$ à la place de f, on aura les trois formules suivantes, $+6xx+3nx+p=0$, $-8x^3-3nxx+q=0$, $+3x^4+nx^3+r=0$.

Pour le cinquiéme degré.

EN divisant x^5+nx^4, &c. par x^3-3fxx, &c. on trouvera le reste

$$\begin{array}{lll} +10f^3xx & -15f^4x & +6f^5 \\ +6nffxx & -8nf^3x & +3nf^4 \\ +3pfxx & -3pffx & +pf^3 \\ +qxx & +rx & +s \end{array}$$

dont on supposera chaque terme égal à zero, & on substituera $x = f$ à la place de f dans les trois équations qui en viendront; ce qui donnera les trois formules suivantes.

$$10x^3 + 6nxx + 3px + q = 0.$$
$$-15x^4 - 8nx^3 - 3pxx + r = 0$$
$$6x^5 + 3nx^4 + px^3 + s = 0$$

Pour le sixiéme degré.

En divisant $x^6 + nx^5$, &c par $x^3 - 3fxx$, &c. on trouvera le reste

$$\begin{array}{lll} +15f^4xx & -24f^5x & +10f^6 \\ +10nf^3xx & -15nf^4x & +6nf^5 \\ +6pffxx & -8pf^3x & +3pf^4 \\ +3qfxx & -3qffx & +qf^3 \\ +rxx & +sx & +t \end{array}$$

on supposera chaque terme de ce reste égal à zero; & après avoir substitué $x = f$, à la place de f, dans les trois équations qui en viendront, on aura les trois formules suivantes,

$$15x^4 + 10nx^3 + 6pxx + 3qx + r = 0.$$
$$-24x^5 - 15nx^4 - 8px^3 - 3qxx + s = 0$$
$$+10x^6 + 6nx^5 + 3px^4 + qx^3 + t = 0$$

AVERTISSEMENT.

On trouvera par de semblables operations, en divisant les formules generales $x^4 + nx^3$, &c. $x^5 + nx^4$, &c. $x^6 + nx^5$, &c. par $x^4 - 4fx^3 + 6ffxx - 4f^3x + f^4 = 0$, les formules pour trouver les quatre racines égales des équations du 4e, 5e, & 6e degré; & ainsi de suite.

On pourroit trouver les mêmes formules, si on élevoit l'équation qui représente les racines égales au degré de la proposée, en la multipliant par une autre équation indéterminée, & comparant ensuite les termes de ce produit avec ceux de la formule generale du même degré.

Remarque sur les formules qui doivent servir à trouver les racines égales d'une équation.

73. Les deux formules qu'on a trouvées dans chaque degré pour découvrir les racines égales, lorsqu'il y en a deux dans une équation, ne sont chacune que l'équation même dont les termes sont multipliez de suite par les termes d'une progression arithmetique, qui va en diminuant, le premier terme

de l'équation par le premier de la progreſſion, le ſecond par le ſecond, & ainſi de ſuite.

Le premier terme de la progreſſion arithmetique, qui fait trouver la premiere formule dans chaque degré, eſt toujours égal à l'expoſant de la puiſſance de l'inconnue dans le premier terme; dans le ſecond degré, où l'expoſant de la puiſſance xx dans le premier terme eſt 2, le premier terme de la progreſſion arithmetique eſt 2; dans le 3e degré, c'eſt 3; dans le 4e, c'eſt 4; & ainſi de ſuite: d'où l'on voit que chaque terme de la progreſſion arithmetique, qui fait trouver la premiere formule, eſt égal à l'expoſant de la puiſſance de l'inconnue x, dans le terme de l'équation qu'il doit multiplier, & que zero ſe trouve ſous le dernier terme. Ainſi dans le ſecond degré, la progreſſion arithmetique pour trouver la premiere formule, eſt 2, 1, 0; dans le 3e degré, 3, 2, 1, 0; dans le 4e degré, 4, 3, 2, 1, 0; & ainſi de ſuite.

La progreſſion arithmetique qui fait trouver la ſeconde formule, eſt dans le ſecond degré $-1, 0, +1$; dans le 3e degré, $-2, -1, 0, +1$; dans le 4e, $-3, -2, -1, 0, +1$; dans le 5e, $-4, -3, -2, -1, 0, +1$; dans le 6e, $-5, -4, -3, -2, -1, 0, +1$.

Les trois formules qu'on a trouvées pour découvrir les racines égales des équations, lorſqu'il y en a trois, ſont auſſi les termes de l'équation même de chaque degré, multipliez de ſuite par les termes du produit de deux progreſſions arithmetiques. Pour la premiere formule du 3e degré, les deux progreſſions ſont

deux progreſſions ſont	3, 2, 1, 0.
	2, 1, 0, — 1.
Leur produit eſt	6, 2, 0, 0.

Diviſant chaque terme par 2, l'on a 3, 1, 0, 0.

Pour la ſeconde formule du 3e degré, les deux progreſſions

arithmetiques ſont	3, 2, 1, 0.
	— 1, 0, + 1, + 2.
Leur produit eſt	— 3, 0, + 1, 0.

Pour la troiſiéme formule du 3e degré, les deux progreſſions

arithmetiques ſont	2, 1, 0, — 1.
	1, 0, — 1, — 2.
Leur produit eſt	2, 0, 0, + 2.

Diviſant chaque terme par 2, l'on a 1, 0, 0, 1.

Pour la premiere formule du 4e degré, les deux progressions arithmetiques sont 4, 3, 2, 1, 0.
3, 2, 1, 0, — 1.

Leur produit est 12, 6, 2, 0, 0,
Divisant chaque terme par 2, l'on a 6, 3, 1, 0, 0.

Pour la seconde formule du 4e degré, les deux progressions sont 4, 3, 2, 1, 0.
— 2, — 1, 0, + 1, + 2.

Leur produit est — 8, — 3, 0, + 1, 0.

Pour la troisiéme formule du 4e degré, les deux progressions sont 3, 2, 1, 0, — 1.
2, 1, 0, — 1, — 2.

Leur produit est 6, 2, 0, 0, + 2.
Divisant chaque terme par 2, l'on a 3, 1, 0, 0, 1.

Pour la premiere formule du 5e degré, les deux progressions sont 5, 4, 3, 2, 1 0.
4, 3, 2, 1, 0, — 1.

Leur produit est 20, 12, 6, 2, 0, 0.
Divisant chaque terme par 2, l'on a 10, 6, 3, 1, 0, 0.

Pour la seconde formule du 5e degré, les deux progressions sont 5, 4, 3, 2, 1, 0.
— 3, — 2, — 1, 0, + 1, + 2.

Leur produit est — 15, — 8, — 3, 0, + 1, 0.

Pour la troisiéme formule du 5e degré, les deux progressions sont 4, 3, 2, 1, 0, — 1.
3, 2, 1, 0, — 1, — 2.

Leur produit est 12, 6, 2, 0, 0, + 2.
Divisant chaque terme par 2, l'on a 6, 3, 1, 0, 0, 1.

Pour la premiere formule du 6e degré, les deux progressions sont 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0.
5, 4, 3, 2, 1, 0, — 1.

Leur produit est 30, 20, 12, 6, 2, 0, 0.
Divisant chaque terme par 2, l'on a 15, 10, 6, 3, 1, 0, 0.

Pour la seconde formule du 6e degré, les deux progressions sont 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0.
— 4, — 3, — 2, — 1, 0, + 1, + 2.

Leur produit est — 24, — 15, — 8, — 3, 0, + 1, 0.

Pour la troisiéme formule du 6e degré, les deux progressions sont

	5, 4, 3, 2, 1, 0, — 1.
	4, 3, 2, 1, 0, — 1, — 2.
Leur produit est	20, 12, 6, 2, 0, 0, + 2.

Divisant chaque terme par 2, l'on a 10, 6, 3, 1, 0, 0, 1.

S'il y avoit quatre racines égales, on trouveroit quatre formules pour les découvrir dans chaque degré, dont chacune seroit le produit des termes de l'équation proposée, par les termes du produit de trois progressions arithmetiques.

S'il y avoit cinq racines égales, on trouveroit cinq formules pour les découvrir dans chaque degré; chacune de ces formules seroit le produit des termes de l'équation, par les termes du produit de quatre progressions arithmetiques; & ainsi de suite. Il est facile de les trouver par la méthode.

Application de la méthode à des exemples, c'est-à-dire, aux équations particulieres qui ont plusieurs racines égales.

EXEMPLE I.

L'EQUATION $x^3 + 3xx - 9x + 5 = 0$, a deux racines égales; pour les trouver, il n'y a qu'à substituer dans les deux formules du troisiéme degré, $3xx + 2nx + p = 0$, $-2x^3 - nxx + q = 0$, les valeurs de n, p, q; ou bien, ce qui est plus court, il n'y a qu'à multiplier les termes de la proposée, par les termes de la progression arithmetique, 3, 2, 1, 0; ou bien, ce qui est la même chose, multiplier chaque terme de la proposée par le nombre qui est l'exposant du degré où l'inconnue x est élevée dans ce terme, & le dernier terme où x n'est point par zero; & l'on aura $3x^3 + 6xx - 9x = 0$, qui se réduit à $3xx + 6x - 9 = 0$, qui peut encore être divisée par 3, & l'on aura $xx + 2x - 3 = 0$.

Il faut ensuite multiplier les termes de la proposée par les termes de la progression arithmetique $-2, -1, 0, +1$; & l'on aura $-2x^3 - 3xx + 5 = 0$.

Pour trouver ensuite la racine égale de la proposée, il n'y a qu'à chercher le plus grand diviseur commun de deux de ces trois équations; sçavoir la proposée $x^3 + 3xx - 9x + 5 = 0$, & les deux autres qu'on vient de former; $xx + 2x - 3 = 0$, $-2x^3 - 3xx + 5 = 0$; l'on trouvera que $-x$

$+1=0$; ou bien $x-1=0$, eſt ce plus grand diviſeur commun; ainſi $x=1$, & 1 eſt la racine égale qu'on cherche.

EXEMPLE II.

POUR trouver les racines égales de $x^4-4x+3=0$, qui en contient deux, on multipliera chaque terme par l'expoſant de x, & le dernier terme par zero; & l'on aura $4x^4-4x=0$, qui ſe réduit à $4x^3-4=0$; diviſant par 4, l'on aura $x^3-1=0$; d'où l'on déduit $x=1$: ainſi il eſt inutile de multiplier la propoſée par l'autre progeſſion arithmetique $-3, -2, -1, 0, +1$, puiſque la racine qu'on cherche eſt $x=1$; & l'on trouvera que $x-1=0$, eſt un diviſeur commun de la propoſée, & de $x^3-1=0$.

EXEMPLE III.

POUR trouver chacune des trois racines égales que contient l'équation $x^4-6xx+8x-3=0$, on la multipliera par les termes du produit des deux progreſſions.

$$\begin{array}{lllll} 4, & 3, & 2, & 1, & 0. \\ 3, & 2, & 1, & 0, & -1. \\ \hline \end{array}$$

qui eſt . . . $12, 6, 2, 0, 0,$

ou plutôt par la moitié de chaque terme de ce produit, qui étant diviſé par 2, ſe réduit à 6, 3, 1, 0, 0; & l'on aura $6x^4-6xx=0$, qui ſe réduit à $xx-1=0$, d'où l'on déduit $x=1$; ainſi 1 eſt la racine égale qu'on cherche.

Si l'on n'avoit pas trouvé d'abord la racine égale qu'on cherche, on auroit multiplié la propoſée par les termes du produit des deux progreſſions

$$\begin{array}{lllll} 4, & 3, & 2, & 1, & 0. \\ -2, & -1, & -0, & +1, & +2. \\ \hline -8, & -3, & 0, & +1, & 0. \end{array}$$

& enſuite par les termes du produit des deux autres progreſſions

$$\begin{array}{lllll} 3, & 2, & 1, & 0, & -1. \\ 2, & 1, & 0, & -1, & -2. \\ \hline \end{array}$$

qui eſt . . . $6, 2, 0, 0, +2.$

ou plutôt par les termes de la moitié de ce produit, qui ſont 3, 1, 0, 0, 1.

Il auroit enſuite falu chercher le plus grand diviſeur com-

mun de la proposée, & de quelqu'une des trois équations formées par le produit des progressions arithmetiques; ou ce qui est quelquefois plus facile, il auroit falu trouver le plus grand diviseur commun de deux de ces trois équations, & il auroit falu connoître la racine qu'on cherche.

Démonstration du septiéme Problême.

POUR rendre cette démonstration plus claire, on l'appliquera à un exemple du troisiéme degré. On suppose que $x^3 + nxx + px + q = 0$, représente une équation qui a deux racines égales positives commensurables, & que $xx - 2fx + ff = 0$, représente l'équation composée de ces deux racines égales; ainsi f représente chacune de ces racines égales, & $x = f$, ou bien $x - f = 0$.

1°. Il est évident que quand la proposée contient deux racines égales commensurables, $xx - 2fx + ff = 0$, divise la proposée sans reste; par consequent le reste

$$\begin{matrix} 3ffx - 2f^3 \\ + 2nfx - nff \\ + px \quad + q \end{matrix}$$

est égal à zero; & de plus, chaque terme de ce reste est égal à zero, autrement la division ne se feroit pas sans reste, contre la supposition.

2°. Il est donc clair que si l'on conçoit la grandeur commensurable que représente f, mise à la place de f, dans les deux équations du reste $3ff + 2nf + p = 0$, $- 2f^3 - nff + q = 0$; ou, ce qui est la même chose, $3xx + 2nx + p = 0$, $- 2x^3 - nxx + q = 0$; toutes les quantitez de chacune de ces équations se détruiront par des signes contraires: Donc x moins cette grandeur, est une équation lineaire qui divise exactement l'une & l'autre. Par la supposition, cette équation lineaire divise aussi la proposée; par consequent la proposée & ces deux équations ont un diviseur commun, qui est une équation lineaire faite de x, moins la grandeur représentée par $f = 0$: Il est donc évident qu'en cherchant le diviseur commun de la proposée & de ces deux équations, on aura la racine qu'on cherche. Ainsi la méthode fait trouver necessairement la racine égale commensurable qu'on cherche. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Ce même raisonnement peut s'appliquer à tous les degrez, & à toutes les racines égales que peut contenir chaque degré.

COROLLAIRE.

IL ſuit de là que quand on ne trouve point de diviſeur commun, la racine égale eſt incommenſurable.

Démonſtration du cas où les racines égales ſont incommenſurables.

SUPPOSÉ que $x^4 + nx^3 + pxx + qx + r = 0$, repréſente une équation qui a deux racines égales incommenſurables, & que f repréſente chacune de ces racines égales ; l'on aura $x - f = 0$; & $xx - 2fx + ff = 0$, repréſentera l'équation compoſée de ces deux racines égales ; $x^3 - 3fxx + 3ffx - f^3 = 0$, en repréſentera une compoſée de trois racines égales ; &c. Il eſt évident que ſi la grandeur incommenſurable, repréſentée par f, étoit miſe à ſa place dans $xx - 2fx + ff = 0$, la propoſée ſeroit diviſée ſans reſte par cette équation ainſi changée ; par conſequent le reſte $4f^3x + 3nffx + 2pfx + qx - 3f^4 - 2nf^3 - pff + r$, ſeroit égal à zero, & chaque terme égal à zero, puiſqu'autrement la diviſion ne ſeroit pas ſans reſte. Si donc l'on conçoit que la grandeur incommenſurable repréſentée par f, eſt ſubſtituée dans $4f^3 + 3nff + 2pf + q = 0$, & $-3f^4 - 2nf^3 - pff + r = 0$; ou, ce qui revient au même, dans $4x^3 + 3nxx + 2px + q = 0$, $-3x^4 - 2nx^3 - pxx + r = 0$, il eſt certain que les quantitez de chacune de ces deux équations ſe detruiront par des ſignes oppoſez : Les deux équations repréſentées par $4x^3 + 3nxx + 2px + q = 0$, & $-3x^4 - 2nx^3 - pxx + r = 0$, ont donc une racine commune, quoiqu'elle ſoit incommenſurable, laquelle eſt auſſi une racine de la propoſée.

La méthode du ſeptiéme Problême fait donc trouver, quand une équation a des racines égales incommenſurables, une équation abaiſſée à un moindre degré, qui a neanmoins pour une de ſes racines, une des racines égales de la propoſée. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

QUAND il y a deux racines égales dans une équation, on la peut abaiſſer à une équation d'un degré moindre que la propoſée ; quand il y en a trois, on la peut abaiſſer à une équation moindre de deux degrez que la propoſée ; & ainſi de ſuite.

AVERTISSEMENT.

QUAND les racines égales étant commensurables, on abaisse l'équation qui les contient, en la divisant par l'équation composée des racines égales, il est évident que l'équation abaissée contient les autres racines de la proposée : Mais quand elles sont incommensurables, l'équation abaissée a encore la racine égale qui lui est commune avec la proposée ; mais il ne s'ensuit pas qu'elle contienne les autres racines de la proposée.

Autre démonstration de l'usage des progressions arithmetiques, pour découvrir les racines égales des équations composées.

THEORÊME.

74. *LORSQU'UNE équation n'a que des racines égales positives, si on multiplie de suite ses termes par ceux d'une progression arithmetique quelconque, le produit sera une équation qui aura encore toutes les racines égales de la premiere, excepté une seule.*

Ainsi lorsqu'une équation est composée de deux racines égales positives, le produit aura encore une de ces racines ; si elle est composée de 3, le produit en aura 2 ; si elle l'est de 4, le produit en aura 3 ; & ainsi de suite.

D'où il suit que quand l'équation est composée de trois racines égales, si on multiplie de suite ses termes par ceux de deux progressions arithmetiques quelconques ; ou, ce qui est la même chose, par les termes du produit de deux progressions arithmetiques quelconques, l'équation qui en viendra aura encore une des racines égales de la premiere.

Si elle est composée de quatre racines égales, & qu'on multiplie de suite ses termes par trois progressions arithmetiques quelconques, ou par les termes de leur produit, l'équation qui en viendra aura encore une des racines égales de la premiere ; & ainsi de suite.

DÉMONSTRATION.

POUR le démontrer, il n'y a qu'à prendre les équations $xx - 2fx + ff = 0$, $x^3 - 3fxx + 3ffx - f^3 = 0$, &c. qui représentent toutes les équations composées de deux, de trois racines égales, &c. & multiplier les termes de suite de

ces équations par ceux de la progreſſion arithmetique a, $a+b$, $a+2b$, $a+3b$, &c. qui repréſente en general toutes les progreſſions arithmetiques ; & diviſer par $x-f=0$, l'équation qui viendra du produit de la premiere $xx-2fx+ff=0$; diviſer par $xx-2fx+ff=0$, celle qui viendra du produit de la ſeconde x^3-3fxx, &c. & ainſi de ſuite ; & l'on trouvera que la diviſion ſe fera exactement.

Par exemple, ſi on multiplie $x^3-3fxx+3ffx-f^3=0$,

par . . . . . $a,\ a+b,\ a+2b,\ a+3b$

on aura le produit . . . . $ax^3-3afxx+3affx-af^3=0$;
$-3bfxx+6bffx-3bf^3$

diviſant ce produit par $xx-2fx+ff=0$, on trouvera que la diviſion ſe fait exactement, & que le quotient exact eſt $ax-af-3bf$.

De plus, le produit eſt toujours une équation ; car en ſubſtituant f à la place de x dans le produit, tous les termes ſe détruiſent par des ſignes oppoſez.

Si on multiplioit les termes du produit par la même progreſſion arithmetique generale, ou par quatre des termes de cette progreſſion pris de ſuite, le produit qu'on trouveroit, (qui feroit le même qu'on auroit trouvé en multipliant d'abord l'équation x^3-3fxx, &c. par les termes du produit des deux progreſſions, terme par terme) ſe pourroit diviſer exactement par $x-f=0$.

Et comme les formules des équations des racines égales ſont generales, & que l'expreſſion de la progreſſion arithmetique eſt auſſi generale, il eſt évident que la démonſtration eſt generale.

COROLLAIRE I.

SI tous les termes d'une équation $xx-2fx+ff=0$, $x^3-3fxx+3ffx-f^3=0$, &c. qui n'a que des racines égales, ſont multipliez par une même grandeur quelconque c, & qu'on multiplie les termes du produit $cxx-2cfx+cff=0$, par les termes d'une progreſſion arithmetique, il eſt évident que le produit qui en viendra, ſe pourra diviſer exactement par le même diviſeur $x-f=0$.

THEORÊME.

UNE équation qui contient des racines égales, & des racines inégales, peut être conçue comme étant le produit de

l'équation composée des seules racines égales, par l'équation composée des seules racines inégales. Par exemple, une équation du cinquiéme degré qui contiendra deux racines égales, & trois inégales, peut être conçu comme le produit de $xx - 2fx + ff = 0$, par $x^3 + nxx + px + q = 0$.

Ce produit peut être conçu distingué en quatre parties, comme on le voit ici:

$xx - 2fx + ff \times x^3$	$=$	$x^5 - 2fx^4 + ffx^3$					Premiere Partie.
$xx - 2fx + ff \times nxx$	$=$		$+ nx^4 - 2nfx^3 + nffxx$				Seconde Partie.
$xx - 2fx + ff \times px$	$=$			$+ px^3 - 2pfxx + pffx$			Troisiéme.
$xx - 2fx + ff \times q$	$=$				$+ qxx - 2qfx + qff$		Quatr.
		a,	$a + b$,	$a + 2b$,	$a + 3b$,	$a + 4b$,	$a + 5b$

Si on multiplie les termes de suite de l'équation du cinquiéme degré, qui est le produit des deux autres, par la progression arithmetique generale a, $a + b$, &c. il est évident que les trois termes de la premiere partie seront multipliez par les trois termes a, $a + b$, $a + 2b$; les trois termes de la seconde partie, par $a + b$, $a + 2b$, $a + 3b$; les trois termes de la troisiéme, par $a + 2b$, $a + 3b$, $a + 4b$; les trois termes de la quatriéme, par $a + 3b$, $a + 4b$, $a + 5b$.

Il est évident, par le premier Corollaire, qu'après ces multiplications, le produit de chaque partie pourra se diviser exactement par $x - f = 0$; par consequent l'équation entiere se pourra diviser exactement par $x - f = 0$.

COROLLAIRE II.

Ce qu'on vient de démontrer, fait voir clairement que quand une équation a des racines égales, & des racines inégales, si on en multiplie les termes de suite par ceux d'une progression arithmetique quelconque, l'équation qui viendra du produit aura encore toutes les racines égales de la premiere, excepté une.

On prouvera de même que si une équation a trois racines égales, avec des racines inégales, & qu'on en multiplie les termes par ceux de deux progressions arithmetiques quelconques, ou par les termes de leur produit, l'équation qui en viendra aura encore une des racines égales de la premiere; & ainsi des autres cas.

Usage des progressions arithmetiques, pour résoudre les équations qui ont des racines égales, ou pour les abaisser à un moindre degré.

75. QUAND par la nature du Problême on connoîtra qu'une équation composée a des racines égales, si elle en a deux, il faut multiplier ses termes par ceux d'une progression arithmetique arbitraire: On pourra encore les multiplier par les termes d'une autre progression; les équations qui viendront de ces multiplications auront une racine commune entr'elles & avec la proposée; ainsi il faudra chercher leur commun diviseur, qu'on trouvera toujours si la racine est commensurable: & si elle est incommensurable, il y aura quelque équation parmi celles qu'on a trouvées, qui sera d'un moindre degré, & qui aura encore parmi ses racines, la racine égale de la proposée.

S'il y avoit dans la proposée trois racines égales, on trouveroit des équations en multipliant les termes de la proposée par ceux de deux progressions arithmetiques arbitraires, qui auroient encore une des racines égales de la proposée.

S'il y avoit quatre racines égales, il faudroit se servir de trois progressions arithmetiques arbitraires; & ainsi de suite.

Il faut chosir parmi les progressions arithmetiques, celles qui donneront une équation plus facile à résoudre.

On remarquera que quand il y a des termes évanouis dans l'équation qui a des racines égales, comme dans l'équation $x^4 + 0x^3 + 0xx - 4x + 3 = 0$, il faut remplir par des zeros les termes évanouis, afin qu'en se servant de la grogression arithmetique, on y puisse distinguer les termes qui doivent multiplier ceux de la proposée qui leur répondent.

Application de la méthode précedente à des exemples de Geometrie; c'est à-dire, à des équations qu'on trouve en résolvant des Problêmes de Geometrie, dont la résolution donne la résolution de ces Problêmes.

AVERTISSEMENT.

IL y a plusieurs Problêmes de Geometrie qu'on résout par cette méthode des racines égales; car la résolution de plusieurs Problêmes dépend souvent de ce qu'en supposant qu'une des inconnues de l'équation du Problême a deux ou plusieurs

valeurs égales, ou que deux inconnues ont deux ou plusieurs valeurs égales, il arrive qu'en multipliant les termes de l'équation par ceux d'une ou de plusieurs progressions arithmetiques, on peut par le moyen des équations nouvelles qui en viennent, déterminer la valeur de celle des inconnues qui donne la résolution du Problême, ou faire évanouir une ou plusieurs des inconnues de l'équation du Problême; ce qui donne une nouvelle équation qui résout le Problême.

EXEMPLE I.

ON a l'équation $x^3 - ayx + y^3 = 0$, qui exprime un Problême de Geometrie; on demande la valeur de x, lorsque x a deux valeurs égales dans cette équation.

Il faut multiplier les termes de l'équation par ceux de la progression 3, 2, 1, 0, ou chaque terme de l'équation par l'exposant de la puissance de x dans ce terme.

$$\begin{array}{l} x^3 + 0xx - ayx + y^3 = 0. \\ 3 \quad\quad 2 \quad\quad 1 \quad\quad 0 \\ \hline 3x^3 \quad\quad - ayx \quad\quad = 0. \end{array}$$

L'on trouve l'équation nouvelle $3x^3 - ayx = 0$, ou bien $3xx = ay$; d'où l'on déduit $y = \frac{3xx}{a}$, & $y^3 = \frac{27x^6}{a^3}$; mettant ces valeurs de y, y^3, dans la proposée, elle se change en celle-ci, $x^3 - 3x^3 + \frac{27x^6}{a^3} = 0$; ou bien $27x^3 - 2a^3 = 0$; d'où l'on déduit $x = \sqrt[3]{\frac{2a^3}{27}} = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$. Ce qui étoit proposé.

On trouvera aussi $y = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{4}$, en mettant la valeur de x dans $y = \frac{3xx}{a}$.

On détermineroit de même les valeurs de x & de y, en multipliant la proposée $x^3 - ayx + y^3 = 0$, par la progres-

$$\begin{array}{l} 0 \quad 1 \quad 2 \quad\quad 3 \\ \hline - 2ayx + 3y^3 = 0; \end{array}$$

sion 0, 1, 2, 3, car l'on auroit la nouvelle équation $- 2ayx + 3y^3 = 0$, ou bien $- 2ax + 3yy = 0$: en se servant des deux équations $3xx - ay = 0$, & $- 2ax + 3yy = 0$, dans lesquelles x doit avoir une même valeur, on auroit par la premiere $xx = \frac{ay}{3}$; & par la seconde, $x = \frac{3yy}{2a}$; donc $xx = \frac{9y^4}{4aa} = \frac{ay}{3}$; d'où l'on déduit $y^3 = \frac{4a^3}{27}$, & $y = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{4}$;

substituant cette valeur de y dans $x = \frac{3yy}{2a}$, l'on aura $x = \frac{1}{3} a\sqrt[3]{2}$, comme on l'avoit déja trouvé.

Enfin on trouveroit les mêmes valeurs de x & de y par la méthode du plus grand commun diviseur ; car puisque la proposée $x^3 - ayx + y^3 = 0$, & chacune des deux nouvelles équations trouvées par le moyen de la progression arithmetique, $3xx - ay = 0$, $-2ax + 3yy = 0$, ont une racine commune, on doit trouver cette racine commune en cherchant le plus grand commun diviseur de $x^3 - ayx + y^3 = 0$, & de laquelle on voudra des deux autres, par exemple, de $3xx - ay = 0$, jusqu'à ce qu'on soit arrivé au diviseur $-2ax + 3yy = 0$, dans lequel x est lineaire, qui sera un diviseur exact, en supposant égal à zero le reste qu'il fait trouver, $27y^3 - 4a^3 = 0$, dans lequel x n'est plus ; car l'équation du reste donne $y^3 = \frac{4a^3}{27}$, ou $y = \frac{1}{3} a\sqrt[3]{4}$; & substituant cette valeur dans le diviseur où x est lineaire, $-2ax + 3yy = 0$, l'on trouve $x = \frac{1}{3} a\sqrt[3]{2}$, comme on l'avoit trouvé.

AVERTISSEMENT.

On a mis ces trois manieres de déterminer les valeurs de x & de y, lorsque x a deux racines égales, afin d'en faire concevoir le raport.

REMARQUE.

Il faut remarquer qu'on ne peut supposer que le dernier diviseur où x est lineaire, soit un diviseur exact, en faisant le reste qui ne contient plus x, égal à zero, que quand il y a une ou plusieurs indéterminées dans ce reste ; car s'il n'y avoit que des grandeurs déterminées dans le reste, on ne pourroit pas les supposer toutes ensemble égales à zero, à moins qu'elles ne se détruisissent par des signes opposez : mais quand il y a des indéterminées dans le reste, elles se déterminent par cette supposition, que le reste est égal à zero, ou que chacun des termes du reste est égal à zero, de maniere que les valeurs des indéterminées trouvées par la supposition du reste égal à zero, étant substituées à leur place dans la proposée, & dans le diviseur où x est lineaire, ce diviseur ainsi déterminé, est necessairement un diviseur exact de la proposée.

EXEMPLE II.

SOIT l'équation $ax - yy = 0$, & $x = s - \sqrt{rr - tt - 2ty - yy}$; en substituant la valeur de x, prise dans la seconde, dans $ax - yy = 0$, après avoir ôté les incommensurables, on trouvera l'équation suivante,

$$y^4 \begin{matrix} - 2asyy \\ + aayy \end{matrix} + 2aaty \begin{matrix} + aass \\ - aarr \\ + aatt \end{matrix} = 0;$$

on suppose que x, y, r, sont des inconnues, & que a, s, t, sont connues.

1°. Il s'agit d'abaisser l'équation précedente $y^4 \begin{matrix} - 2asyy \\ + aayy \end{matrix}$, &c. à un moindre degré, & de trouver les valeurs de y par les seules grandeurs connues, en supposant que y a deux valeurs égales dans l'équation y^4, &c.

Il faut multiplier les termes de l'équation, chacun par l'exposant de la puissance de y, qui est dans ce terme; c'est-à-dire, par 4, 3, 2, 1, 0.

$$y^4 * \begin{matrix} - 2asyy \\ + aayy \end{matrix} + 2aaty \begin{matrix} + aass \\ - aarr \\ + aatt \end{matrix} = 0;$$

$$4, \quad 3, \quad 2, \quad 1, \quad 0$$

& l'on aura le produit $4y^4 \begin{matrix} - 4asyy \\ + 2aayy \end{matrix} + 2aaty = 0$,

ou bien $2y^3 \begin{matrix} - 2asy \\ + aay \end{matrix} + aat = 0$, qui est une équation du troisiéme degré, par laquelle on peut déterminer la valeur de y, parcequ'elle ne contient que des grandeurs connues avec l'inconnue y; ainsi l'on a trouvé l'équation proposée.

2°. En supposant à present qu'il n'y a dans l'équation précedente $y^4 * \begin{matrix} - 2asyy \\ + aayy \end{matrix} + 2aaty \begin{matrix} + aass \\ - aarr \\ + aatt \end{matrix} = 0$, que la grandeur a de connue, & que toutes les autres sont inconnues, il s'agit de trouver la valeur de t, qui ne contienne d'inconnue que y, en supposant que y a trois valeurs égales dans l'équation précedente.

Il faut dans ce cas multiplier l'équation proposée par les termes des deux progressions arithmetiques ici marquées,

$$\begin{array}{llllll} y^4 & * & -2asyy & +2aaty & +aass & =0, \\ & & +aayy & & -aarr & \\ & & & & +aatt & \\ 4, & 3, & 2, & 1, & 0, & \\ 2, & 1, & 0, & -1, & -2, & \end{array}$$

& l'on aura le produit $8y^4 \quad -2aaty \quad =0$; qui se réduit à $4y^3 - aat = 0$; d'où l'on déduit $t = \frac{4y^3}{aa}$. Ce qui étoit proposé.

3°. En supposant que toutes les lettres de la même équation sont des inconnues, excepté la grandeur a, & que y a trois valeurs égales; il faut trouver une équation qui ne contienne pour inconnues que s & t, & que toutes les autres inconnues ne s'y trouvent point.

Il faut multiplier l'équation $y^4 * -2asyy + 2aaty + aass$
$+aayy \quad -aarr$
$=0$, par les termes des deux progressions arithmetiques ici marquées, $\quad +aatt$

$$\begin{array}{lllll} 4, & 3, & 2, & 1, & 0, \\ 0, & 1, & 2, & 3, & 4, \end{array}$$

& l'on trouvera l'équation $0, -8asyy + 6aaty = 0$,
$+4aayy$

qui se réduit à $-4asy + 3aat = 0$; d'où l'on déduit
$+2aay$

$y = \frac{3aat}{4as-2aa} = \frac{3at}{4s-2a}$; supposant, pour abreger le calcul, $4s - 2a = 4v$; c'est-à-dire, $s - \frac{1}{2}a = v$, l'on aura $y = \frac{3at}{4s-2a} = \frac{3at}{4v}$; d'où l'on déduira $y^3 = \frac{27a^3t^3}{64v^3}$; mettant cette valeur de y^3 dans $4y^3 - aat = 0$, qu'on a trouvée dans le second article, l'on aura $\frac{27a^3t^3}{16v^3} - aat = 0$, qui se réduit à $27att - 16v^3 = 0$, qui est l'équation qu'on cherchoit, car en mettant $s - \frac{1}{2}a = v$, à la place de v dans $27att - 16v^3 = 0$, l'on aura $27att - 16s^3 + 24ass - 12aas + 2a^3 = 0$.

On trouveroit cette même équation en cherchant le plus grand diviseur commun des deux équations $4y^3 - aat = 0$, & $-4asy + 2aay + 3aat = 0$, trouvées par les progressions arithmetiques, & continuant la recherche jusqu'à ce que l'inconnue y ne fût plus dans le reste; car on trouveroit le reste $27att - 16s^3 + 24ass - 12aas + 2a^3 = 0$.

ANALYSE

ANALYSE COMPOSÉE,

OU

ANALYSE QUI ENSEIGNE A RESOUDRE les Problêmes qui se réduisent à des équations composées.

LIVRE V.

De la résolution des équations composées en particulier.

SECTION I.

De la résolution des équations du second degré.

AVERTISSEMENT.

ON a déja donné deux manieres de résoudre les équations du second degré *; mais on a remis le détail de tout ce qui regarde ces équations à cet endroit, qui en est le lieu propre; c'est pourquoi on va expliquer ici une méthode generale de trouver les deux racines de toutes ces équations, & on l'appliquera à tous les cas possibles.

* 6, & 41. *Remarque du premier exemple.*

On suppose dans ce cinquiéme Livre, que les équations sont sans fractions & sans incommensurables.

PROBLÊME I.

76. *TROUVER les deux racines de toute équation du second degré.*

MÉTHODE GENERALE.

ON supposera que l'équation generale $xx + nx + p = 0$, représente toutes les équations du second degré; de maniere (comme on l'a déja dit plusieurs fois) que $+ n$ repré-

ſente le coëficient du ſecond terme avec ſon ſigne, & zero, ſi le ſecond terme eſt évanoui ; & $+p$ repréſente le dernier terme avec ſon ſigne : Ce qu'il faudra toujours entendre dans le 3e, 4e degré, &c. On ſuppoſera enſuite que l'équation lineaire $x - f + g = 0$, repréſente par ſes indéterminées f, g, celle des deux équations lineaires qui contient la premiere racine : Ainſi $+f - g$ repréſente la premiere racine.

Pour trouver cette premiere racine & la ſeconde, on ſe ſervira de laquelle on voudra des deux méthodes ſuivantes.

1°. On ſuppoſera que la ſeconde équation lineaire eſt $x - f - g = 0$; on multipliera $x - f + g = 0$, par $x - f - g = 0$, & on comparera chaque terme du produit $\begin{array}{l} xx - 2fx + ff = 0 \\ - gg \end{array}$; excepté le premier terme, avec le terme correſpondant de l'équation generale $xx + nx + p = 0$; ce qui donnera ces deux équations particulieres $-2f = n$, $+ff - gg = +p$; d'où l'on déduira $f = -\frac{n}{2}$, & $g = \sqrt{\frac{nn}{4} - p}$; mettant ces valeurs de f & de g dans les deux équations lineaires indéterminées $x - f + g = 0$, $x - f - g = 0$, elles ſeront changées, la premiere en $x + \frac{n}{2} + \sqrt{\frac{nn}{4} - p} = 0$; la ſeconde en $x + \frac{n}{2} - \sqrt{\frac{nn}{4} - p} = 0$.

Ainſi la formule generale de la premiere racine ſera $x = -\frac{n}{2} - \sqrt{\frac{nn}{4} - p}$; la formule generale de la ſeconde racine ſera $x = -\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{nn}{4} - p}$.

2°. Ou bien on diviſera l'équation generale $xx + nx + p = 0$, par l'équation lineaire indéterminée $x - f + g = 0$; & continuant la diviſion juſqu'à ce que x ne ſoit plus dans le reſte, on trouvera le reſte $\begin{array}{l} gg - ng + p = 0 \\ - 2fg + nf \\ + ff \end{array}$, & le quotient $\begin{array}{l} x + n = 0 \\ + f \\ - g \end{array}$: En ſuppoſant ce reſte égal à zero, & ſon ſecond terme auſſi égal à zero, l'équation indéterminée $x - f + g = 0$, ſera un diviſeur exact de la propoſée ; & le quotient $\begin{array}{l} x + n = 0 \\ + f \\ - g \end{array}$ ſera exact.

Or par la ſuppoſition de ce reſte égal à zero, l'on a deux équations particulieres, ſçavoir la premiere $2f = -n$; d'où l'on déduit $f = -\frac{n}{2}$; la ſeconde $\begin{array}{l} gg * + p = 0, \\ \quad + nf \\ \quad + ff \end{array}$ dans laquelle ſubſtituant $-\frac{n}{2}$ à la place de f, l'on trouve $gg - \frac{nn}{4} + p = 0$, d'où l'on déduit $g = \sqrt{\frac{nn}{4} - p}$; ſubſtituant ces valeurs dans le diviſeur $x - f + g = 0$, & dans le quotient $x + n + f - g = 0$, l'on trouve pour le diviſeur $x + \frac{n}{2} + \sqrt{\frac{nn}{4} - p} = 0$, & pour le quotient $x + \frac{n}{2} - \sqrt{\frac{nn}{4} - p} = 0$.

Ainſi la formule generale de la premiere racine ſera $x = -\frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{nn}{4} - p}$; & la formule generale de la ſeconde ſera $x = -\frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{nn}{4} - p}$.

Application des formules de la réſolution generale aux équations particulieres du ſecond degré.

EXEMPLE I.

SOIT l'équation $xx - ab = 0$, dont il faut trouver les deux racines.

Pour appliquer l'équation generale $xx + nx + p = 0$, à cette équation particuliere, dont le ſecond terme eſt évanoui, l'on ſuppoſera $n = 0$, $+p = -ab$; ainſi dans les deux formules des racines on ſuppoſera $n = 0$, & $+p = -ab$. Subſtituant donc $-ab$ au lieu de $+p$ dans les deux formules generales des racines, la premiere racine de la propoſée ſera $x = -\frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{nn}{4} - p} = -\sqrt{ab}$; la ſeconde ſera $x = -\frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{nn}{4} - p} = +\sqrt{ab}$. *Ce qu'il faloit trouver.*

EXEMPLE II.

POUR trouver les deux racines de l'équation $xx - 2bx + cc = 0$, on ſuppoſera $+n = -2b$, & $+p = +cc$; on ſubſtituera dans les deux formules des racines les grandeurs repréſentées par n, p, & la premiere racine de la propoſée ſera $x = -\frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{nn}{4} - p} = +b - \sqrt{bb - cc}$; & la ſeconde ſera $x = -\frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{nn}{4} - p} = +b + \sqrt{bb - cc}$. *Ce qu'il faloit trouver.*

EXEMPLE III.

POUR trouver les racines de $xx + 1x - 2 = 0$, on supposera $+ n = + 1$, & $+ p = - 2$; on substituera ces valeurs de n, p, à leur place dans les formules des racines, & la premiere racine sera $x = -\frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{nn}{4} - p} = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{9}{4}} = - 2$. La seconde racine sera $x = -\frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{nn}{4} - p} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}} = + 1$; ainsi l'une des racines de la proposée est la positive $x = + 1$, & l'autre est la négative $x = - 2$. *Ce qui étoit proposé.*

EXEMPLE IV.

POUR trouver les deux racines de l'équation $xx - 2x + 3 = 0$, on supposera $n = - 2$, $+ p = + 3$; on substituera ces valeurs de n, p, à leurs places dans les formules generales des racines, & la premiere sera $x = -\frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{nn}{4} - p} = + 1 - \sqrt{1 - 3} = + 1 - \sqrt{- 2}$; la seconde sera $x = -\frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{nn}{4} - p} = + 1 + \sqrt{1 - 3} = + 1 + \sqrt{- 2}$; d'où l'on voit que les deux racines de la proposée sont imaginaires.

Démonstration du premier Problême.

77. L'EQUATION lineaire, dont x est l'inconnue, qui divise exactement une équation du second degré, représentée par l'équation generale $xx + nx + p = 0$, contient une de ses racines, & le quotient exact contient l'autre, par la nature
26 & 33. des équations.* Or l'équation lineaire que l'on trouve par la méthode du premier Problême, divise exactement l'équation generale du second degré, puisque le reste de la division est égal à zero, & que ce n'est que par cette supposition qu'elle est déterminée; & le quotient est aussi exact: l'équation lineaire qu'on trouve par la méthode, contient donc une racine de l'équation generale du second degré, & le quotient contient l'autre; l'on a donc par la méthode les formules generales des deux racines de toute équation du second degré. *Ce qu'il faloit démontrer.*

REMARQUES.

I.

78. LORSQUE le second terme est évanoui, & qu'il y a $+ p$, comme dans l'équation $xx + p = 0$, les deux racines sont

imaginaires, puiſque la premiere eſt $x = -\sqrt{-p}$; & la ſeconde, $x = +\sqrt{-p}$.

I I.

Lorſqu'il y a $+p$ dans une équation du ſecond degré, & que p ſurpaſſe le quarré de la moitié de n, c'eſt-à-dire, lorſque p ſurpaſſe $\frac{1}{4}nn$, les deux racines ſont encore imaginaires, puiſque $\sqrt{\frac{1}{4}nn - p}$ eſt la racine d'une grandeur négative.

I I I.

Lorſqu'il y a $-p$ dans une équation du ſecond degré, les racines ſont toujours réelles; car alors la grandeur $\frac{1}{4}nn + p$, qui eſt ſous le ſigne radical, eſt toujours poſitive.

Il ſuit de la ſeconde & troiſiéme remarque, qu'il ne peut y avoir de racines imaginaires dans une équation du ſecond degré qui a tous ſes termes, que quand il y a $+p$; c'eſt-à-dire, quand les deux racines ſont toutes deux poſitives, ou toutes deux négatives; & qu'elles ſont toujours réelles, quand l'une eſt poſitive & l'autre négative.

I V.

Quand l'inconnue a plus de deux dimenſions dans le premier terme d'une équation du ſecond degré, comme dans $x^4 + nxx + p = 0$, ou en general dans $x^{2m} + nx^m + p = 0$, (m repréſentant un nombre quelconque entier & poſitif,) quoiqu'il n'y ait que deux racines en la conſiderant du ſecond degré, qui ſont $xx = -\frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}nn - p}$, $xx = -\frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}nn - p}$; ou en general $x^m = -\frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}nn - p}$, $x^m = -\frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}nn - p}$; cependant chacune de ces racines, ou chacune des équations ſimples formée par ces racines, $xx + \frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}nn - p} = 0$; $xx + \frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}nn - p} = 0$: ou bien en general $x^m + \frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}nn - p} = 0$, $x^m + \frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}nn - p} = 0$, pouvant encore être conſiderée comme une équation compoſée, on peut dire que chacune de ces équations ſimples contient encore autant de racines, que l'expoſant 2 de la plus haute puiſſance de l'inconnue xx, ou l'expoſant m de l'inconnue x^m, contient d'unitez: car l'inconnue x a autant de valeurs dans ces équations plus ſimples, dont l'équation du ſecond degré eſt compoſée, que cet expoſant de l'inconnue a d'unitez. Ce qu'il faut remarquer pour les cas ſemblables des autres de-

grez repréſentez en general dans le troiſiéme degré par $x^{3m} + nx^{2m} + px^{m} + q = 0$; dans le quatriéme degré, par $x^{4m} + nx^{3m} + px^{2m} + qx^{m} + r = 0$; & ainſi des autres.

V.

Si l'on ôte ſeparément les incommenſurables de chacune des équations lineaires $x + \frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}nn - p} = 0$, $x + \frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}nn - p} = 0$, qui contiennent les racines de l'équation propoſée, il en viendra une même équation, qui eſt la propoſée $xx + nx + p = 0$; ce qui peut ſervir en quelques rencontres à connoître ſi une équation lineaire contient une des racines de la propoſée, lorſqu'elle a des grandeurs incommenſurables.

VI.

La méthode de réſoudre les équations peut ſervir à déterminer une grandeur où il y a une ou pluſieurs inconnues avec des connues, quoiqu'elles ne forment pas une équation; on en a déja vû un exemple en réſolvant le 6[e] Problême du
49. 3[e] Livre; en voici un autre, l'on a $x = b + \sqrt{aa - yy - by}$. Il s'agit de déterminer les cas où la valeur de x eſt réelle, & ceux où elle eſt imaginaire. Il n'y a qu'à ſuppoſer que $yy + by = aa$; & réſolvant cette équation, on trouvera que la valeur de y eſt $y = -\frac{1}{2}b \pm \sqrt{\frac{1}{4}bb + aa}$: Ainſi quand y eſt égale à cette grandeur, ou moindre que cette grandeur, $\sqrt{aa - yy - by}$ eſt zero, ou poſitive, & la valeur de x eſt réelle: mais quand y ſurpaſſe cette grandeur $-\frac{1}{2}b \pm \sqrt{\frac{1}{4}bb + aa}$, alors $\sqrt{aa - yy - by}$, eſt la racine d'une grandeur négative, & la valeur de x eſt imaginaire.

SECTION II.

De la réſolution des équations du troiſiéme degré.

AVERTISSEMENT.

POUR abreger & faciliter le calcul, on ſuppoſera que le ſecond terme eſt évanoui dans toutes les équations du troiſiéme degré qu'on veut réſoudre. On a donné la méthode de le faire évanouir, dans l'uſage des transformations, dans
41. le troiſiéme Livre. Ainſi l'équation generale $x^3 + px + q = 0$, repréſentera toutes les équations du troiſiéme degré, dont le ſecond terme eſt évanoui.

Il faut remarquer que quand le second terme est évanoui, il y a dans l'équation deux racines positives, & une racine négative égale aux deux positives ; ou bien deux racines négatives, & une positive égale aux deux négatives.* *29, 11e Corol.

PROBLÊME II.

79. *DÉTERMINER, quand le second terme des équations du troisiéme degré est évanoui, 1°. les cas où les deux racines positives ou négatives sont égales, ceux où elles sont inégales ; 2°. les cas où, étant inégales, les trois racines sont réelles, ceux où il y en a deux d'imaginaires ; 3°. & trouver les racines, lorsque les deux positives ou négatives sont égales, & encore lorsque les trois racines, quoiqu'inégales, sont commensurables, ou lorsqu'il y en a quelqu'une de commensurable.*

MÉTHODE GENERALE.

1°. ON supposera, lorsqu'il y a deux racines positives, que la premiere est $f-g$, la seconde $f+g$; & leur somme $2f$ sera la racine négative ; & on fera les trois équations lineaires $x-f+g=0$, $x-f-g=0$, $x+2f=0$.

Lorsqu'il y a deux racines négatives, que la premiere est $-f+g$, la seconde $-f-g$; & leur somme $-2f$ sera la racine positive, en changeant son signe $-$, & supposant $+2f$; & on fera les trois équations lineaires $x+f-g=0$, $x+f+g=0$, $x-2f=0$. On suppose que f est plus grande que g ; car autrement $f-g$ ne seroit pas positive, & $-f+g$ ne seroit pas négative.

2°. On multipliera les trois premieres les unes par les autres, & l'on aura le produit

$$A \quad \begin{matrix} x^3 * -3ffx + 2f^3 \\ \quad\;\; -ggx - 2ggf \end{matrix} = 0,$$

qui est l'équation indéterminée qui représente les équations du troisiéme degré, dont deux racines sont positives, & la troisiéme est négative, & égale à la somme des deux positives. On multipliera de même les trois autres équations lineaires les unes par les autres, & leur produit.

$$B \quad \begin{matrix} x^3 * -3ffx - 2f^3 \\ \quad\;\; -ggx + 2ggf \end{matrix} = 0,$$

représentera les équations du trosiéme degré, dont deux racines sont négatives, & la troisiéme positive, & égale à la somme des deux négatives.

REMARQUE.

80. ON peut remarquer que le troisiéme terme de ces deux équations a toujours le signe —, & est une quantité réelle négative, quand les trois racines sont réelles; par consequent si le troisiéme terme a le signe +, ou s'il est zero, il y a necessairement deux racines imaginaires; ainsi dans la formule generale p doit avoir —, lorsque les trois racines sont réelles, & elle doit être $x^3 - px \pm q = 0$, sçavoir $+q$, quand deux racines sont positives, & $-q$, si deux sont négatives.

3°. On comparera les termes de chacune de ces deux équations indéterminées A & B, avec les termes correspondans de l'équation generale $x^3 - px \pm q = 0$, excepté le premier terme. L'on aura par le moyen de l'équation A ces deux équations particulieres $+3ff + gg = +p$, $+2f^3 - 2ggf = +q$; & par l'équation B, $+3ff + gg = +p$, $-2f^3 + 2ggf = -q$; d'où l'on déduira pour l'une & l'autre $+ff + \frac{gg}{3} = +\frac{p}{3}$; & pour l'équation A, $f^3 - ggf = +\frac{q}{2}$; & pour l'équation B, $-f^3 + ggf = -\frac{q}{2}$. Elevant $+ff + \frac{gg}{3} = \frac{p}{3}$ à la troisiéme puissance, l'on aura $+f^6 + ggf^4 + \frac{g^4}{3}ff + \frac{g^6}{27} = \frac{p^3}{27}$, pour l'équation A & pour l'équation B. Elevant aussi $f^3 - ggf = +\frac{q}{2}$ au quarré, l'on aura pour l'équation A, $f^6 - 2ggf^4 + g^4ff = \frac{qq}{4}$. Elevant de même $-f^3 + ggf = -\frac{q}{2}$ au quarré, l'on aura pour l'équation B, $f^6 - 2ggf^4 + g^4ff = \frac{qq}{4}$, qui est la même que celle de l'équation A. Retranchant à present chaque membre de l'équation $f^6 - 2ggf^4 + g^4ff = \frac{qq}{4}$, du membre correspondant de l'équation $f^6 + ggf^4 + \frac{g^4ff}{3} + \frac{g^6}{27} = \frac{p^3}{27}$, l'on aura l'équation $3ggf^4 - \frac{2g^4ff}{3} + \frac{g^6}{27} = \frac{p^3}{27} - \frac{qq}{4}$, qui conviendra à l'équation A & à l'équation B. Or chaque membre de cette équation est positif, car $+3ggf^4$ surpasse $-\frac{2}{3}g^4ff$, puisqu'en divisant l'une & l'autre par $ggff$, le quotient $3ff$ surpasse le quotient $-\frac{2}{3}gg$, car on a supposé que f surpassoit g. Tout cela supposé, le Problême est facile à résoudre.

1°. *Quand* $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$, *les deux racines positives ou négatives sont égales.*

81. QUAND les deux racines positives ou négatives sont égales,

égales, g eſt égale à zero dans les équations lineaires $x - f + g = 0$, $x - f - g = 0$, $x + 2f = 0$; & dans les autres $x + f - g = 0$, $x + f + g = 0$, $x - 2f = 0$; par conſequent chaque grandeur du premier membre de l'équation $3ggf^4 - \frac{2g^4ff}{3} + \frac{g^6}{27} = \frac{p^3}{27} - \frac{qq}{4}$, eſt égale à zero. Donc $\frac{p^3}{27} - \frac{qq}{4} = 0$; donc $\frac{1}{27}p^3 = \frac{qq}{4}$.

2°. Quand les trois racines ſont inégales & réelles, $\frac{1}{27}$ p³ ſurpaſſe $\frac{1}{4}$ qq.

82. QUAND les trois racines ſont inégales & réelles, le premier membre de l'équation $3ggf^4 - \frac{2g^4ff}{3} + \frac{g^6}{27} = \frac{p^3}{27} - \frac{qq}{4}$, eſt poſitif, le ſecond membre $\frac{p^3}{27} - \frac{qq}{4}$, eſt donc auſſi poſitif; & par conſequent $\frac{p^3}{27}$ ſurpaſſe $\frac{qq}{4}$.

3°. Quand $\frac{1}{27}$ p³ eſt moindre que $\frac{1}{4}$ qq, il y a deux racines imaginaires.

83. CAR ſi les racines étoient toutes réelles, on vient de démontrer que $\frac{1}{27}p^3$ ſeroit égal à $\frac{1}{4}qq$, ou ſurpaſſeroit $\frac{1}{4}qq$.

4°. Trouver les racines lorſque les deux poſitives ou les deux négatives ſont égales.

84. QUAND les deux racines poſitives, ou les deux négatives ſont égales, g eſt zero dans les équations lineaires $x - f + g = 0$, &c. par conſequent l'équation particuliere qui vient de la comparaiſon des troiſiémes termes $+ 3ff + gg = + p$, ſe réduit à $+ 3ff = p$; d'où l'on déduit $+ ff = \frac{p}{3}$. Par la même raiſon, l'équation $2f^3 - 2ggf = + q$; ou $- 2f^3 + 2ggf = - q$, ſe réduit à $2f^3 = q$; d'où l'on déduit $f^3 = \frac{q}{2}$. Diviſant le premier membre de $f^3 = \frac{q}{2}$, par le premier membre de $ff = \frac{p}{3}$, & le ſecond par le ſecond, l'on trouve $\frac{f^3}{ff} = f = \frac{3q}{2p}$; chacune des racines égales repréſentées par f, eſt donc $= \frac{3q}{2p}$; d'où l'on déduit cette réſolution.

Réſolution.

85. QUAND une équation du troiſiéme degré, dont le ſecond terme eſt évanoui, a deux racines égales; il faut diviſer le triple du dernier terme q, par le double du coëficient p du ſecond terme, & le quotient ſera une des racines égales.

La troiſiéme racine eſt égale à deux fois la racine égale;

5°. Trouver les racines d'une équation du troisiéme degré, dont le second terme est évanoui, lorsqu'elles sont commensurables, ou qu'il y en a quelqu'une de commensurable.

86. Si l'on ôte la grandeur p, représentée par $3ff+gg=p$, de $4ff$ quarré de la grandeur $2f$, qui représente la racine qui est égale à la somme des deux autres, le reste $ff-gg$ est un diviseur exact de la grandeur $+q$, représentée par $2f^3-2ggf=+q$, pour l'équation A; & faisant la division, le quotient est $2f$, qui est la racine du quarré $4ff$.

Le même reste $ff-gg$ est aussi un diviseur exact de $-q$, représentée par $-2f^3+2ggf=-q$, pour l'équation B; & faisant la division le quotient est $-2f$, qui est aussi la racine du quarré $4ff$. On déduit de là cette premiere résolution.

Premiere Résolution.

Quand la racine, représentée par $+$ ou $-2f$, qui est égale à la somme des deux autres, est commensurable, il y a toujours un quarré parfait plus grand que p, duquel ôtant p & divisant q par le reste, la division se fait exactement; & il vient pour quotient exact $+$ ou $-2f$, qui est la racine de la proposée, égale à la somme des deux autres, & qui est à même tems la racine quarrée juste du quarré parfait qu'on a pris plus grand que p.

De même si l'on prend le quarré de l'une des racines positives ou négatives, $f-g$, ou $-f+g$, qui est $ff-2gf+gg$, & qu'on ôte ce quarré de $3ff+gg=p$, on aura le reste $2ff+2gf$, qui est un diviseur exact de $2f^3-2ggf=+q$, pour l'équation A; & de $-2f^3+2ggf=-q$, pour l'équation B; & faisant la division, le quotient sera dans le premier cas $+f-g$, & dans le second, $-f+g$, dont chacun est la racine du quarré parfait $ff-2gf+gg$, qu'on a pris moindre que p. On trouveroit la même chose en se servant de l'autre racine représentée par $f+g$, ou $-f-g$; d'où l'on déduit la seconde résolution.

Seconde Résolution.

Quand les deux racines positives ou négatives, sont commensurables, on peut toujours trouver un quarré parfait moindre que p, tel qu'étant retranché de p, le reste soit un diviseur exact de $+$ ou $-q$; & faisant la division, il

vient un quotient exact, représenté par $+f-g$, ou $-f+g$, qui est une des deux racines positives ou négatives de la proposée, & qui est à même tems la racine exacte du quarré qu'on a pris moindre que p.

REMARQUE.

87. QUAND on aura trouvé une des racines d'une équation du troisiéme degré, en divisant l'équation par $x +$ ou $-$ cette racine, le quotient qui sera une équation du second degré, contiendra les deux autres, & on les trouvera en resolvant cette équation du second degré. Ou bien en supposant que la racine trouvée soit a, si c'est la racine égale à la somme des deux autres, elle sera le coëficient du second terme de l'équation du second degré qui les contient; & le dernier terme q de la proposée, divisé par cette racine a, c'est-à-dire $\frac{q}{a}$, sera le produit de ces deux autres racines, par la formation des équations: Ainsi l'équation du second degré, qui contient les deux autres, sera $xx - ax + \frac{q}{a} = 0$, quand elles sont positives; la premiere sera donc $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{q}{a}}$; & la seconde, $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{q}{a}}$.

L'équation du second degré, qui contient les deux autres, sera $xx + ax + \frac{q}{a} = 0$, quand elles sont négatives; la premiere sera donc $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{q}{a}}$; & la seconde, $x = -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{q}{a}}$. Mais si la racine découverte a est une des deux positives ou négatives, elle sera aussi le coëficient du second terme de l'équation du second degré, qui contient les deux autres; puisque ce coëficient est l'excès de la racine égale à la somme des deux positives ou négatives, sur celle qui reste à découvrir; & que la racine découverte est aussi ce même excès; & $\frac{q}{a}$ est le produit des deux qui restent à découvrir: Ainsi l'équation qui contient les deux autres, dont une est toujours positive, & l'autre négative, sera $xx \pm ax - \frac{q}{a} = 0$. Il y aura $+ax$, quand la racine découverte sera positive, & $-ax$, quand elle sera négative. La premiere racine sera donc $x = \mp \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{q}{a}}$; & la seconde sera $x = \mp \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{q}{a}}$. Il y aura $-\frac{1}{2}a$, quand la racine decouverte sera positive; & $+\frac{1}{2}a$, quand elle sera négative.

Application du second Problème à des exemples.

EXEMPLE I.

ON propose de trouver les racines de $x^3 - 12x + 16 = 0$, pour y appliquer la résolution, on supposera, afin que la formule generale $x^3 - px + q = 0$, représente la proposée, que $-p = -12$, & $q = 16$. Or $\frac{p^3}{27} = 64$, & $\frac{1}{4}qq = 64$. Cela fait connoître que la proposée contient deux racines égales.

Pour trouver chaque racine égale, on se servira de la formule $f = \frac{3q}{2p} = \frac{48}{+24} = +2$; ainsi la racine égale est $x = 2$; la racine inégale est donc $x = -4$.

EXEMPLE II.

POUR trouver les racines de

$$\begin{array}{llll} x^3 & -27aax & +54a^3 & = 0, \\ & +18abx & -54aab & \\ & -3bbx & +18abb & \\ & & -2b^3 & \end{array}$$

il faut supposer $-p = -27aa + 18ab - 3bb$, & $q = 54a^3 - 54aab + 18abb - 2b^3$; & faisant le calcul, on trouvera que $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$; ce qui fait connoître qu'il y a deux racines égales.

La formule $f = \frac{3q}{2p}$, fera trouver, en divisant le triple du dernier terme par le double du coëficient du troisiéme terme, le quotient $3a - b$: ainsi la racine égale est $x = 3a - b$, & la racine inégale est $x = -6a + 2b$.

EXEMPLE III.

POUR trouver les racines de l'équation $x^3 - 7x + 6 = 0$, on supposera que la formule generale qui représente cette équation est $x^3 - px + q = 0$, & $p = +7$, $q = +6$; $\frac{p^3}{27} = \frac{343}{27}$, & $\frac{1}{4}qq = 9$. Comme $\frac{p^3}{27}$ surpasse $\frac{1}{4}qq$, cela fait connoître que les trois racines sont réelles & inégales; & le dernier terme $+6 = q$ étant positif; cela fait connoître qu'il y a deux racines positives, & une négative qui est égale aux deux positives, puisque le second terme est évanoui.

Pour trouver la plus grande racine qui est égale aux deux positives, on prendra un quarré parfait plus grand que $p = 7$:

or le premier quarré plus grand que $p = 7$ eſt 9. On ôtera $p = 7$ du quarré 9, & l'on aura le reſte 2. On diviſera $q = 6$ par ce reſte 2, & le quotient 3 étant la racine quarrée du quarré 9 qu'on a pris, c'eſt la racine négative qu'on cherche; ainſi $x = -3$.

On trouvera les deux autres en diviſant la propoſée par $x + 3 = 0$, car l'on aura pour quotient l'équation du ſecond degré $xx - 3x + 2 = 0$, qui les contient; & on trouvera en reſolvant cette équation du ſecond degré, que l'une eſt $x = 1$, & l'autre $x = 2$. Ou bien nommant a la racine trouvée 3, l'une des deux poſitives ſera $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{q}{a}}$ $= \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{6}{3}} = +2$, & l'autre ſera $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{q}{a}}$ $= \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{6}{3}} = +1$.

Si l'on vouloit commencer la réſolution par une des deux racines poſitives, il faudroit prendre un quarré parfait, comme 4, moindre que $p = 7$; & après avoir retranché ce quarré 4 de $p = 7$, diviſer par le reſte 3 le dernier terme $q = 6$; & le quotient 2 étant la racine du quarré 4 qu'on a pris, c'eſt auſſi une des racines poſitives de la propoſée; ainſi $x = 2$ eſt une des racines poſitives de la propoſée.

On trouvera les deux autres par la méthode dont on s'eſt ſervi, après avoir trouvé la racine négative $x = -3$.

EXEMPLE IV.

ON propoſe de trouver les racines de l'équation $x^3 - 1x + 6 = 0$, qui eſt repréſentée par l'équation generale $x^3 - px + q = 0$; de maniere que $p = 1$, & $q = 6$. Mais étant viſible que $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{27}$ eſt moindre que $\frac{1}{4}qq = 9$, l'on eſt aſſuré * que la propoſée a deux racines imaginaires. On *83. en donnera la réſolution après la démonſtration du Problême.

Démonſtration du Problême.

88. QUAND les trois racines d'une équation du troiſiéme degré, qui a le ſecond terme évanoui, ſont réelles, il eſt évident que $x - f + g = 0$, $x - f - g = 0$, $x + 2f = 0$, repréſentent d'une maniere generale les trois équations lineaires dont cette équation eſt le produit, lorſqu'il y a deux

racines positives, & leur produit

$$x^3 * \begin{array}{l} -3ffx + 2f^3 \\ -ggx - 2ggf \end{array} = 0,$$

représente d'une maniere generale cette équation du troisiéme degré.

Mais quand l'équation a deux racines négatives, il faut se servir des trois équations lineaires $x+f-g=0$, $x+f+g=0$, $x-2f=0$; & leur produit

$$x^3 * \begin{array}{l} -3ffx - 2f^3 \\ -ggx + 2ggf \end{array} = 0,$$

représentera d'une maniere generale l'équation du troisiéme degré.

D'où il suit que ce qu'on découvre par ces équations indéterminées, convient à toutes les équations du troisiéme degré qu'elles représentent.

Quand les deux racines, positives ou négatives, seront égales, il est évident que g sera égal à zero, & qu'en effaçant les quantitez où se trouve g, dans les deux produits; ils représenteront l'équation qui aura deux racines égales.

La formule generale $x^3 - px + q = 0$, représente aussi d'une maniere generale la même équation du troisiéme degré, lorsque deux de ses racines sont positives, & $x^3 - px - q = 0$, lorsque deux de ses racines sont négatives.

Ce que l'on découvre par les équations particulieres qui naissent de la comparaison des termes correspondans des produits & de la formule generale, convient donc aussi aux équations du troisiéme degré, représentées par les produits & par les formules generales.

COROLLAIRE.

89. LORSQU'EN cherchant la racine qui est égale à la somme des deux autres, c'est-à-dire, la plus grande des trois racines, on ne trouve aucun quarré parfait qui soit tel, que retranchant p de ce quarré, & divisant q par le reste, il vienne un quotient exact qui soit la racine du quarré qu'on a pris; la plus grande racine est incommensurable.

De même si en cherchant une des deux moindres racines, on ne trouve aucun quarré parfait moindre que p, qui soit tel, que ce quarré étant retranché de p, & q étant divisé par le reste, il en vienne un quotient exact qui soit la racine du quarré qu'on a pris; les deux moindres racines sont incommensurables.

REMARQUE.

90. PAR le Problême précedent, on trouve toujours les racines d'une équation du troiſiéme degré, lorſqu'il y en a deux d'égales, & lorſque les trois ſont réelles, & qu'elles ſont commenſurables, ou du moins une.

Mais quand elles ſont toutes trois réelles & inégales, ce qui arrive * lorſque $\frac{1}{27}p^3$ ſurpaſſe $\frac{1}{4}qq$, & qu'elles ſont toutes incommenſurables : on n'a pas juſqu'à preſent trouvé de maniere de les exprimer exactement par Algebre, c'eſt-à-dire, on n'a pas pû trouver d'expreſſion Algebrique réelle qui les exprimât d'une maniere incommenſurable, avec le ſigne radical ; & c'eſt ce cas qu'on appelle le cas irréductible du troiſiéme degré : On les trouve cependant par approximation, & on les trouve exactement par la Geometrie. * 82.

PROBLÊME III.

91. *TROUVER la racine réelle commenſurable ou incommenſurable d'une équation du troiſiéme degré dont le ſecond terme eſt évanoui, & dont deux racines ſont imaginaires.*

MÉTHODE.

LA méthode eſt ſemblable à celle du Problême précedent ; il faut ſeulement remarquer que les équations du troiſiéme degré ont deux racines imaginaires dans ces trois cas ; 1°. quand il y a $+px$ * ; 2°. quand il y a $-px$, & que $\frac{1}{27}p^3$ * 80.
eſt moindre que $\frac{1}{4}qq$ * ; 3°. quand le ſecond & le troiſiéme * 83.
terme ſont évanouis *, comme dans $x^3 \pm q = 0$. Dans ce * 80.
dernier cas la racine réelle eſt $x = \sqrt[3]{\mp q}$. Dans le premier cas, l'équation generale eſt $x^3 + px \pm q = 0$; & dans le ſecond, l'équation generale eſt $x^3 - px \pm q = 0$.

On ſuppoſera pour le premier & ſecond cas, que les trois équations lineaires, dont la propoſée eſt le produit, ſont $x + f + \sqrt{-3gg} = 0$, $x + f - \sqrt{-3gg} = 0$, $x - 2f = 0$; & en les multipliant les unes par les autres, on aura le produit $x^3 - 3ffx - 2f^3 = 0$, qui repréſente les raports des

$A \quad + 3ggx - 6ggf$

racines de la formule $x^3 - px - q = 0$, lorſqu'il y a $-px$ $-q$, en ſuppoſant f^3 plus grande que g ; mais ce produit

repréſentera les raports des racines de la formule $x^3 + px - q = 0$, en ſuppoſant f moindre que g.

On ſuppoſera encore que les trois équations lineaires ſont $x - f + \sqrt{-3gg} = 0$, $x - f - \sqrt{-3gg} = 0$, $x + 2f = 0$; & en les multipliant les unes par les autres, on aura le produit

$$\begin{array}{l} x^3 - 3ffx + 2f^3 = 0 \\ B \qquad + 3ggx + 6ggf \end{array}$$

qui repréſente les raports des racines des équations, dont les formules ſont $x^3 - px + q = 0$, en ſuppoſant f plus grande que g; mais il repréſentera les raports des racines des équations dont la formule eſt $x^3 + px + q = 0$, en ſuppoſant f moindre que g.

On a ſuppoſé dans les équations lineaires que la grandeur imaginaire eſt $\sqrt{-3gg}$, quoique cela ſoit arbitraire; mais cette expreſſion ſervira dans le calcul qu'on va faire, à trouver plus facilement les formules des réſolutions.

On comparera enſuite les termes correſpondans des produits des formules, excepté le premier; & l'on aura les équations particulieres qui ſuivent, lorſque la racine réelle $2f$ eſt poſitive; c'eſt-à-dire, dans l'équation A: 1re, $-3ff + 3gg = \mp p$; d'où l'on déduit $ff - gg = \pm \frac{p}{3}$: 2e, $-2f^3 - 6ggf = -q$; d'où l'on déduit $f^3 + 3ggf = +\frac{q}{2}$.

Et lorſque la racine réelle $-2f$ eſt négative; c'eſt-à-dire, dans l'équation B, on aura les deux équations: 1re, $-3ff + 3gg = \mp p$; d'où l'on déduit $ff - gg = \pm \frac{p}{3}$: 2e, $+2f^3 + 6ggf = +q$; d'où l'on déduit $f^3 + 3ggf = \frac{q}{2}$.

Réſolution des équations du troiſiéme degré, dont deux racines ſont imaginaires, lorſque la racine réelle eſt commenſurable.

92. SI l'on prend le quarré poſitif $4ff$ de la racine réelle, & qu'on lui ajoute $\mp p = -3ff + 3gg$, la ſomme ſera $ff + 3gg$. Si l'on diviſe $+q = 2f^3 + 6ggf$, par $ff + 3gg = 4ff \mp p$, le quotient ſera la racine réelle $2f$; d'où l'on déduit cette maniere de trouver la racine réelle, quand elle eſt commenſurable.

Il faut prendre un quarré poſitif, & ajouter $\mp p$ au quarré parfait qu'on a pris; c'eſt-à-dire, quand il y a $-p$, il faut ajouter $-p$ négatif au quarré; & quand il y a $+p$, il faut ajouter $+p$ poſitif au quarré. Il faut diviſer $+q$ par la ſomme qu'on vient de trouver; & ſi la diviſion ſe fait exactement,

ment, & que le quotient ſoit la racine du quarré qu'on a pris, c'eſt la racine réelle. Si l'on ne peut pas trouver un tel quarré, la racine réelle eſt incommenſurable. Voici la maniere de la trouver.

Si l'on éleve l'équation $ff - gg = \pm \frac{p}{3}$ à la 3ᵉ puiſſance, l'on aura $f^6 - 3ggf^4 + 3g^4ff - g^6 = \pm \frac{p^3}{27}$. Si l'on éleve auſſi l'équation $f^3 + 3ggf = \frac{q}{2}$ au quarré l'on aura $f^6 + 6ggf^4 + 9g^4ff = \frac{qq}{4}$. Si l'on ôte à preſent la premiere de ces deux équations de la ſeconde, l'on aura $+ 9ggf^4 + 6g^4ff + g^6 = \frac{qq}{4} \mp \frac{p^3}{27}$. Tirant la racine quarrée de chaque membre, on aura $3gff + g^3 = \sqrt{\frac{qq}{4} \mp \frac{p^3}{27}}$. Si l'on ajoute cette équation à l'équation $f^3 + 3ggf = \frac{q}{2}$, l'on aura $f^3 + 3gff + 3ggf + g^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{qq}{4} \mp \frac{p^3}{27}}$. Tirant la racine cubique de chaque membre, on aura.

$$f + g = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{qq}{4} \mp \frac{p^3}{27}}}.$$

Diviſant l'équation $ff - gg = \pm \frac{p}{3}$ par la précedente, le premier membre, par le premier membre, le ſecond par le ſecond, l'on aura pour quotient

$$f - g = \frac{\pm \frac{1}{3} p}{\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{qq}{4} \mp \frac{p^3}{27}}}}$$

Enfin ajoutant les deux équations qu'on vient de trouver, on aura la racine réelle $2f = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{qq}{4} \mp \frac{p^3}{27}}}$

$$+ \frac{\pm \frac{1}{3} p}{\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{qq}{4} \mp \frac{p^3}{27}}}}$$

Quand il y a $-px$ dans l'équation generale $x^3 - px + q = 0$, la grandeur $\frac{1}{3} p$ aura le ſigne $+$, & la grandeur $\frac{p^3}{27}$ aura le ſigne $-$.

Ainſi quand l'équation generale eſt $x^3 - px \pm q = 0$, la formule generale qui marque la racine réelle eſt

$$2f = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \frac{\frac{1}{3} p}{\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}}}}$$

Quand l'équation generale eſt $x^3 + px \pm q = 0$, la formule generale qui marque la racine réelle eſt.

$$2f = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}} - \frac{\frac{1}{3} p}{\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}}}$$

La grandeur $3gg$ qu'on a prise pour représenter la grandeur imaginaire, sera égale à $3ff \mp p$, car $-3ff + 3gg = \mp p$; ajoutant $+3ff$ à chaque membre, on aura $3ff - 3ff + 3gg = 3ff \mp p = 3gg$; ainsi $\sqrt{-3gg} = \sqrt{-3ff \pm p}$.

On déduit de là cette résolution.

Résolution des équations du troisiéme degré, dont deux racines sont imaginaires, lorsque la racine réelle est incommensurable.

93. QUAND l'équation generale est $x^3 - px \pm q = 0$, il faut ôter $\frac{p^3}{27}$ de $\frac{1}{4}qq$; & après avoir tiré la racine quarrée du reste, l'ajouter à $\frac{1}{2}q$, & tirer la racine cubique de sa somme, & ce sera la premiere partie de la racine réelle.

Il faut diviser p par le triple de la premiere partie de la racine, & ajouter le quotient à la premiere partie, & la somme sera la racine réelle $2f = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$

$$+ \frac{p}{3\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}}$$

Quand l'équation est $x^3 + px + q = 0$, on trouvera de même les deux parties de la racine réelle, excepté qu'on ajoutera $\frac{1}{27}p$ à $\frac{1}{4}qq$; mais on retranchera la seconde partie de la premiere, & l'on aura $2f = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$

$$- \frac{p}{3\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}}$$

Application du Problème à des Exemples.

EXEMPLE I.

POUR trouver la racine réelle de $x^3 - 1x + 6 = 0$, dont deux racines sont imaginaires, parceque $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{27}$, est moindre que $\frac{1}{4}qq = 9$; on prendra le quarré positif $+4$, & on lui ajoutera -1, & la somme sera $+3$: on divisera $q = 6$ par 3, & le quotient 2 étant la racine du quarré 4 qu'on a pris, c'est aussi la racine réelle de la proposée, qui est négative, parcequ'il y a une racine négative dans la proposée, puisqu'il y a $+6$ au dernier terme.

La grandeur imaginaire sera $\sqrt{-3+1} = \sqrt{-2}$.

EXEMPLE II.

POUR trouver la racine réelle de $x^3 + 2x - 12 = 0$, dont

les deux autres racines ſont imaginaires, le troiſiéme terme $+2x = +px$ ayant le ſigne $+$, on prendra le quarré parfait $+4$, auquel on ajoutera $+p = +2$; & l'on diviſera par la ſomme $+6$ le dernier terme $q = 12$, & le quotient 2 étant la racine du quarré 4 qu'on a pris, c'eſt auſſi la racine réelle de la propoſée, qui eſt $x = 2$.

La grandeur imaginaire eſt $\sqrt{-3-2} = \sqrt{-5}$.

EXEMPLE III.

POUR trouver la racine réelle de $x^3 - 6x - 16 = 0$, qui a deux racines imaginaires, parceque $\frac{1}{4}qq = 64$ ſurpaſſe $\frac{1}{27}p^3 = 8$; il faut ôter $\frac{1}{27}p^3 = 8$ de $\frac{1}{4}qq = 64$, & la racine quarrée du reſte 56 eſt $\sqrt{56}$. Il faut ajouter cette racine à $\frac{1}{2}q = 8$, & tirer la racine cubique de la ſomme, qui eſt $\sqrt[3]{8+\sqrt{56}}$, & elle ſera la premiere partie de la racine qu'on cherche. Il faut diviſer $p = 6$ par le triple de la premiere partie $3\sqrt[3]{8+\sqrt{56}}$, & le quotient $\frac{2}{\sqrt[3]{8+\sqrt{56}}}$, ſera la ſeconde partie de la racine réelle.

Ainſi la racine réelle eſt $x = \sqrt[3]{8+\sqrt{56}} + \frac{2}{\sqrt[3]{0+\sqrt{56}}}$.

La démonſtration de ce Problême eſt la même que du précedent, puiſque la méthode eſt la même.

COROLLAIRE.

QUAND la racine réelle eſt découverte, ſi l'on veut avoir les deux autres qui ſont imaginaires, il n'y a qu'à diviſer la propoſée par $x +$ ou $-$ la racine réelle qu'on a trouvée, mettant $+$ quand elle eſt négative, & $-$ quand elle eſt poſitive: Le quotient, qui ſera exact, ſera une équation du ſecond degré qui contiendra les deux autres racines qui ſont imaginaires.

Seconde méthode generale de réſoudre les équations du troiſiéme degré dont le ſecond terme eſt évanoui.

94. TOUTES les équations du troiſiéme degré, dont le ſecond terme eſt évanoui, peuvent ſe repréſenter par ces deux formules generales $x^3 - px + q = 0$, $x^3 + px \pm q = 0$; la ſeconde contient toujours deux racines imaginaires, * & une racine réelle, qui eſt poſitive, quand il y a $-q$, & né- *80.

gative, quand il y a $+q$. La premiere contient trois racines
*82. réelles, quand $\frac{1}{27}p^3$ surpasse $\frac{1}{4}qq$, * dont deux sont positives, & la troisiéme, qui est égale à leur somme, est négative, quand il y a $+q$; mais les deux moindres sont négatives, & la plus grande positive, quand il y a $-q$; & elle contient deux racines imaginaires & une réelle quand $\frac{1}{27}p^3$ est moin-
83. dre que $\frac{1}{4}qq$.

On supposera qu'une des racines est égale à $f+g$ pour la premiere formule, & à $f-g$ pour la seconde; & l'équation lineaire $x-f-g=0$, représentera une des trois équations lineaires, dont toute équation du 3e degré, que la premiere formule représente, est le produit.

L'équation lineaire $x-f+g=0$, servira pour la seconde formule.

On divisera la premiere équation generale $x^3-px\pm q=0$, par $x-f-g=0$; & la seconde $x^3+px\pm q=0$, par $x-f+g=0$; & on continuera la division jusqu'à ce qu'on ait un reste dans lequel x ne soit plus comme on le voit ici.

AVERTISSEMENT.
✗ *signifie que la grandeur où cette marque se trouve, est tranchée par une ligne.*

Pour la premiere formule.

✗ x^3	$-$ ✗ px	$\pm q$	($x-f-g$
$+$ ✗ fxx	$+$ ✗ ffx	$\mp pf$	$xx+fx-p$
$+$ ✗ gxx	$+$ ✗ $2fgx$	$-pg$	$+gx+ff$
	$+$ ✗ ggx	$+f^3$	$+2fg$
		$+3ffg$	$+gg$
		$+3fgg$	
		$+g^3$	

Pour la seconde formule.

✗ x^3	$+$ ✗ px	$\pm q$	($x-f+g$
$+$ ✗ fxx	$+$ ✗ ffx	$\mp pf$	$xx+fx+p$
$-$ ✗ gxx	$-$ ✗ $2fgx$	$-pg$	$-gx+ff$
	$+$ ✗ ggx	$+f^3$	$-2fg$
		$-3ffg$	$+gg$
		$+3fgg$	
		$-g^3$	

Il est évident que chaque quotient sera exact, & que le diviseur $x-f-g=0$, ou $x-f+g=0$, fera la division sans reste, en supposant chaque reste égal à zero.

Le premier peut ainsi s'exprimer $f^3+g^3+3fg\times\overline{f+g}-p\times\overline{f+g}\pm q=0$; & le second, $f^3-g^3+3fg\times-\overline{f+g}-p\times-\overline{f+g}\pm q=0$.

Pour déterminer chacune des deux indéterminées f & g, on fera deux équations particulieres de chaque reste, de

cette maniere. Pour le premier reſte ; 1re, $f^3 + g^3 \pm q = 0$; 2e, $+ 3fg \times \overline{f+g} - p \times \overline{f+g} = 0$; & pour le ſecond reſte, 1re, $f^3 - g^3 \pm q = 0$; 2e, $+ 3fg \times \overline{-f+g} - p \times \overline{-f+g} = 0$. Chacune des ſecondes équations donnera $3fg = p$, & $f = \frac{p}{3g}$, & $f^3 = \frac{p^3}{27g^3}$; ſubſtituant la valeur de f dans chacune des premieres équations, on aura pour le premier reſte $\frac{p^3}{27g^3} + g^3 \pm q = 0$, qui ſe réduit à $g^6 \pm qg^3 + \frac{p^3}{27} = 0$, qui eſt une équation du ſecond degré, dont les deux racines ſont $g^3 = \mp \frac{1}{2} q + \sqrt{\frac{1}{4} qq - \frac{1}{27} p^3}$, & $g^3 = \mp \frac{1}{2} q - \sqrt{\frac{1}{4} qq - \frac{1}{27} p^3}$; d'où l'on déduit pour abreger,

$$g = \sqrt[3]{\mp \frac{1}{2} q \pm \sqrt{\frac{1}{4} qq - \frac{1}{27} p^3}}.$$

Subſtituant de même la valeur de f^3 dans la premiere équation du ſecond reſte, on aura $\frac{p^3}{27g^3} - g^3 \pm q = 0$, qui ſe réduit à $- g^6 \pm qg^3 + \frac{1}{27} p^3 = 0$; & par tranſpoſition, $g^6 \mp qg^3 - \frac{1}{27} p^3 = 0$, qui eſt une équation du ſecond degré, dont les racines ſont $g^3 = \pm \frac{1}{2} q + \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}$; & $g^3 = \pm \frac{1}{2} q - \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}$; d'où l'on déduit pour abreger, $g = \sqrt[3]{\pm \frac{1}{2} q \pm \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}}$.

Il faut à preſent ſubſtituer la valeur de g^3, qui convient au premier reſte, dans la premiere équation $f^3 + g^3 \pm q = 0$; & l'on aura $f^3 \pm \frac{1}{2} q \pm \sqrt{\frac{1}{4} qq - \frac{1}{27} p^3} = 0$; d'où l'on déduit $f = \sqrt[3]{\mp \frac{1}{2} q \mp \sqrt{\frac{1}{4} qq - \frac{1}{27} p^3}}$.

Il faut de même ſubſtituer la valeur de g^3, qui convient au ſecond reſte dans la premiere équation du ſecond reſte $f^3 - g^3 \pm q = 0$; & l'on aura $f^3 \pm \frac{1}{2} q \mp \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3} = 0$; d'où l'on déduit $f = \sqrt[3]{\mp \frac{1}{2} q \pm \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}}$.

Les deux indéterminées f & g étant connues, la racine qu'on cherche eſt connue, qui eſt pour la premiere équation $x^3 - px \pm q = 0$, $x = f + g = \sqrt[3]{\mp \frac{1}{2} q \mp \sqrt{\frac{1}{4} qq - \frac{1}{27} p^3}} + \sqrt[3]{\mp \frac{1}{2} q \pm \sqrt{\frac{1}{4} qq - \frac{1}{27} p^3}}$.

Pour la ſeconde équation $x^3 + px \pm q = 0$, la racine $x = + f - g = \sqrt[3]{\mp \frac{1}{2} q \pm \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}} - \sqrt[3]{\pm \frac{1}{2} q \pm \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}}$.

Quand une des racines eſt découverte, les deux quotiens

qu'on a trouvez en faisant les divisions de la premiere & de la seconde formule, seront chacun une équation du second degré, laquelle après y avoir substitué les valeurs de f & de g, contiendra les deux autres racines, dont on trouvera les formules en résolvant ces deux équations du second degré, sans en ôter les indéterminées f & g.

On trouveroit les formules de l'*art.* 93, de la valeur de x, qui est ici $= f \pm g$, si on substituoit la valeur de $g^3 = \frac{p^3}{27f^3}$, qui se tire de $f = \frac{p}{3g}$, changée en $g = \frac{p}{3f}$, dans $f^3 \pm g^3 \pm q = 0$, & ensuite la valeur de f, qu'on en déduiroit, dans $g = \frac{p}{3f}$.

DÉMONSTRATION.

LA méthode fait trouver des valeurs de f & de g, qui sont telles, qu'après les avoir substituées dans l'équation lineaire $x - f - g = 0$, ou $x - f + g = 0$, cette équation lineaire ainsi changée est un diviseur exact de la proposée, puisque le reste de la division est zero; elle fait donc trouver une racine de la proposée.*

* 33.

Application du Problème à des exemples.

EXEMPLE I.

POUR trouver par cette méthode une racine de l'équation $x^3 - 7x + 6 = 0$, représentée par la formule $x^3 - px + q = 0$, dont les trois racines sont réelles, puisque $\frac{1}{27}p^3 = \frac{343}{27}$ surpasse $\frac{1}{4}qq = 9$; on se servira de la formule $x = f + g = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$, dans laquelle mettant les valeurs de p, q, la racine sera $x = \sqrt[3]{-3 - \sqrt{-\frac{100}{27}}} + \sqrt[3]{-3 + \sqrt{-\frac{100}{27}}}$; parceque $\frac{1}{4}qq = 9 = \frac{243}{27}$, & $\frac{1}{27}p^3 = \frac{343}{27}$; ainsi $\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3 = \frac{243}{27} - \frac{343}{27} = -\frac{100}{27}$.

On verra dans les remarques la maniere de débarasser la racine réelle qu'on vient de trouver, des expressions imaginaires & incommensurables, lorsqu'elle est commensurable.

Comme la formule $x = f + g = \sqrt[3]{\mp\frac{1}{2}q \mp \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{\mp\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{2}p^3}}$ est double, & qu'elle se réduit à ces deux formules: 1re, $x = f + g = \sqrt[3]{\mp\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{\mp\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$;

Seconde, $x = f + g = \sqrt[3]{\mp \frac{1}{2} q + \sqrt{\frac{1}{4} qq - \frac{1}{27} p^3}}$ $+ \sqrt[3]{\mp \frac{1}{2} q - \sqrt{\frac{1}{4} qq - \frac{1}{27} p^3}}$; Il eſt libre de prendre laquelle on voudra, en remarquant que s'il y avoit dans la propoſée $- q$, il faudroit mettre dans chacune $+ \frac{1}{2} q$, au lieu de $- \frac{1}{2} q$.

EXEMPLE II.

POUR trouver par cette méthode la racine réelle de l'équation $x^3 - 1x + 6 = 0$, dont deux racines ſont imaginaires, puiſque $\frac{1}{27} p^3 = \frac{1}{27}$ eſt moindre que $\frac{1}{4} qq = 9$; on ſuppoſera que cette équation eſt repréſentée par $x^3 - px + q = 0$; ainſi la formule de la racine eſt $x = f + g = \sqrt[3]{- \frac{1}{2} q - \sqrt{\frac{1}{4} qq - \frac{1}{27} p^3}} + \sqrt[3]{- \frac{1}{2} q + \sqrt{\frac{1}{4} qq - \frac{1}{27} p^3}}$; on ſubſtituera les valeurs de p, q, dans cette formule, & on trouvera la racine $x = \sqrt[3]{- 3 - \sqrt{\frac{242}{27}}} + \sqrt[3]{- 3 + \sqrt{\frac{242}{27}}}$.

EXEMPLE III.

POUR trouver la racine réelle de l'équation $x^3 + 2x - 12 = 0$, dont deux ſont imaginaires, puiſqu'il y a $+ px$, on ſuppoſera que cette équation eſt repréſentée par $x^3 + px - q = 0$; ainſi la formule de la racine eſt $x = f - g = \sqrt[3]{+ \frac{1}{2} q + \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}} - \sqrt[3]{- \frac{1}{2} q + \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}}$; on ſubſtituera les valeurs de p, q, dans cette formule, & on trouvera la racine $x = \sqrt[3]{6 + \sqrt{\frac{980}{27}}} - \sqrt[3]{- 6 + \sqrt{\frac{980}{27}}}$.

REMARQUES.

I.

IL faut bien remarquer, ſur les ſignes des formules de la racine, 1°. que chaque équation generale $x^3 - px \pm q = 0$, $x^3 + px \pm q = 0$, marquant deux formules, la premiere où il y a $+ q$, la ſeconde où il y a $- q$, le premier des deux ſignes qui précede $\frac{1}{2} q$ dans la formule de la racine, a raport au premier ſigne $+ q$ de chacune des deux équations generales; & le ſecond a raport au ſecond ſigne $- q$ de chacune des équations generales.

Ainſi quand il y a $\mp \frac{1}{2} q$ dans la formule de la racine, cela veut dire que quand il y a $+ q$ dans l'équation, il doit y avoir $- \frac{1}{2} q$ dans la formule de la racine; & quand il y a

$-q$ dans l'équation, il doit y avoir $+\frac{1}{2}q$ dans la racine ; & ainsi des autres.

Il faut bien remarquer, 2°. qu'il y a deux signes qui précedent dans la formule de la racine, la grandeur $\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}$, & $\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$. Cela vient de ce qu'il a fallu résoudre une équation du second degré, pour avoir les valeurs de f^3 & de g^3, & par consequent de f & de g : ainsi la résolution donne deux valeurs de f, & deux valeurs de g. On les a jointes ensemble pour abreger, & c'est ce qui est cause que les deux signes $\pm$ precédent la grandeur $\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}$, ou $\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$; le premier de ces deux signes marque la premiere valeur de f ou de g, & le second marque la deuxiéme valeur.

Dans l'usage il faut observer, si l'on se sert du premier signe dans la valeur de f, de se servir aussi du premier signe dans celle de g ; & si l'on se sert du second signe dans la valeur de f, de se servir du second signe dans la valeur de g ; parceque ce sont ces valeurs qui ont raport l'une à l'autre.

I I.

Quand les trois racines sont réelles ; c'est-à-dire, quand il y a $-p$ dans l'équation, & que $\frac{1}{27}p^3$ surpasse $\frac{1}{4}qq$, il est évident que l'expression de la racine réelle contient une imaginaire dans chaque partie de la formule de la racine : Ainsi quand les trois racines sont réelles, l'expression de la racine qu'on cherche contient des grandeurs imaginaires.

Cela fait voir que cette méthode n'est d'usage que pour les équations où il y a deux racines imaginaires ; car dans ce cas l'expression de la racine réelle contient des grandeurs qui sont toutes réelles, & aucunes imaginaires.

Il y a encore cet inconvenient, que quand la racine qu'on cherche est commensurable, on ne la trouve que sous une expression incommensurable ; ainsi dans ce cas, il est bien plus court de se servir des méthodes du second & troisiéme Problême.

Cependant quand la racine qu'on cherche est commensurable, quoiqu'elle soit exprimée sous une forme incommensurable, & qui contient même des imaginaires quand les trois racines sont réelles, on peut réduire son expression incommensurable

incommenſurable à une grandeur commenſurable, par la méthode ſuivante, & trouver la racine commenſurable.

Méthode pour changer l'expreſſion incommenſurable de la racine réelle qu'on a trouvée par la méthode précedente, en une autre expreſſion commenſurable, lorſque la racine qu'on a trouvée eſt commenſurable.

96. ON a trouvé dans le premier exemple qu'une racine réelle de $x^3 - 7x + 6 = 0$, étoit $x = \sqrt[3]{-3 - \sqrt{-\frac{100}{27}}} + \sqrt[3]{-3 + \sqrt{-\frac{100}{27}}}$: Pour changer cette expreſſion incommenſurable, & qui contient des grandeurs imaginaires, en une autre toute commenſurable, on ſuppoſera $-h - \sqrt{-i} = \sqrt[3]{-3 - \sqrt{-\frac{100}{27}}}$, & $-h + \sqrt{-i} = \sqrt[3]{-3 + \sqrt{-\frac{100}{27}}}$.

On élevera chaque membre à la troiſiéme puiſſance; & pour ôter toute confuſion, on fera l'operation pour la ſeule premiere partie $-h - \sqrt{-i} = \sqrt[3]{-3 - \sqrt{-\frac{100}{27}}}$. Elevant chaque membre à la troiſiéme puiſſance, on aura $-h^3 - 3hh\sqrt{-i} + 3hi + i\sqrt{-i} = -3 - \sqrt{-\frac{100}{27}}$.

On ſuppoſera les grandeurs commenſurables $-h^3 + 3hi$ égales à la grandeur commenſurable -3, & les grandeurs incommenſurables $-3hh\sqrt{-i} + i\sqrt{-i}$ égales à la grandeur incommenſurable $-\sqrt{-\frac{100}{27}}$; & l'on aura les deux équations ſuivantes: 1re, $-h^3 + 3hi = -3$; 2e, $-3hh\sqrt{-i} + i\sqrt{-i} = -\sqrt{-\frac{100}{27}}$.

On élevera chacune au quarré, & l'on aura $h^6 - 6h^4i + 9hhii = +9$, $-9h^4i + 6hhii - i^3 = -\frac{100}{27}$.

On ôtera la ſeconde équation de la premiere, & l'on aura $h^6 + 3h^4i + 3hhii + i^3 = 9 + \frac{100}{27} = \frac{343}{27}$.

On tirera la racine cubique de chaque membre, & l'on aura $hh + i = \frac{7}{3}$, d'où l'on déduit $i = \frac{7}{3} - hh$.

On mettra cette valeur de i dans la premiere équation $-h^3 + 3hi = -3$, & l'on aura $-h^3 + 7h - 3h^3 = -3$, qui ſe réduit à $4h^3 - 7h - 3 = 0$, d'où l'on déduit $h^3 - \frac{7}{4}h - \frac{3}{4} = 0$.

Pour ôter les fractions, on ſuppoſera $h = \frac{y}{4}$, & l'on aura la transformée $y^3 - 28y - 48 = 0$.

On résoudra cette équation par le second Problême; c'est-à-dire, on prendra le quarré 36 plus grand que 28, & après en avoir ôté 28, on divisera le dernier terme 48 par le reste 8, & le quotient 6 étant la racine du quarré qu'on a pris, est aussi la racine de l'équation $y^3 - 28y - 48 = 0$; ainsi $y = 6$.

Substituant cette valeur dans $h = \frac{y}{4}$, l'on aura $h = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, d'où l'on déduira $hh = \frac{9}{4}$.

On substituera cette valeur dans $i = \frac{7}{3} - hh$, & l'on aura $i = \frac{7}{3} - \frac{9}{4} = \frac{1}{12}$.

Par consequent $-h - \sqrt{-i} = -\frac{3}{2} - \sqrt{-\frac{1}{12}} = \sqrt[3]{-3 - \sqrt{-\frac{100}{27}}}$, qui est la premiere partie de la racine de la proposée.

On trouvera par une semblable operation que $-h + \sqrt{-i} = \sqrt[3]{-3 + \sqrt{-\frac{100}{27}}}$, est égale à $-\frac{3}{2} + \sqrt{-\frac{1}{12}}$, & c'est la seconde partie de la racine de la proposée.

On ajoutera ces deux parties, & l'on aura la racine qu'on avoit trouvée sous la forme incommensurable $x = \sqrt[3]{-3 - \sqrt{-\frac{100}{27}}} + \sqrt[3]{-3 + \sqrt{-\frac{100}{27}}} = -\frac{6}{2} = -3$. *Ce qui étoit proposé.*

On trouvera de même dans le second exemple $x^3 - 1x + 6 = 0$, que la racine réelle qu'on a découverte, $x = \sqrt[3]{-3 - \sqrt{\frac{242}{27}}} + \sqrt[3]{-3 + \sqrt{\frac{242}{27}}}$, est égale à $-1 - \sqrt{\frac{2}{3}} - 1 + \sqrt{\frac{2}{3}} = -2$.

Pour le trouver par une operation semblable à la précedente, on supposera que $-h - \sqrt{g}$ est égale à la premiere partie de la racine $\sqrt[3]{-3 - \sqrt{\frac{242}{27}}}$; & $-h + \sqrt{g}$ est égale à la seconde partie $\sqrt[3]{-3 + \sqrt{\frac{242}{27}}}$; & en faisant l'operation comme ci-dessus, on trouvera les deux parties de la racine qu'on vient de marquer, qui étant ajoutées ensemble, font la racine $x = -2$.

On trouvera de même dans le troisiéme exemple $x^3 + 2x - 12 = 0$, que la racine réelle qu'on a découverte, $x = \sqrt[3]{6 + \sqrt{\frac{980}{27}}} - \sqrt[3]{-6 + \sqrt{\frac{980}{27}}}$, est égale à $+1 + \sqrt{\frac{5}{3}} + 1 - \sqrt{\frac{5}{3}} = +2$. On le trouvera, dis-je, en supposant $h + \sqrt{i} = \sqrt[3]{6 + \sqrt{\frac{980}{27}}}$, & $-h + \sqrt{i} = -\sqrt[3]{-6 + \sqrt{\frac{980}{27}}}$, & faisant l'operation comme ci-dessus.

On peut s'aſſurer que la méthode qu'on vient de donner réuſſira toujours, quand la racine réelle de la propoſée eſt commenſurable, en appliquant la méthode à la formule generale de la racine, qui eſt, par exemple,

$x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$: car en ſuppoſant pour la premiere partie de la racine $-h - \sqrt{-i} = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$, on aura $-h^3 - 3hh\sqrt{-i} + 3hi + i\sqrt{-i} = -\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$; d'où l'on déduira, 1°. $-h^3 + 3hi = -\frac{1}{2}q$, & $h^6 - 6h^4i + 9hhii = \frac{1}{4}qq$; d'où l'on déduira, 2°. $-3hh\sqrt{-i} + i\sqrt{-i} = -\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$, & $-9h^4i + 6hhii - i^3 = \frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3$; ôtant la ſeconde de la premiere, on aura $h^6 + 3h^4i + 3hhii + i^3 = +\frac{1}{27}p^3$; donc $hh + i = \frac{1}{3}p$, & $i = \frac{1}{3}p - hh$: ſubſtituant cette valeur de i dans la premiere $-h^3 + 3hi = -\frac{1}{2}q$, on aura $-h^3 + ph - 3h^3 = -\frac{1}{2}q$, qui ſe réduit à $h^3 - \frac{p}{4}h - \frac{1}{8}q = 0$.

Suppoſant à preſent $h = \frac{y}{4}$, l'équation $h^3 - \frac{p}{4}h - \frac{1}{8}q = 0$, ſera transformée en $y^3 - 4py - 8q = 0$.

Mais ſi la propoſée $x^3 - px + q = 0$, ou $x^3 - px - q = 0$, (cette derniere n'étant que la premiere, * dont la plus grande racine poſitive eſt la racine négative de la premiere, & les deux autres négatives ſont les poſitives de la premiere:) Si, dis-je, l'équation $x^3 - px - q = 0$, a ſa plus grande racine commenſurable, la plus grande racine de $y^3 - 4py - 8q = 0$, doit auſſi être commenſurable; car il eſt évident que $y^3 - 4py - 8q = 0$, eſt la transformée de $x^3 - px - q = 0$; & que les racines de la premiere ſont les racines de la ſeconde multipliées par 2; ainſi $2x = y$, ou $x = \frac{y}{2}$: On trouvera donc la racine commenſurable de $y^3 - 4py - 8q = 0$, par le ſecond Problême; & par conſequent on aura $h = \frac{y}{4} = \frac{x}{2}$, & $i = \frac{1}{3}p - hh$.

* 30. dans le Cor.

En ſuppoſant pour la ſeconde partie de la racine, $+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$, que $-h + \sqrt{-i} = +\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$; & faiſant la même operation qu'on a faite pour la premiere partie, on trouvera l'équation

$h^3 - \frac{p}{4}h - \frac{1}{8}q = 0$; & ſuppoſant $h = \frac{y}{4}$, on aura la même transformée $y^3 - 4py - 8q = 0$, dont la racine ſera commenſurable, ſi x eſt commenſurable dans $x^3 - px - q = 0$, puiſque $y = 2x$: Ainſi on trouvera par le ſecond Problême la valeur commenſurable de y.

On aura donc encore $h = \frac{y}{4} = \frac{x}{2}$, & $i = \frac{1}{3}p - hh$.

Les deux parties $-h - \sqrt{-i}$, $-h + \sqrt{-i}$, qu'on trouve par les operations précedentes, ſont donc $-2h = -\frac{2x}{2} = -x$; car les deux valeurs qu'on trouve de $-\sqrt{-i}$, $+\sqrt{-i}$, ſe détruiſent par des ſignes oppoſez.

On peut appliquer le même raiſonnement aux autres formules generales de la racine.

D'où l'on voit, que dans le cas où les trois racines de l'équation ſont réelles & incommenſurables, on ne ſçauroit dégager la racine réelle des expreſſions incommenſurables & imaginaires.

Troiſiéme méthode generale pour réſoudre par transformation les équations du troiſiéme degré, dont le ſecond terme eſt évanoui.

97. ON ſuppoſera que toutes les équations du troiſiéme degré ſont repréſentées par ces deux formules $x^3 - px \pm q = 0$, $x^3 + px \pm q = 0$.

On ſuppoſera pour transformer la premiere $x = y + \frac{f}{y} = \frac{yy + f}{y}$; & pour transformer la ſeconde $x = y - \frac{f}{y} = \frac{yy - f}{y}$; y ſera l'inconnue de la transformée, & f une indéterminée.

On ſubſtituera dans la premiere, à la place de x, x^3, les valeurs de x & x^3, & l'on aura la transformée de la premiere

$$x^6 + 3fy^4 \mp qy^3 + 3ffyy + f^3 = 0.$$
$$\quad - py^4 \qquad\quad - pfyy$$

On ſubſtituera de même les valeurs de x & x^3 dans la ſeconde $x^3 + px \pm q = 0$, & l'on aura la transformée de la ſeconde $y^6 - 3fy^4 \mp qy^3 + 3ffyy - f^3 = 0$.
$$\quad + py^4 \qquad\quad - pfyy$$

On ſuppoſera dans chacune, pour déterminer l'indéterminée f, que le ſecond terme eſt égal à zero; & l'on aura pour l'une & l'autre $3f = p$, ou $f = \frac{p}{3}$, & $f^3 = \frac{p^3}{27}$; d'où il s'enſuivra que le quatriéme terme $+ 3ffyy - pfyy = 0$, puiſque $p = 3f$.

Subſtituant la valeur de f dans chaque transformée, la premiere ſera $y^6 \mp qy^3 + \frac{1}{27}p^3 = 0$, & la ſeconde ſera $y^6 \mp qy^3 - \frac{1}{27}p^3 = 0$.

On réſoudra ces deux transformées, qui ne ſont que du ſecond degré ; & après avoir trouvé les valeurs de y par leur moyen, on ſubſtituera ces valeurs dans les équations ſuppoſées $x = y + \frac{f}{y}$, $x = y - \frac{f}{y}$, ſelon qu'elles leur conviennent, & après la ſubſtitution on aura la valeur de x, ou la formule generale d'une racine de la propoſée.

Cette méthode eſt démontrée par la démonſtration des transformations,* mais elle a les inconveniens de la précedente, qui ſont de donner dans le cas où les racines ſont toutes réelles & incommenſurables, la valeur de la racine qu'on cherche, avec des expreſſions imaginaires, & avec des expreſſions incommenſurables, lorſqu'elle eſt commenſurable.

* 36, 9ᵉ *Transformation.*

AVERTISSEMENT.

98. SI l'on vouloit une formule generale qui exprimât la racine d'une équation qui auroit tous ſes termes, comme $x^3 \pm nxx \pm px \pm q = 0$, on pourroit la trouver de cette maniere.

On feroit évanouir le ſecond terme de l'équation generale qui précede, en ſuppoſant $x = y \mp \frac{1}{3}n$. L'on chercheroit par la ſeconde méthode generale la formule qui exprime la racine de la transformée : & après l'avoir trouvée, il eſt évident qu'en mettant au-devant de cette formule de la racine de la transformée, la grandeur $\mp \frac{1}{3}n$, on auroit la formule de la racine de la propoſée égale à x.

Mais cette formule auroit les mêmes inconveniens que celle de la ſeconde méthode, à l'égard des équations dont les racines ſont commenſurables, & de celles dont toutes les racines ſont réelles & incommenſurables ; & elle ne ſerviroit que pour les équations qui auroient deux racines imaginaires, & une réelle.

SECTION III.

De la résolution des équations du quatriéme degré.

PROBLÊME IV.

99. *DISTINGUER parmi les équations du quatriéme degré, celles qui ont des racines égales, & trouver ces racines égales.*

AVERTISSEMENT.

QUAND une équation du quatriéme degré a des racines égales, elle peut les avoir toutes quatre, ou ſeulement trois, ou enfin ſeulement deux; & quand elle n'en a que deux égales, les deux autres peuvent être réelles ou imaginaires.

Premier cas quand les quatre racines ſont égales.

1°. ON fera évanouir le ſecond terme de l'équation ſi elle en a un, & on ſuppoſera que l'équation eſt repréſentée par l'équation generale $x^4 + pxx + qx + r = 0$.

2°. On ſuppoſera que chaque racine égale eſt repréſentée par l'indéterminée f; ainſi les équations lineaires ſeront $x - f = 0$, $x - f = 0$, $x + f = 0$, $x + f = 0$, & leur produit ſera $x^4 - 2ffxx + f^4 = 0$; d'où l'on voit que quand il y a quatre racines égales, & qu'il n'y a pas de ſecond terme, deux doivent être poſitives & deux négatives; que le troiſiéme terme a le ſigne $-$; qu'il n'y a pas de quatriéme terme; & que le cinquiéme terme a toujours $+$: ainſi l'équation eſt $x^4 - pxx + r = 0$.

3°. On comparera les termes du produit avec les termes correſpondans de l'équation; & l'on aura $2ff = p$, $f^4 = r$; d'où l'on déduit $ff = \frac{p}{2}$, & $f^4 = \frac{pp}{4}$; par conſequent $\frac{pp}{4} = r$.

Ainſi l'on connoîtra que les quatre racines ſont égales, quand $\frac{pp}{4} = r$; & de plus l'équation ne ſera que du ſecond degré: chaque racine ſera $x = f = \sqrt{\frac{p}{2}}$, ou $x = f = \sqrt[4]{r}$.

Second cas quand trois racines ſont égales.

ON ſuppoſera de même le ſecond terme évanoui, & que chaque racine égale eſt repréſentée par f; & ſi les trois

ſont poſitives, leur produit ſera $x^3 - 3fxx + 3ffx - f^3 = 0$, ſi elles ſont négatives, leur produit ſera $x^3 + 3fxx + 3ffx + f^3 = 0$. Il faudra multiplier le premier par $x + 3f = 0$, & le ſecond par $x - 3f = 0$; & l'on aura le produit $x^4 - 6ffxx + 8f^3x - 3f^4 = 0$, quand les trois racines égales ſont poſitives; & $x^4 - 6ffxx - 8f^3x - 3f^4 = 0$, quand elles ſont négatives; & l'équation generale pour l'un & l'autre cas, ſera $x^4 - pxx \pm qx - r = 0$.

On comparera les termes de chaque produit avec ceux de l'équation generale qui leur répondent, & l'on aura les trois équations ſuivantes : 1re, $6ff = p$; 2e, $8f^3 = q$; 3e, $3f^4 = r$.

L'on déduira de la 1re $ff = \frac{p}{6}$, & $f^4 = \frac{pp}{36}$; de la ſeconde, $f^3 = \frac{q}{8}$; de la troiſiéme $f^4 = \frac{r}{3}$.

Ainſi quand trois racines ſont égales, $\frac{pp}{36} = \frac{r}{3}$, ou $\frac{pp}{12} = r$; & la racine égale ſera $x = f = \sqrt{\frac{p}{6}}$, ou $x = f = \sqrt[4]{\frac{r}{3}}$.

Troiſiéme cas quand deux racines ſont égales.

ON ſuppoſera toujours le ſecond terme évanoui, & que chaque racine égale eſt repréſentée par f; ainſi les deux équations lineaires des racines égales, quand elles ſeront poſitives; ſeront $x - f = 0$, $x - f = 0$, & leur produit ſera $xx - 2fx + ff = 0$; & quand elles ſeront négatives, leur produit ſera $xx + 2fx + ff = 0$.

Les deux équations des deux racines inégales ſeront $x + f - h = 0$, $x + f + h = 0$, quand elles ſeront toutes deux négatives, & alors f ſurpaſſera h; & ſi l'une eſt poſitive & l'autre négative, h ſurpaſſera f; & leur produit ſera

$$xx + 2fx + \begin{matrix} ff \\ -hh \end{matrix} = 0.$$

Mais ſi elles ſont poſitives, les équations lineaires ſeront $x - f - h = 0$, $x - f + h = 0$, & f ſurpaſſera h; ou ſi l'une eſt poſitive & l'autre négative, h ſurpaſſera f; & leur produit ſera

$$xx - 2fx + \begin{matrix} ff \\ -hh \end{matrix} = 0.$$

Quand les deux racines differentes des deux racines égales ſeront imaginaires, leurs équations lineaires ſeront $x - f - \sqrt{-hh} = 0$, $x - f + \sqrt{-hh} = 0$, & leur produit ſera

$$xx - 2fx + \begin{matrix} ff \\ +hh \end{matrix} = 0;$$

ou bien; ſi on les conçoit négati-

ves, elles seront $x + f - \sqrt{-hh} = 0$, $x + f + \sqrt{-hh} = 0$; & leur produit sera $xx + 2fx + \begin{matrix} ff \\ +hh \end{matrix} = 0$.

On multipliera l'équation des deux racines égales par l'équation des deux autres racines réelles, propre à faire évanouir le second terme du produit; c'est-à-dire, $xx - 2fx + ff = 0$, par $xx + 2fx + \begin{matrix} ff \\ -hh \end{matrix} = 0$; & $xx + 2fx + ff = 0$, par $xx - 2fx + \begin{matrix} ff \\ -hh \end{matrix} = 0$; & l'on aura le produit $x^4 \begin{matrix} -2ffxx \\ -hhxx \end{matrix} + 2fhhx + \begin{matrix} f^4 \\ -ffhh \end{matrix} = 0$, lorsque les deux racines égales seront positives : On aura le produit $x^4 \begin{matrix} -2ffxx \\ -hhxx \end{matrix} - 2fhhx \begin{matrix} +f \\ -ffhh \end{matrix} = 0$, lorsque les deux racines égales seront négatives.

L'équation generale sera dans le premier cas $x^4 - pxx + qx \pm r = 0$, & dans le second cas $x^4 - pxx - qx \pm r = 0$.

On comparera les termes de chaque produit avec ceux de l'équation generale qui leur répondent, ce qui donnera les trois équations particulieres qui suivent : 1re, $2ff + hh = p$; 2e, $2fhh = q$; 3e, $f^4 - ffhh = \pm r$. La premiere donnera $hh = p - 2ff$: Substituant cette valeur de hh dans la troisiéme, on aura $f^4 - pff + 2f^4 = \pm r$, qui se réduit à $f^4 - \frac{p}{3}ff \mp \frac{r}{3} = 0$: Et résolvant cette équation du second degré, on aura les deux valeurs de ff, sçavoir $ff = \frac{p}{6} + \sqrt{\frac{pp}{36} \pm \frac{r}{3}}$, $ff = \frac{p}{6} - \sqrt{\frac{pp}{36} \pm \frac{r}{3}}$; d'où l'on déduira $f = \sqrt{\frac{p}{6} \pm \sqrt{\frac{pp}{36} \pm \frac{r}{3}}}$.

D'où l'on déduit la maniere de connoître si une équation du quatriéme degré, dont toutes les racines sont réelles, a deux racines égales, & le moyen de les trouver : car l'équation lineaire qui contient la racine égale sera $x \mp f = x \mp \sqrt{\frac{p}{6} \pm \sqrt{\frac{pp}{36} \pm \frac{r}{3}}} = 0$.

Dans l'usage il faudra substituer les grandeurs de l'équation proposée dans la formule $x \mp \sqrt{\frac{p}{6} \pm \sqrt{\frac{pp}{36} \pm \frac{r}{3}}} = 0$, & ensuite diviser la proposée par cette équation lineaire ainsi changée; & si la division est exacte, la proposée aura deux

deux racines égales, que l'on aura à même temps trouvées. Les deux autres racines se trouveront ensuite facilement.

Quand les deux racines differentes des deux racines égales seront imaginaires, on multipliera l'équation des deux racines égales par l'équation des deux imaginaires propre à faire évanouir le second terme du produit; c'est-à-dire, on multipliera $xx - 2fx + ff = 0$, par $xx + 2fx \begin{array}{l}+ff\\+hh\end{array} = 0$, & $xx + 2fx + ff = 0$, par $xx - 2fx \begin{array}{l}+ff\\+hh\end{array} = 0$; & l'on aura le produit $x^4 \begin{array}{l}-2ffxx\\+hhxx\end{array} - 2fhhx \begin{array}{l}+f^4\\+ffhh\end{array} = 0$, quand les deux racines égales seront positives: on aura le produit $x^4 \begin{array}{l}-2ffxx\\+hhxx\end{array} + 2fhhx \begin{array}{l}+f^4\\+ffhh\end{array} = 0$, quand les deux racines égales seront négatives: & comme hh peut être moindre que $2ff$, ou surpasser $2ff$, le troisiéme terme pourra avoir $+$ ou $-$, selon que l'un ou l'autre arrivera.

L'équation generale, lorsque les deux racines égales seront positives, sera $x^4 \pm pxx - qx + r = 0$; & $x^4 \pm pxx + qx + r = 0$, quand elles seront négatives.

On comparera les termes de chaque produit avec les termes correspondans de l'équation generale, & l'on aura les trois équations particulieres qui suivent: 1re, $-2ff + hh = \pm p$; 2e, $2fhh = q$, 3e, $f^4 + ffhh = +r$.

La premiere donnera $hh = \pm p + 2ff$: substituant cette valeur de hh dans la troisiéme, l'on trouvera $f^4 \pm pff + 2f^4 = r$, qui se réduit à $f^4 \pm \frac{p}{3} ff - \frac{r}{3} = 0$; & résolvant cette équation du second degré, on trouvera ces deux valeurs de ff, sçavoir $ff = \mp \frac{p}{6} + \sqrt{\frac{pp}{36} + \frac{r}{3}}$, $ff = \mp \frac{p}{6} - \sqrt{\frac{pp}{36} + \frac{r}{3}}$: il y aura $-\frac{p}{6}$, quand la proposée aura $+pxx$; & il y aura $+\frac{p}{6}$, quand la proposée aura $-pxx$.

L'on déduira de ces équations $f = \sqrt{\mp \frac{p}{6} \pm \sqrt{\frac{pp}{36} + \frac{r}{3}}}$; par consequent l'équation lineaire $x \mp f = 0$, deviendra $x \mp \sqrt{\mp \frac{p}{6} \pm \sqrt{\frac{pp}{36} + \frac{r}{3}}} = 0$.

Dans l'usage, pour connoître si une équation proposée contient deux racines égales, & les deux autres imaginaires,

on remarquera, 1°. que quand le ſecond terme eſt évanoui, & qu'il y a $+ p$, il y a des racines imaginaires dans l'équa-
* 29. tion : * mais il y en peut auſſi avoir quoiqu'il y ait $- pxx$.
13[e] Cor. 2°. On ſubſtituera les grandeurs de la propoſée, repréſentées par p, r, à leur place dans l'équation lineaire $x \mp \sqrt{\mp \frac{p}{6} \pm \sqrt{\frac{pp}{36} + \frac{r}{3}}} = 0$; & on diviſera la propoſée par l'équation lineaire qui viendra de la ſubſtitution : ſi la diviſion ſe fait ſans reſte, la propoſée contient deux racines égales chacune à celle que contient l'équation lineaire, & les deux autres ſont imaginaires.

Comme ce Problême eſt facile à concevoir, il eſt inutile d'en rapporter ici des exemples.

La démonſtration eſt la même que celle dont on s'eſt ſervi pour démontrer le ſecond Problême.

PROBLÊME V.

100. *RESOUDRE les équations du quatriéme dégré, c'eſt-à-dire, en trouver les quatre racines.*

Pour abreger le calcul, on ſuppoſera que le ſecond terme eſt évanoui.

I. *Lorſque toutes les racines ſont commenſurables, ou qu'il y en a quelqu'une.*

LA méthode generale du premier Problême du quatriéme Livre eſt la plus courte ; c'eſt-à-dire, il faut diviſer l'équation par l'inconnue x lineaire plus ou moins chaque diviſeur du dernier terme de la propoſée ; & lorſque la propoſée aura ſes racines commenſurables, on les trouvera toujours par cette méthode, c'eſt-à-dire, on trouvera toujours les équations lineaires de $x +$ ou $-$ un diviſeur du dernier terme, qui diviſeront exactement la propoſée ; & ſi l'on ne trouve aucune de ces équations lineaires qui diviſe exactement la propoſée, elle n'aura aucune racine commenſurable : ſi elle n'en avoit qu'une de commenſurable, en diviſant la propoſée par l'équation lineaire qui contient cette racine, on réduiroit la propoſée à une équation du troiſiéme degré, qu'on réſoudroit par les Problêmes de la Section précedente.

AVERTISSEMENT.

LORSQU'UNE équation du quatriéme degré n'a aucune de ſes racines commenſurables, on la peut concevoir comme compoſée de deux équations, dont chacune eſt du ſecond degré, & ſuppoſant que $xx + fx + g = 0$, repréſente l'une de ces deux équations ; ou bien le coëficient du ſecond terme repréſenté par f, ſera commenſurable ; ou bien le dernier terme repréſenté par g, ſera commenſurable ; ou bien enfin l'un & l'autre ſeront incommenſurables. On va donner la méthode de trouver dans le premier cas, le coëficient repréſenté par f, & le dernier terme repréſenté par g ; comme auſſi de les trouver dans le ſecond & troiſiéme cas, quand les réduites où l'on arrivera dans ces cas, ne ſeront pas compriſes dans le cas irréductible du troiſiéme degré ; & l'on aura une des équations du ſecond degré, dont la propoſée eſt compoſée. La méthode qu'on va donner, fera trouver à même temps l'autre équation du ſecond degré, qui avec la précedente, compoſe la propoſée. Il ne faudra plus que réſoudre chacune de ces équations du ſecond degré par le premier Problême, & l'on aura les quatre racines de la propoſée.

II. *Lorſque le coëficient du ſecond terme d'une des deux équations du ſecond degré, qui compoſent la propoſée, eſt commenſurable, ou du moins ſa ſeconde puiſſance ; ou bien lorſque le dernier terme de la même équation du ſecond degré eſt commenſurable.*

MÉTHODE.

01. ON ſuppoſera que l'équation generale $x^4 + pxx + qx + r = 0$, repréſente toutes les équations du quatriéme degré : On ſuppoſera auſſi que $xx + fx + g = 0$, repréſente une des deux équations du ſecond degré qui compoſent l'équation du quatriéme degré.

On diviſera $x^4 + pxx + qx + r = 0$, par $xx + fx + g = 0$, & on continuera la diviſion juſqu'à ce qu'on ait un reſte dans lequel l'inconnue x ſoit lineaire. Le quotient ſera $xx - fx \begin{array}{l} + p \\ - g \\ + ff \end{array} = 0$; & le reſte ſera $- f^3x + 2fgx - pfx + qx - ffg + gg - pg + r$. On ſuppoſera chaque terme de

ce reste égal à zero, ce qui donnera les deux équations particulieres qui suivent, qui serviront à déterminer les indéterminées f & g,

$$1^{re},\ -f^3 \begin{array}{l} +2gf \\ -pf \end{array} + q = 0; \qquad 2^e,\ -ffg \begin{array}{l} +gg \\ -pg \\ +r \end{array} = 0.$$

Ou bien en transposant,

$$1^{re},\ f^3 \begin{array}{l} -2gf \\ +pf \end{array} - q = 0; \qquad 2^e,\ gff \begin{array}{l} -gg \\ +pg \\ -r \end{array} = 0.$$

On trouveroit les mêmes équations, en supposant les deux équations indéterminées du second degré $xx + fx + g = 0$, $xx - fx + h = 0$, & en comparant, après les avoir multipliées, les termes du produit avec les termes correspondans de l'équation generale $x^4 + pxx + qx + r = 0$, on auroit trois équations particulieres, par le moyen desquelles dégageant l'indéterminée h, on trouveroit les deux mêmes équations qui précedent.

On cherchera le plus grand diviseur commun de ces deux équations, en prenant f pour l'inconnue, & on continuera l'operation jusqu'à ce qu'on trouve un reste dans lequel f ne se trouve plus : ce reste, qui ne contiendra aucune autre inconnue que g, étant mis en ordre par raport à g, & supposé égal à zero, sera $g^6 - pg^5 - rg^4 \begin{array}{l} +2prg^3 \\ -qqg^3 \end{array} - rrgg - prrg + r^3$.

Ce sera la réduite qui servira à faire trouver le dernier terme g de l'équation $xx + fx + g = 0$, lorsqu'il est commensurable. On mettra à part le dernier diviseur $\begin{array}{l} -ggf \\ +rf \end{array}$ $- qg = 0$, qui a servi à trouver la réduite ; ou plutôt on prendra la valeur de f dans ce diviseur, qui est $f = \frac{-qg}{gg-r}$, & on la mettra à part : elle servira à faire trouver f, quand on aura découvert la valeur de g.

On cherchera de même une réduite qui n'ait point d'autre inconnue que f ; & pour la trouver, on ordonnera les deux équations $f^3 \begin{array}{l} -2gf \\ +pf \end{array} - q = 0$, $\quad gff \begin{array}{l} -gg \\ +pg \\ -r \end{array} = 0$,

par raport à l'inconnue g; & l'on aura ces deux équations,

1re, $gg - ffg + r = 0$; 2e, $2fg - f^3 = 0$.
$\quad - pg \qquad\qquad\qquad - pf$
$\qquad\qquad\qquad\qquad + q$

On cherchera le plus grand diviſeur commun de ces deux équations, & on continuera l'operation juſqu'à ce qu'on ſoit arrivé à un reſte qui ne contienne plus l'indéterminée g: ce reſte, qui n'aura plus d'autre inconnue que f, étant mis en ordre par raport à f, & ſuppoſé égal à zero, ſera $f^6 + 2pf^4 + ppff - qq = 0$. Ce ſera la réduite qui ſervira à faire
$- 4rff$
trouver le coëficient f de l'équation $xx + fx + g = 0$, lorſqu'il eſt commenſurable, ou du moins lorſque la ſeconde puiſſance ff eſt commenſurable.

On prendra la valeur de g dans le dernier diviſeur qui a donné la réduite pour reſte, qui eſt $2fg - f^3 = 0$; cette
$\qquad - pf$
$\qquad + q$
valeur ſera $g = \frac{f^3 + pf - q}{2f}$, & on la mettra à part, pour s'en ſervir à trouver la valeur de l'indéterminée g, quand on aura découvert la valeur de f par le moyen de la réduite.

Ces deux réduites, dont l'une des indéterminées f ou g eſt l'inconnue, avec les valeurs de l'autre indéterminée f ou g, qui répondent à chacune des réduites, ſerviront à trouver la premiere des deux équations du ſecond degré, dont une équation propoſée du quatriéme degré, qu'on veut réſoudre, eſt compoſée; & le quotient $xx - fx + p$
$\qquad - g$
$= 0$, ſervira à trouver l'autre. $\qquad + ff$

La maniere de trouver les quatre racines d'une équation du quatriéme degré par les formules précedentes.

102. 1°. ON ſubſtituera dans laquelle on voudra des deux réduites, les valeurs de $+p$, $+q$, $+r$, priſes dans l'équation qu'on veut réſoudre, en remarquant que $+p$ marque le coëficient du troiſiéme terme de la propoſée, avec ſon ſigne + ou —; & ainſi des autres.

2°. On diviſera la nouvelle réduite qui en réſultera par g + ou — chaque diviſeur du dernier terme, quand on ſe

ſert de la réduite où eſt g, & alors il ne faut ſe ſervir que des diviſeurs communs au dernier terme de la réduite, & au dernier terme de la propoſée: & ſi c'eſt la réduite dont f eſt l'inconnue, on la diviſera par ff + ou — chaque diviſeur du dernier terme de la réduite, qui n'aura que deux dimenſions quand la propoſée eſt litterale & homogene.

Si les grandeurs repréſentées par ff & g de l'équation $xx + fx + g = 0$, ſont commenſurables, on trouvera toujours une équation faite de ff, ou de g plus ou moins un diviſeur du dernier terme de la réduite qui fera la diviſion ſans reſte; & l'on aura par ce moyen une valeur de f ou de g.

Si la nouvelle réduite qu'on trouve, après avoir ſubſtitué dans la réduite dont f eſt l'inconnue, les valeurs de p, q, r, étoit abaiſſée d'un degré, une valeur de ff ſeroit zero.

3°. On ſubſtituera la valeur de f ou de g, qu'on vient de découvrir, dans l'équation de f ou de g lineaire, miſe à part; & les valeurs de f & de g étant ainſi découvertes, on les ſubſtituera dans $xx + fx + g = 0$, & l'on aura la premiere des deux équations du ſecond degré qui compoſent la propoſée: On ſubſtituera encore les valeurs découvertes de f & de g, & celles de p, dans le quotient $xx - fx + \begin{matrix} p \\ -g \\ +ff \end{matrix} = 0$, & l'on aura la ſeconde équation du ſecond degré qui compoſe la propoſée.

4°. On trouvera les racines de ces deux équations du ſecond
*76. degré, * & l'on aura les quatre racines de la propoſée.

AVERTISSEMENT.

103. ON mettra ici avant les exemples, toutes les formules dont on a beſoin pour les réſoudre.

L'équation generale eſt $x^4 + pxx + qx + r = 0$.

La premiere des deux équations du ſecond degré dont elle eſt compoſée, eſt $xx + fx + g = 0$; la ſeconde eſt $xx - fx + \begin{matrix} p \\ -g \\ +ff \end{matrix} = 0$.

La réduite pour trouver f, ou ff, eſt $f^6 + 2pf^4 + \begin{matrix} ppff \\ -4rff \end{matrix} - qq = 0$.

Quand on aura trouvé la valeur de ff & de f par cette réduite, la formule pour trouver g, eſt $g = \frac{f^3+pf-q}{2f} = \frac{ff}{2}$ $+ \frac{p}{2} - \frac{q}{2f}$; ainſi $xx + fx + g = 0$, $= xx + fx + \frac{ff}{2} + \frac{p}{2}$ $- \frac{q}{2f} = 0$; & $xx - fx + p = 0$, $= xx - fx + \frac{ff}{2} + \frac{p}{2}$ $+ \frac{q}{2f} = 0$.

$$\begin{array}{l} -g \\ +ff \end{array}$$

La formule pour trouver g, quand g eſt commenſurable, eſt $g^6 - pg^5 - rg^4 + 2prg^3 - rrgg - prrg + r^3 = 0$.

$$-qqg^3$$

Quand on aura trouvé la valeur de g par cette réduite, la formule pour trouver f, eſt $f = \frac{-qg}{gg-r}$.

On remarquera que le calcul eſt plus court en ſe ſervant de la formule de la réduite, dont f eſt l'inconnue; qui n'eſt que du 3ᵉ degré, & par laquelle on trouvera toujours la valeur de f, quand la grandeur repréſentée par f, eſt commenſurable; ou quand même f étant incommenſurable, ff eſt commenſurable; & que le calcul eſt plus long ſi l'on ſe ſert de la formule de la réduite, dont g eſt l'inconnue, qui eſt du 6ᵉ degré, & qu'on ne peut réſoudre que quand g eſt commenſurable.

EXEMPLE I.

POUR trouver les quatre racines de l'équation $x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 = 0$, on ôtera d'abord le ſecond

$$-ccxx$$

terme de cette équation, en ſuppoſant $x = y + \frac{1}{2}a$; & ſubſtituant la valeur de x dans la propoſée, on aura $y^4 + \frac{1}{2}aayy - a^3y + \frac{5}{16}a^4 = 0$, qui n'a pas de ſecond terme.

$$-ccyy \quad -accy \quad -\frac{1}{4}aacc$$

Afin que l'équation generale $x^4 + pxx + qx + r = 0$, repréſente cette équation, on ſuppoſera $+p = +\frac{1}{2}aa - cc$, $+q = -a^3 - acc$, $+r = +\frac{5}{16}a^4 - \frac{1}{4}aacc$.

On ſubſtituera ces valeurs de p, q, r, dans la réduite $f^6 + 2pf^4 + ppff - qq = 0$; & l'on aura la réduite,

$$-4rff$$

$$\begin{array}{llll} f^6 + aaf^4 & - a^4ff & - a^6 & = 0. \\ \quad\;\; - 2ccf^4 & + c^4ff & - 2a^4cc & \\ & & - aac^4 & \end{array}$$

On diviſera cette réduite par $ff - aa - cc = 0$, ($aa + cc$

est un diviseur du dernier terme,) & la division se faisant sans reste, on aura $ff = aa + cc$; & $f = \sqrt{aa + cc}$.

On substituera ces valeurs de ff & de f, dans $g = \frac{ff}{2} + \frac{p}{2} - \frac{q}{2f}$, & l'on trouvera $g = \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}cc + \frac{a^3 + acc}{2\sqrt{aa+cc}} = \frac{3}{4}aa + \frac{a\sqrt{aa+cc} \times \sqrt{aa+cc}}{2\sqrt{aa+cc}} = \frac{3}{4}aa + \frac{1}{2}a \times \sqrt{aa+cc}$. On substituera les valeurs de f & de g dans $xx + fx + g = 0$; & on substituera les mêmes valeurs & celle de p, dans $xx - fx \begin{array}{l} +p \\ -g \\ +ff \end{array} = 0$, où l'on supposera que x représente y; & l'on aura $yy + y\sqrt{aa+cc} + \frac{3}{4}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} = 0$; & $yy - y\sqrt{aa+cc} + \frac{3}{4}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} = 0$: ce sont les deux équations du second degré qui composent $y^4 \begin{array}{l} + \frac{1}{2}aayy \\ - ccyy \end{array}$, &c.

Enfin on trouvera par le premier Problême les racines de ces deux équations du 2e degré, & l'on aura les quatre racines de $y^4 \begin{array}{l} + \frac{1}{2}aayy \\ - ccyy \end{array}$, &c. qui sont la 1re, $y = -\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} + \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$; la 2e, $y = -\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} - \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$; la 3e, $y = +\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} + \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$; la 4e, $y = +\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} - \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$.

Substituant les valeurs de y dans $x = y + \frac{1}{2}a$, on aura les quatre racines de la proposée : 1re, $x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} + \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$; 2e, $x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} - \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$; 3e, $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} + \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$; 4e, $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} - \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$.

EXEMPLE II.

POUR trouver les racines de l'équation $x^4 - 32xx + 5x + 12 = 0$, on supposera $+p = -32$, $+q = +5$, $+r = +12$. On substituera les valeurs de p, q, r, dans la réduite dont f est l'inconnue; & l'on aura pour la réduite de la proposée,

proposée, $f^6 - 64f^4 + 976ff - 25 = 0$. On divisera cette réduite par $ff +$ ou $-$ un diviseur exact du dernier terme 25, & on trouvera que la division se fait sans reste par $ff - 25 = 0$; d'où l'on déduit $ff = 25$, & $f = 5$. Substituant cette valeur de f dans $g = \frac{ff}{2} + \frac{p}{2} - \frac{q}{2f}$, l'on trouve $g = \frac{25}{2} - \frac{32}{2} - \frac{5}{10} = - \frac{80}{20} = -4$. Substituant ces valeurs de f & de g dans $xx + fx + g = 0$, & dans $xx - fx + p = 0$,

$$\begin{array}{r} -g \\ +ff \end{array}$$

on aura pour la premiere des deux équations du second degré qui composent la proposée, $xx + 5x - 4 = 0$; & pour la seconde $xx - 5x - 3 = 0$.

En résolvant chacune de ces équations, on trouve que les quatre racines de la proposée sont $x = -\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{41}{4}}$, $x = -\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{41}{4}}$, $x = +\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{37}{4}}$, $x = +\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{37}{4}}$.

EXEMPLE III.

POUR trouver les racines de $x^4 - 18xx + 24x - 3 = 0$, on supposera $+p = -18$, $+q = +24$, $+r = -3$. On substituera ces valeurs de p, q, r, dans la réduite dont f est l'inconnue, & l'on aura pour la réduite de la proposée, $f^6 - 36f^4 + 336ff - 576 = 0$. On divisera cette réduite par $ff -$ ou $+$ chaque diviseur du dernier terme, & l'on trouvera que $ff - 12 = 0$, fait la division sans reste; d'où l'on déduira $ff = 12$, & $f = \sqrt{12}$. Substituant cette valeur de f dans $g = \frac{ff}{2} + \frac{p}{2} - \frac{q}{2f}$, on trouvera $g = \frac{12}{2} - \frac{18}{2} - \frac{24}{2\sqrt{12}} = -3 - \frac{24}{2\sqrt{12}} = -3 - \frac{12}{\sqrt{12}}$. Or $\frac{12}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{12}} = \sqrt{12}$; ainsi $g = -3 - \sqrt{12}$. Substituant les valeurs de f & de g dans $xx + fx + g = 0$, & dans $xx - fx + p = 0$, l'on

$$\begin{array}{r} -g \\ +ff \end{array}$$

aura $xx + x\sqrt{12} \begin{array}{l} -3 \\ -\sqrt{12} \end{array} = 0$, & $xx - x\sqrt{12} \begin{array}{l} -3 \\ +\sqrt{12} \end{array} = 0$, pour les deux équations du second degré qui composent la proposée. On en trouvera facilement les racines par le premier Problême.* *76.

EXEMPLE IV.

POUR trouver les racines de $x^4 + 4xx - 4x + 15 = 0$, on supposera $+p = +4$, $+q = -4$, $+r = +15$. On

ſubſtituera les valeurs de p, q, r, dans la réduite dont l'inconnue eſt f, & l'on aura la réduite de la propoſée $f^6 + 8f^4 - 44ff - 16 = 0$: on diviſera cette réduite par ff — ou + chaque diviſeur du dernier terme, & on trouvera que $ff - 4 = 0$, fait la diviſion ſans reſte ; d'où l'on déduira $ff = 4$, & $f = 2$. Subſtituant la valeur de f dans $g = \frac{ff}{2} + \frac{p}{2} - \frac{q}{2f}$, on trouvera $g = \frac{4}{2} + \frac{4}{2} + \frac{4}{4} = 5$. Subſtituant les valeurs de f & de g dans $xx + fx + g = 0$, $xx - fx + p = 0$,

$$\begin{array}{l} - g \\ + ff \end{array}$$

on aura $xx + 2x + 5 = 0$, & $xx - 2x + 3 = 0$. Ce ſont les deux équations du ſecond degré qui compoſent la propoſée. On en trouvera facilement les racines par le premier
* 76. Problême, * qui ſont toutes imaginaires.

La démonſtration de ce cinquiéme Problême a déja été
* 67. donnée dans la quatriéme Section du quatriéme Livre. *

Démonſtration du 5e Problême.

III. *Lorſque le coëficient repréſenté par* f *dans l'équation* xx + fx + g = 0, *& le dernier terme* g, *ſont incommenſurables.*

104. VOICI une méthode pour réſoudre ce cas dans pluſieurs rencontres : On ſuppoſera les deux équations du ſecond degré, qui repréſentent par leurs indéterminées les deux équations qui compoſent la propoſée ; on les ſuppoſera, dis-je, avec des incommenſurables au ſecond & au dernier terme ; par exemple, la premiere ſera $xx - x\sqrt{f} + g = 0$,

$$\begin{array}{l} \phantom{xx - x\sqrt{f}} \mp \sqrt{f} \end{array}$$

& la ſeconde $xx + x\sqrt{f} + g = 0$: on les multipliera l'une

$$\begin{array}{l} \phantom{xx + x\sqrt{f}} \pm \sqrt{f} \end{array}$$

par l'autre, & l'on aura le produit $x^4 - fxx \mp 2fx + gg = 0$.

$$\begin{array}{l} + 2gxx - f \end{array}$$

L'équation generale ſera $x^4 \mp pxx \mp qx \pm r = 0$.

On comparera les termes correſpondans de ces deux équations, & l'on aura les trois équations particulieres qui ſuivent : 1re ; $-f + 2g = \mp p$; d'où l'on déduira $g = \mp \frac{p + f}{2}$: 2e, $2f = q$, $f = \frac{q}{2}$; 3e, $+ gg - f = \pm r$.

L'indéterminée f eſt connue par la ſeconde équation $f = \frac{q}{2}$: Subſtituant ſa valeur dans la premiere, l'on aura $g = \mp \frac{p}{2} + \frac{q}{4}$.

L'équation $xx - x\sqrt{f} + g = 0$, ſera $xx - x\sqrt{\frac{1}{2}q} \mp \frac{p}{2}$

$$\begin{array}{l} \phantom{xx - x\sqrt{f}} \mp \sqrt{f} \end{array}$$

$+\frac{r}{4}-\sqrt{\frac{q}{2}}=0$; & $xx+x\sqrt{f}+g=0$, sera $xx+x\sqrt{\frac{1}{2}q}$ $\pm\sqrt{f}$ $\mp\frac{1}{2}p+\frac{1}{4}q+\sqrt{\frac{1}{2}q}=0$.

Application de cette méthode à un exemple.

POUR trouver les racines de $x^4-18xx+24x-3=0$, on suppoſera $-p=-18$, ou $p=18$; $q=24$, & $-r=-3$, ou $r=3$. On ſubſtituera les valeurs de p, q, r, dans les deux formules précedentes, & l'on aura $xx-x\sqrt{12}-9+6-\sqrt{12}=0$, c'eſt-à-dire $xx-x\sqrt{12}-3-\sqrt{12}=0$, & $xx+x\sqrt{12}-3+\sqrt{12}=0$. Ce ſont les deux équations qui compoſent la propoſée; on en trouvera facilement les racines par le premier Problême. * *76.

IV. *Lorſque* f *&* ff *ſont incommenſurables dans l'équation composante* xx + fx + g = o.

105. IL peut arriver des cas où f & ff ſe trouveront incommenſurables, & alors on ne trouvera pas d'équation ſimple de ff — ou + un diviſeur du dernier terme de la réduite f^6+2pf^4, &c. qui diviſe la réduite ſans reſte. Voici une méthode pour ce cas dans pluſieurs rencontres.

On pourra ſuppoſer que les deux équations compoſantes du ſecond degré ſont $xx-x\sqrt[4]{f}+g\mp\sqrt[4]{f}=0$, & $xx+x\sqrt[4]{f}+g\pm\sqrt[4]{f}=0$. Leur produit eſt $x^4-fxx+2gxx\mp2fx+gg-f=0$.

La formule generale ſera $x^4\mp pxx\mp qx\pm r=0$.

Les comparaiſons des termes correſpondans donneront les équations ſuivantes: 1re, $-f+2g=\mp p$; d'où l'on déduit $g=\mp\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}f$: 2e, $2f=q$; d'où l'on déduit $f=\frac{1}{2}q$: 3e, $gg-f=\pm r$.

On déduira de la premiere & de la ſeconde $g=\mp\frac{1}{2}p+\frac{1}{4}q$. Subſtituant ces valeurs de f & de g dans les deux équations compoſantes, la premiere ſera $xx-x\sqrt[4]{\frac{1}{2}q}\mp\frac{1}{2}p+\frac{1}{4}q\mp\sqrt[4]{\frac{1}{2}q}=0$; & la ſeconde, $xx+x\sqrt[4]{\frac{1}{2}q}\mp\frac{1}{2}p+\frac{1}{4}q\pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}q}=0$.

On appliquera ces formules aux exemples, comme on l'a fait dans le cas précedent.

REMARQUE.

ON pourra diſtinguer quelles ſont les équations du quatriéme degré qu'on pourra réſoudre par la méthode du 3[e] & 4[e] art. qui précedent, en ſubſtituant les valeurs de f & de g dans la troiſiéme équation particuliere $gg - f = \pm r$; car l'on aura $\frac{1}{4}pp \mp \frac{1}{4}pq + \frac{1}{16}qq - \frac{1}{2}q = \pm r$; ainſi les équations dans leſquelles la quantité $\frac{1}{4}pp \mp \frac{1}{4}pq + \frac{1}{16}qq - \frac{1}{2}q$, ne ſera pas égale au dernier terme repréſenté par r, ne pourront ſe réſoudre par ces méthodes.

Méthode pour trouver les deux équations du ſecond degré, dont une équation du quatriéme eſt compoſée; dans les cas où ſe ſervant de la réduite dont f eſt l'inconnue, il arrive que la grandeur repréſentée par ff eſt incommenſurable.

106. QUAND aucune équation ſimple de ff — ou + un des diviſeurs du dernier terme de la réduite $f^6 + 2pf^4$, &c. ne diviſe la réduite ſans reſte, dans ce cas ff eſt incommenſurable. Pour réſoudre dans ce cas la réduite $f^6 + 2pf^4 + ppff - 4rff - qq = 0$, tirée de l'équation generale $x^4 + pxx + qx + r = 0$, on ôtera le ſecond terme de la réduite, en ſuppoſant $ff = y - \frac{2}{3}p$; & après avoir ſubſtitué $y - \frac{2}{3}p$ à la place de ff dans la réduite, on aura la transformée de la réduite

$$y^3 - \frac{1}{3}ppy - \frac{2}{27}p^3 = 0, \quad \begin{array}{l} \\ -4ry \quad +\frac{8}{3}pr \\ \qquad\quad -qq \end{array}$$

qui n'a pas de ſecond terme.

On ſubſtituera les valeurs de p, q, r, priſes dans l'équation qu'on voudra réſoudre, & où l'on aura trouvé que ff eſt incommenſurable; on les ſubſtituera, dis-je, ces valeurs dans la transformée de la réduite qu'on vient de trouver; & on réſoudra l'équation transformée par les méthodes du troiſiéme degré; & quand on aura trouvé la valeur de y, on la ſubſtituera dans $ff = y - \frac{2}{3}p$, & l'on aura la valeur de ff: on trouvera enſuite celle de $g = \frac{ff}{2} + \frac{p}{2} - \frac{q}{2f}$; après cela on trouvera les deux équations du ſecond degré qui compoſent la propoſée, & on aura par leur moyen les quatre racines de la propoſée.

EXEMPLE.

POUR trouver les racines de $x^4 - 50xx + 100x - 100 = 0$, on ſuppoſera, afin que l'équation generale $x^4 + pxx + qx + r = 0$, repréſente la propoſée, que $+p = -50$, $+q = +100$, $+r = -100$; mettant ces valeurs de p, q, r, dans la formule de la réduite $f^6 + 2pf^4$, &c. la réduite de la propoſée ſera $f^6 - 100f^4 + 2900ff - 10000 = 0$; ou plutôt on ſubſtituera les valeurs de p, q, r, immédiatement dans la transformée de la reduite

$$\begin{array}{lll} y^3 - \frac{1}{3}ppy & - \frac{2}{27}p^3 \\ - 4ry & + \frac{8}{3}pr \\ & - qq \end{array}$$

$= 0$; & l'on aura $y^3 - \frac{1300}{3}y + \frac{340000}{27} = 0$; & l'équation $ff = y - \frac{2}{3}p$, ſera $ff = y + \frac{100}{3}$. On ôtera les fractions de $y^3 - \frac{1300}{3}y + \frac{340000}{27} = 0$, en ſuppoſant $3y = z$, & $y = \frac{z}{3}$; & l'on aura $z^3 - 3900z + 340000 = 0$. On trouvera la valeur de z, en réſolvant cette équation du troiſiéme degré par la ſeconde méthode generale, * & l'on trouvera $z = \sqrt[3]{-170000 - \sqrt{26703000000}} + \sqrt[3]{-170000 + \sqrt{26703000000}}$; on ſubſtituera cette valeur de z dans $y = \frac{z}{3}$, & l'on aura $y = \frac{1}{3} \times \sqrt[3]{-170000 - \sqrt{26703000000}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{-170000 + \sqrt{26703000000}}$; on ſubſtituera cette valeur de y dans $ff = y + \frac{100}{3}$, & l'on aura $ff = \frac{100}{3} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{-170000 - \sqrt{26703000000}} + \frac{1}{3} \times \sqrt[3]{-170000 + \sqrt{26703000000}}$; d'où l'on déduira $f = \sqrt{\frac{100}{3} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{-170000}}$, &c. On ſubſtituera les valeurs de f & de ff dans $g = +\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}ff - \frac{q}{2f}$, & l'on aura $g = -25 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{100}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{-170000}}$, &c. On ſubſtituera les valeurs de f & de g, qu'on vient de découvrir, dans $xx + fx + g = 0$, & dans

$$\begin{array}{l} xx - fx + p = 0 \\ - g \\ + ff \end{array}$$

& l'on aura les deux équations du ſecond degré qui compoſent la propoſée. *94.

On trouvera enfin les racines de chacune de ces deux équations du ſecond dégré, * & l'on aura les quatre racines de la propoſée. *76.

REMARQUES.

107. QUAND les trois racines de la réduite, ou, ce qui revient à la même chose, de la transformée de la réduite, sont réelles & incommensurables, on ne peut en trouver la valeur qu'avec des expressions imaginaires qu'on ne sçauroit ôter, & les équations du quatriéme degré renferment alors le cas irréductible du troisiéme degré.

Pour distinguer les cas du quatriéme degré où cela peut arriver, il faut remarquer que les quatre racines du 4e degré peuvent être ou bien toutes réelles, ou bien deux réelles & deux imaginaires, ou bien enfin toutes imaginaires.

Pour déterminer ce qui regarde ces trois cas, il faut prendre des équations simples dont les indéterminées expriment les raports des quatre racines dans chacun de ces cas.

Premier cas où les quatre racines sont réelles.

108. ON supposera que les quatre équations simples sont $x - i - k = 0$, $x - i + k = 0$, $x + i - l = 0$, $x + i + l = 0$. L'équation du second degré faite des deux premieres, est $xx - 2ix + \begin{array}{l} ii \\ -kk \end{array} = 0$: celle qui est composée des deux autres est $xx + 2ix + \begin{array}{l} ii \\ -ll \end{array} = 0$; le produit de ces deux équations, qui est celui des quatre simples, est

$$x^4 \begin{array}{l} -2iixx \\ -kkxx \\ -llxx \end{array} \begin{array}{l} -2ikkx \\ +2illx \\ \end{array} \begin{array}{l} +i^4 \\ -iikk \\ -iill \\ +kkll \end{array} = 0$$

: ce produit est l'équation indéterminée, qui exprime les raports des quatre racines de toute équation du 4e degré, lorsqu'elles sont toutes réelles, & que le second terme en est évanoui : Et comme les équations du 4e degré, dont le second terme est évanoui, & dont les quatre racines sont réelles, doivent avoir des racines négatives & positives : 1°. S'il y en a deux positives & deux négatives, i surpassera k, & i surpassera aussi l. 2°. S'il y en a trois positives & une négative, i surpassera k, mais l surpassera i. 3°. S'il y en a trois négatives & une positive, k surpassera i, & i surpassera l.

Il est évident par cette équation indéterminée, que quand les quatre racines sont réelles, le troisiéme terme a toujours

le signe $-$; ainsi les équations où il a le signe $+$, ont nécessairement des racines imaginaires; ce que l'on a déja démontré dans le troisiéme Livre. * * 29. 12e Cor.

On supposera que cette équation indéterminée est la même que l'équation generale $x^4 + pxx + qx + r = 0$; ainsi $+p = -2ii - kk - ll$, $+q = -2ikk + 2ill$, $+r = +i^4 - iikk - iill + kkll$.

On substituera ces valeurs de p, q, r, dans la réduite $f^6 + 2pf^4$, &c. & l'on aura pour la réduite de l'équation indéterminée, qui représente les raports des racines, l'équation suivante

$$\begin{array}{llll} f^6 - 4iif^4 & + 8iikkff & - 4iik^4 & = 0. \\ \quad - 2kkf^4 & + 8iillff & + 8iikkll & \\ \quad - 2llf^4 & + k^4ff & - 4iil^4 & \\ & - 2kkllff & & \\ & + l^4ff & & \end{array}$$

On fera ces remarques sur cette réduite : 1°. Elle peut être divisée exactement par chacune de ces trois équations simples $ff - 4ii = 0$, $ff - kk - 2kl - ll = 0$, $ff - kk + 2kl - ll = 0$; par consequent toutes les racines de la réduite sont réelles, & même positives, quand toutes celles de la proposée sont réelles : 2°. Le second terme de la réduite a toujours le signe $-$. 3°. Le troisiéme terme de la réduite a toujours le signe $+$; car $+ 8iikk + 8iill$ sont des grandeurs positives, & $+ k^4 - 2kkll + l^4$, est le quarré de $kk - ll$, qui est par consequent positif.

Second cas lorsque deux racines sont réelles, & deux imaginaires.

09. LES quatre équations simples qui représentent les raports des racines, seront $x - i - k = 0$, $x - i + k = 0$, $x + i - \sqrt{-ll} = 0$, $x + i + \sqrt{-ll} = 0$.

Le produit des deux premieres est

$$\begin{array}{lll} xx - 2ix & + ii & = 0. \\ & - kk & \end{array}$$

Le produit des deux imaginaires est

$$\begin{array}{lll} xx + 2ix & + ii & = 0. \\ & + ll & \end{array}$$

Le produit des quatre est

$$\begin{array}{lllll} x^4 & - 2iixx & - 2ikkx & + i^4 & = 0. \\ & - kkxx & - 2illx & - iikk & \\ & + llxx & & + iill & \\ & & & - kkll & \end{array}$$

Ce produit est l'équation qui exprime les raports des quatre racines de toute équation du 4e degré, dont deux racines sont réelles, & deux imaginaires.

Pour trouver la réduite de cette équation, on ſuppoſera qu'elle eſt la même que $x^4 + pxx + qx + r = 0$; ainſi $+ p = - 2ii - kk + ll$, $+ q = - 2ikk - 2ill$, $+ r = + i^4 - iikk + iill - kkll$. On ſubſtituera ces valeurs de p, q, r, dans la réduite $f^6 + 2pf^4$, &c, & l'on aura

$$\begin{array}{llll} f^6 - 4iif^4 & + 8iikkff & - 4iik^4 & = 0. \\ - 2kkf^4 & - 8iillff & + 8iikkll & \\ + 2llf^4 & + k^4ff & - 4iil^4 & \\ & + 2kkllff & & \\ & + l^4ff & & \end{array}$$

On remarquera ſur cette réduite qu'elle peut être exactement diviſée par chacune des trois équations ſimples $ff - 4ii = 0$, $ff - kk + ll - \sqrt{-4kkll} = 0$, $ff - kk + ll + \sqrt{-4kkll} = 0$; par conſequent quand une équation du quatriéme degré, dont le ſecond terme eſt évanoui, a deux racines réelles & deux imaginaires, ſa réduite a une racine réelle, & deux racines imaginaires.

Troiſiéme cas lorſque les quatre racines ſont imaginaires.

110. LES quatre équations ſimples qui expriment par leurs indéterminées les raports des quatre racines des équations du 4e degré, qui ont toutes leurs racines imaginaires, & le ſecond terme évanoui, ſont $x - i - \sqrt{-kk} = 0$, $x - i + \sqrt{-kk} = 0$, $x + i - \sqrt{-ll} = 0$, $x + i + \sqrt{-ll} = 0$: Le produit des deux premieres eſt $\begin{array}{l} xx - 2ix + ii = 0; \\ + kk \end{array}$

celui des deux autres eſt $\begin{array}{l} xx + 2ix + ii = 0 \\ + ll \end{array}$: Le produit des quatre eſt

$$\begin{array}{llll} x^4 - 2iixx & + 2ikkx & + i^4 & = 0. \\ + kkxx & - 2illx & + iikk & \\ + llxx & & + iill & \\ & & + kkll & \end{array}$$

Et l'on remarquera que dans toute équation du 4e degré, dont les quatre racines ſont imaginaires, & le ſecond terme évanoui, le dernier terme a toujours le ſigne $+$.

Pour trouver la réduite de cette équation, on la ſuppoſera la même que $x^4 + pxx + qx + r = 0$; ainſi $+ p = - 2ii + kk + ll$, $+ q = + 2ikk - 2ill$, $+ r = + i^4 + iikk + iill + kkll$. On ſubſtituera les valeurs de p, q, r, dans la réduite

duite $f^6 + 2pf^4$ &c. & l'on aura

$$\begin{array}{llll} f^6 - 4iif^4 & - 8iikkff & - 4iik^4 & = 0. \\ + 2kkf^4 & - 8iillff & + 8iikkll & \\ + 2llf^4 & + k^4ff & - 4iil^4 & \\ & - 2kkllff & & \\ & + l^4ff & & \end{array}$$

On remarquera ſur cette réduite, 1°. qu'elle peut être exactement diviſée par chacune de ces trois équations ſimples $ff - 4ii = 0$, $ff + kk + 2kl + ll = 0$, $ff + kk - 2kl + ll = 0$; par conſéquent la réduite de toute équation du quatriéme degré, dont les quatre racines ſont imaginaires, & le ſecond terme évanoui, a ſes trois racines réelles.

2°. Quand le ſecond terme de la réduite a le ſigne $-$, c'eſt-à-dire, quand $4ii$ ſurpaſſe $2kk + 2ll$, il eſt évident que le troiſiéme terme de la réduite a auſſi le ſigne $-$, car $kk + ll$ ſurpaſſe $kk - ll$; ainſi multipliant $kk + ll$ par $-8ii$, qui ſurpaſſe $kk - ll$, & multipliant $kk - ll$ par $kk - ll$, le premier produit $-8iikk - 8iill$ ſurpaſſera le ſecond $k^4 - 2kkll + l^4$.

Marques certaines pour diſtinguer les cas où les équations du 4e degré, dont le ſecond terme eſt évanoui, ont toutes leurs racines réelles; les cas où elles en ont deux imaginaires; ceux où les quatre ſont imaginaires; & enfin les cas où on peut les réſoudre.

111. IL ſuit de ces remarques, 1°. que quand le troiſiéme terme d'une équation du 4e degré, dont le ſecond terme eſt évanoui, a le ſigne +, il y a des racines imaginaires, * & ſi à * 108.
même temps les racines de ſa réduite ſont toutes réelles; & 29.
(ce que l'on connoîtra en faiſant évanouir le ſecond terme 13e Cor.
de la réduite; car ſi le cube du tiers du coëficient du troiſiéme terme de la transformée de la réduite, ſurpaſſe le quarré de la moitié de ſon dernier terme, ou lui eſt égal, les trois racines de la réduite ſeront réelles. *) Alors les * 82. 81.
quatre racines ſont imaginaires*; car s'il n'y avoit que deux * 110.
imaginaires dans la propoſée, deux racines de la réduite ſeroient imaginaires.* * 109.

De plus, quand le ſecond terme de la réduite d'une équation du 4e degré, dont le ſecond terme eſt évanoui, a le ſigne $-$, & que le troiſiéme terme de la même réduite a encore le ſigne $-$, les quatre racines de l'équation ſont imaginaires.* * 110.

Quand on a donc l'une ou l'autre de ces deux marques, l'équation est résolue ; car on sçait que le Problême renferme contradiction, & ne peut avoir aucune résolution réelle.

2°. Quand le troisiéme terme d'une équation du 4e degré, dont le second terme est évanoui, a le signe +, & que le dernier terme a le signe —, il est certain qu'il y a deux racines imaginaires, & deux racines réelles, car le dernier
*110. terme auroit + s'il y avoit quatre imaginaires. *

Quand le troisiéme terme d'une équation du 4e degré, dont le second terme est évanoui, a le signe —, & qu'en même temps la réduite de cette équation a une racine réelle, & deux racines imaginaires, il est certain que l'équa-
*109. tion a deux racines imaginaires, & deux racines réelles. * Or on connoîtra que la réduite aura une racine réelle & deux imaginaires, en faisant évanouir le second terme de la réduite, car si le cube du tiers du coëficient du troisiéme terme de la transformée de la réduite est moindre que le
*83. quarré de la moitié de son dernier terme, * il est certain que la transformée aura une racine réelle & deux imaginaires ; par consequent la réduite aussi ; d'où il suivra que l'équation proposée aura deux racines réelles & deux imaginaires.

On peut toujours résoudre l'équation du 4e degré, lorsqu'elle a deux racines réelles & deux imaginaires, par la
*106. seconde méthode ci-dessus, * & par la seconde méthode
*92. generale du troisiéme Problême. *

3°. Quand une équation du 4e degré, dont le second terme est évanoui, a le signe — au troisiéme terme, & que le second terme de sa réduite a aussi le signe —, & le troisiéme terme de sa même réduite a le signe +, & que de plus les trois racines de la réduite sont réelles, il est cer-
*108. tain que les quatre racines de l'équation sont réelles. * On connoîtra que les trois racines de la réduite sont réelles, en faisant évanouir le second terme de cette réduite ; car si le cube du tiers du coëficient du troisiéme terme de la transformée de cette réduite, surpasse le quarré de la moitié du dernier terme de la même transformée, ou lui est égal, il est certain que les trois racines de cette transformée, & par
*82.81. conséquent de la réduite, sont réelles. *

Dans ce cas si les racines de la transformée de la réduite sont commensurables, ou du moins quelqu'une, on peut toujours trouver les quatre racines de l'équation par les méthodes du Problême précedent. Mais si toutes les racines de cette transformée de la réduite sont incommensurables, la résolution de la réduite de l'équation renferme alors le cas irréductible du troisiéme degré. * *90.

PROBLÊME VI.

112. *TROUVER les quatre racines d'une équation du 4e degré, sans en faire évanouir le second terme.*

On suppose que l'équation generale du quatriéme degré est $x^4 + nx^3 + pxx + qx + r = 0$.

PREMIERE MÉTHODE.

ON supposera que les deux équations du second degré, qui composent l'équation du 4e degré, sont représentées par les deux équations indéterminées

$$xx \begin{matrix} + fx \\ + gx \end{matrix} \begin{matrix} + h \\ + i \end{matrix} = 0.$$

$$xx \begin{matrix} + fx \\ - gx \end{matrix} \begin{matrix} + h \\ - i \end{matrix} = 0.$$

Leur produit est

$$x^4 + 2fx^3 \begin{matrix} + ffxx \\ - ggxx \\ + 2hxx \end{matrix} \begin{matrix} + 2fhx \\ - 2gix \\ \end{matrix} \begin{matrix} + hh \\ - ii \\ \end{matrix} = 0.$$

On comparera les termes de ce produit, excepté le premier, avec les termes correspondans de l'équation generale, & l'on aura les quatre équations particulieres qui suivent, dont on se servira pour déterminer les indéterminées, & l'on conservera l'indéterminée h pour en faire l'inconnue de la réduite : 1re, $+ n = + 2f$; 2e, $+ p = + ff - gg + 2h$; 3e, $+ q = + 2fh - 2gi$; 4e, $+ r = + hh - ii$. On aura par la premiere $f = \frac{n}{2}$, & $ff = \frac{nn}{4}$; on substituera la valeur de ff dans la seconde, & l'on aura $gg = \frac{nn}{4} + 2h - p$, & $g = \sqrt{\frac{nn}{4} + 2h - p}$. On substituera les valeurs de f & de g dans la troisiéme, & l'on aura $q = nh - 2i\sqrt{\frac{nn}{4} + 2h - p}$; d'où l'on déduira $i = \frac{nh - q}{2\sqrt{\frac{nn}{4} + 2h - p}}$, & $ii = \frac{nnhh - 2nqh + qq}{nn + 8h - 4p}$; on substituera cette valeur de ii dans la quatriéme équation, & l'on aura $+ r = hh - \frac{nnhh + 2nqh - qq}{nn + 8h - 4p}$. On mettra cette

équation en ordre par raport à l'inconnue h, & l'on aura

$$\begin{array}{llll} 8h^3 - 4phh & + 2nqh & - qq & = 0. \\ & - 8rh & - nnr & \\ & + 4pr & & \end{array}$$

On résoudra cette équation, c'est-à-dire, on trouvera la valeur de h par les méthodes du troisiéme degré, (transformant auparavant l'équation en une autre dont le premier terme n'ait pas d'autre coëficient que l'unité.)

On substituera ensuite les valeurs de f, g, h, i, dans les deux équations $\begin{array}{l} xx + fx + h = 0, \\ + gx + i \end{array}$ $\begin{array}{l} xx + fx + h = 0, \\ - gx - i \end{array}$ laissant h au lieu de sa valeur pour abreger le calcul; & l'on aura ces deux équations du second degré,

$$1^{re}, \quad \begin{array}{l} xx + \frac{1}{2}nx \\ + x\sqrt{\frac{1}{4}nn + 2h - p} \end{array} \begin{array}{l} + h \\ \dfrac{+ nh - q}{2\sqrt{\frac{1}{4}nn + 2h - p}} \end{array} = 0.$$

$$2^{e}, \quad \begin{array}{l} xx + \frac{1}{2}nx \\ - x\sqrt{\frac{1}{4}nn + 2h - p} \end{array} \begin{array}{l} + h \\ \dfrac{- nh + q}{2\sqrt{\frac{1}{4}nn + 2h - p}} \end{array} = 0.$$

On résoudra ensuite chacune de ces équations du second
*76. degré par le premier Problême, * & l'on aura les quatre racines de la proposée, ou plutôt les quatre formules qui les expriment d'une maniere generale.

Comme il est plus commode de trouver tout d'un coup la réduite dont h est l'inconnue, qui n'ait au premier terme que l'unité pour coëficient, au lieu de supposer les deux équations indéterminées $\begin{array}{l} xx + fx + h = 0, \\ + gx + i \end{array}$ $\begin{array}{l} xx + fx + h = 0, \\ - gx - i \end{array}$ on supposera celles-ci

$$\begin{array}{l} xx + \frac{1}{2}nx + \frac{1}{2}h = 0, \\ + gx + \frac{i}{2g} \\ xx + \frac{1}{2}nx + \frac{1}{2}h = 0, \\ - gx - \frac{i}{2g} \end{array}$$

où il n'y a que trois indéterminées g, h, i. On supposera que leur produit

$$\begin{array}{llll} x^4 + nx^3 & + \frac{1}{4}nnxx & + \frac{1}{2}nhx & + \frac{1}{4}hh = 0, \\ & - ggxx & - ix & - \frac{ii}{4gg} \\ & + hxx & & \end{array}$$

est la même équation que $x^4 + nx^3 + pxx + qx + r = 0$; ainsi chaque terme du produit est égal au terme correspon-

dant de l'équation generale ; ce qui donne trois équations, parceque le premier & le second terme n'en donnent pas : 1re, $+p = \frac{1}{4}nn - gg + h$; 2e, $+q = +\frac{1}{2}nh - i$; 3e, $+r = +\frac{1}{4}hh - \frac{ii}{4gg}$. La premiere donne $gg = \frac{1}{4}nn + h - p$, & $g = \sqrt{\frac{1}{4}nn + h - p}$: la seconde donne $i = \frac{1}{2}nh - q$, & $ii = \frac{1}{4}nnhh - nqh + qq$. On substituera les valeurs de gg & de ii dans la troisiéme équation, & l'on aura $+r = \frac{1}{4}hh - \frac{1}{4}\frac{nnhh + nqh - qq}{nn + 4h - 4p}$; on ordonnera cette équation par raport à l'inconnue h, & l'on aura

$$\begin{array}{llll} h^3 - phh & + nqh & - qq & = 0 ; \\ & - 4rh & - nnr & \\ & & + 4pr & \end{array}$$

c'est la réduite de l'équation ; elle n'est que du troisiéme degré, & son premier terme n'a que l'unité pour coëficient.

On trouvera la valeur de h par le moyen de cette réduite, en se servant des méthodes du troisiéme degré ; on substituera ensuite les valeurs de h, g, i, dans les deux équations indéterminées

$$\begin{array}{lll} xx + \frac{1}{2}nx & + \frac{1}{2}h & = 0, \\ + gx & + \frac{i}{2g} & \end{array} \qquad \begin{array}{lll} xx + \frac{1}{2}nx & + \frac{1}{2}h & = 0, \\ - gx & - \frac{i}{2g} & \end{array}$$

laissant h au lieu de sa valeur, pour abreger le calcul ; & l'on aura ces deux équations :

$$1^{re}, \quad \begin{array}{l} xx + \frac{1}{2}nx \\ + x\sqrt{\frac{1}{4}nn + h - p} \end{array} \begin{array}{l} + \frac{1}{2}h \\ + \dfrac{\frac{1}{2}nh - q}{2\sqrt{\frac{1}{4}nn + h - p}} \end{array} = 0.$$

$$2^{e}, \quad \begin{array}{l} xx + \frac{1}{2}nx \\ - x\sqrt{\frac{1}{4}nn + h - p} \end{array} \begin{array}{l} + \frac{1}{2}h \\ \dfrac{- \frac{1}{2}nh + q}{2\sqrt{\frac{1}{4}nn + h - p}} \end{array} = 0.$$

Application de cette méthode à un exemple.

POUR réduire cette méthode en pratique, quand on aura une équation à résoudre, par exemple,

$$\begin{array}{llll} x^4 - 2ax^3 & + 2aaxx & - 2a^3x + a^4 & = 0, \\ & - ccxx & & \end{array}$$

on supposera que cette équation est représentée par l'équation generale $x^4 + nx^3 + pxx + qx + r = 0$; ainsi $+n = -2a$, $+p = +2aa - cc$, $+q = -2a^3$, $+r = +a^4$. On substituera ces valeurs de n, p, q, r, dans la réduite

$$\begin{array}{llll} h^3 - phh & + nqh & - qq & = 0, \\ & - 4rh & - nnr & \\ & & + 4pr & \end{array}$$

& l'on aura

pour la réduite de la proposée, $h^3 - 2aahh - 4a^4cc = 0.$
$+ cchh$

On trouvera la valeur de h dans cette équation, en cherchant si elle ne peut point se diviser par h — ou + un diviseur du dernier terme $- 4a^4cc$; & l'on trouvera qu'elle se peut exactement diviser par $h - 2aa = 0$; ainsi $h = 2aa$. On substituera cette valeur de h dans chacune des deux équations du second degré $xx + \frac{1}{2}nx + x\sqrt{\frac{1}{4}nn + h - p}$ +, &c.

& l'on aura pour la premiere $xx - ax + x\sqrt{aa + cc} + aa = 0$,

& pour la seconde, $xx - ax - x\sqrt{aa + cc} + aa = 0$.

*76. On trouvera par le premier Problême * les racines de ces deux équations, & ce seront les quatre racines de la proposée:

1re, $x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{aa + cc} + \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$;

2e, $x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{aa + cc} - \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$;

3e, $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{aa + cc} + \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$;

4e, $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{aa + cc} - \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$.

DÉMONSTRATION.

CETTE méthode est assez démontrée par les démonstrations de l'usage des indéterminées dans les équations; si l'on en veut une autre, il n'y a qu'à multiplier les deux équations

$$xx + \frac{1}{2}nx + x\sqrt{\frac{1}{4}nn + h - p} + \frac{1}{2}h + \frac{\frac{1}{2}nh - q}{2\sqrt{\frac{1}{4}nn + h - p}} = 0,$$

$$xx + \frac{1}{2}nx - x\sqrt{\frac{1}{4}nn + h - p} + \frac{1}{2}h - \frac{\frac{1}{2}nh + q}{2\sqrt{\frac{1}{4}nn + h - p}} = 0,$$

l'une par l'autre, & mettre dans le dernier terme du produit la grandeur $+ r$, à la place de la grandeur $+ \frac{1}{4}hh - \frac{1}{4}\frac{nnhh + nqh - qq}{nn + 4h - 4p}$, qui lui est égale, & le produit sera l'équation generale $x^4 + nx^3 + pxx + qx + r = 0$; par

conséquent les deux équations précedentes, sont les deux équations du second degré, dont l'équation $x^4 + nx^3$, &c. est composée.

REMARQUE.

ON peut toujours résoudre les équations du quatriéme degré par cette méthode, lorsque la valeur de h dans leur réduite est commensurable, & lorsqu'étant incommensurable, après avoir fait évanouir le second terme de la réduite, le cube du tiers du coëficient du troisiéme terme de la transformée qui en viendra, sera moindre que le quarré de la moitié du dernier terme de la même transformée : Mais lorsque ce cube surpassera ce quarré, & que la valeur de h sera incommensurable, la résolution renfermera le cas irréductible du troisiéme degré.

Cette remarque servira pour la méthode suivante.

SECONDE MÉTHODE.

ON supposera que l'équation generale du quatriéme degré est $x^4 + nx^3 + pxx + qx + r = 0$, & on la disposera ainsi, $x^4 + nx^3 + pxx = - qx - r$.

1°. Il faut faire en sorte que le premier membre devienne un quarré parfait, en conservant cependant l'égalité entre les deux membres, ce qu'on pourra faire en introduisant une indéterminée h.

On supposera que la racine du quarré parfait, qui fera le premier membre de l'équation, est $xx + \frac{1}{2}nx + \frac{1}{2}p + h$, dont le quarré est

$$x^4 + nx^3 \begin{array}{lll} + pxx & + \frac{1}{2}npx & + \frac{1}{4}pp \\ + 2hxx & + nhx & + ph \\ + \frac{1}{4}nnxx & & + hh \end{array}$$

Afin que ce quarré soit égal au second membre, il faut ajouter au second membre les quantitez

$$\begin{array}{lll} + 2hxx & + \frac{1}{2}npx & + \frac{1}{4}pp \\ + \frac{1}{4}nxx & + nhx & + ph \\ & & + hh \end{array}$$

& l'on aura l'équation

$$x^4 + nx^3 \begin{array}{lll} + pxx & + \frac{1}{2}npx & + \frac{1}{4}pp \\ + 2hxx & + nhx & + ph \\ + \frac{1}{4}nnxx & & + hh \end{array}$$

$$= \begin{array}{lll} 2hxx & + \frac{1}{2}npx & + \frac{1}{4}pp \\ + \frac{1}{4}nnxx & + nhx & + ph \\ & - qx & + hh \\ & & - r \end{array}$$

; ou bien en tirant la racine quarrée

de chaque membre $\begin{array}{l} xx + \frac{1}{2}nx + \frac{1}{2}p \\ \qquad\qquad + h \end{array} = \sqrt{\begin{array}{lll} + 2hxx & + \frac{1}{2}npx & + \frac{1}{4}pp \\ + \frac{1}{4}nnxx & + nhx & + ph \\ & - qx & + hh \\ & & - r \end{array}}$

2°. Il faut maintenant faire en ſorte que le ſecond membre devienne auſſi un quarré parfait, de maniere pourtant que ce quarré ſoit égal au ſecond membre, & par conſéquent au premier, & qu'il contienne les grandeurs du ſecond membre où ſe trouve x, afin qu'elles ſe détruiſent, & qu'il ne reſte d'inconnue que l'indéterminée h.

Pour le faire, on ſuppoſera que la racine de ce quarré parfait égal au 2ᵉ membre, eſt $x\sqrt{\frac{1}{4}nn + 2h} + \frac{\frac{1}{2}np + nh - q}{2\sqrt{\frac{1}{4}nn + 2h}}$;

dont le quarré eſt $\begin{array}{lll} \frac{1}{4}nnxx & + \frac{1}{2}npx & + \frac{1}{4}nnpp \\ + 2hxx & + nhx & + nnph \\ & - qx & + nnhh \\ & & - npq \\ & & - 2nqh \\ & & \underline{+ qq} \\ & & nn + 8h \end{array}$

On pourra ſuppoſer ce quarré égal au ſecond membre, à cauſe de l'indéterminée h, à laquelle on peut concevoir une valeur propre à les rendre égaux; on aura donc cette équation $\begin{array}{lll} + \frac{1}{4}nnxx & + \frac{1}{2}npx & + \frac{1}{4}nnpp \\ + 2hxx & + nhx & + nnph \\ & - qx & + nnhh \\ & & - npq \\ & & - 2nqh \\ & & \underline{+ qq} \\ & & nn + 8h \end{array} = \begin{array}{lll} \frac{1}{4}nnxx & + \frac{1}{2}npx & + \frac{1}{4}pp \\ + 2hxx & + nhx & + ph \\ & - qx & + hh \\ & & - r \end{array}$

laquelle ſe réduit à $\dfrac{\begin{array}{lll} nnhh & + nnph & + \frac{1}{4}nnpp \\ & - 2nqh & - npq \\ & & + qq \end{array}}{nn + 8h} = \begin{array}{l} hh + ph + \frac{1}{4}pp \\ \qquad\qquad - r \end{array}$

Cette équation étant miſe en ordre par raport à l'inconnue h, l'on aura $\begin{array}{llll} 8h^3 & + 8phh & + 2nqh & + npq = 0 \\ & & + 2pph & - qq \\ & & - 8rh & - nnr \end{array}$, qui eſt une équation du troiſiéme degré, qui n'a pour toute inconnue que l'indéterminée h, & qui eſt comme une eſpece de réduite. On trouvera la valeur de h lorſqu'elle eſt commenſurable par 56, ou par les méthodes du 3ᵉ degré. On peut donc

donc à present la ſuppoſer comme connue, mais on conſervera h au lieu de ſa valeur pour abreger ; ainſi h doit être regardée comme connue.

3°. L'on a par ce qui précede $xx + \frac{1}{2}nx + \frac{1}{2}p + h$

$$= \sqrt{\begin{matrix}\frac{1}{4}nnxx & + \frac{1}{2}npx & + \frac{1}{4}pp \\ + 2hxx & + nhx & + ph \\ & - qx & + hh \\ & & - r\end{matrix}} = \sqrt{\begin{matrix}\frac{1}{4}nnxx & + \frac{1}{2}npx & + \dfrac{\begin{matrix}+ nnhh \\ + nnph \\ - 2nqh \\ + \frac{1}{4}nnpp \\ - npq \\ + qq\end{matrix}}{nn + 8h} \\ + 2hxx & + nhx & \\ & - qx & \end{matrix}}$$

$$= x\sqrt{\tfrac{1}{4}nn + 2h} + \frac{\frac{1}{2}np + nh - q}{2\sqrt{\frac{1}{4}nn + 2h}};$$ on a donc l'équation du 2ᵉ degré $xx + \frac{1}{2}nx + \frac{1}{2}p + h = x\sqrt{\frac{1}{4}nn + 2h} + \dfrac{\frac{1}{2}np + nh - q}{2\sqrt{\frac{1}{4}nn + 2h}}$,

ou bien $$xx + \tfrac{1}{2}nx - x\sqrt{\tfrac{1}{4}nn + 2h} + \tfrac{1}{2}p + h + \frac{-\frac{1}{2}np - nh + q}{2\sqrt{\frac{1}{4}nn + 2h}} = 0.$$

On réſoudra cette équation du ſecond degré,* & l'on aura deux racines de l'équation propoſée du quatriéme degré. *75.

L'équation du ſecond degré, qui contiendra les deux autres racines, ſera $$xx + \tfrac{1}{2}nx + x\sqrt{\tfrac{1}{4}nn + 2h} + \tfrac{1}{2}p + h + \frac{+\frac{1}{2}np + nh - q}{2\sqrt{\frac{1}{4}nn + 2h}} = 0;$$

car le produit de ces deux équations du ſecond degré eſt la propoſée elle-même $x^4 + nx^3 + pxx + qx + r = 0$, en ſuppoſant que $$\frac{\begin{matrix}- nnhh \\ - nnph \\ + 2nqh \\ - \frac{1}{4}nnpp \\ + npq \\ - qq\end{matrix}}{nn + 8h} + hh + ph + \tfrac{1}{4}pp = r$$

ce qui eſt évident par l'équation $$\frac{nnhh + nnph + \frac{1}{4}nnpp - 2nqh - npq + qq}{nn + 8h}$$

$= hh + ph + \frac{1}{4} pp - r$, puiſqu'il n'y a qu'à tranſpoſer r dans le premier membre, & la quantité qui fait le premier membre dans le ſecond membre.

On appliquera cette ſeconde méthode aux exemples, comme on a fait la premiere, ſans qu'il ſoit neceſſaire de s'y arrêter.

SECTION IV.

De la réſolution des équations du cinquiéme & ſixiéme degré, & des autres degrez plus élevez.

AVERTISSEMENT.

LES équations des degrez plus élevez que le quatriéme, viennent rarement en uſage; ainſi il ſuffira de donner ici les ouvertures neceſſaires pour les réſoudre quand il s'en preſentera, ſans entrer dans un détail ſemblable à celui où l'on eſt entré pour les autres degrez inferieurs, à cauſe de leur uſage continuel dans les Problêmes de Geometrie; & même les méthodes qu'on y a données pourront aider à en former de ſemblables pour les degrez plus élevez.

PROBLÊME VII.

213. *RESOUDRE les équations du cinquiéme & ſixiéme degré, & même des degrez plus élevez.*

I.

Lorſque les racines ſont commenſurables, ou du moins quelqu'une.

ON ſe ſervira de la méthode generale de la premiere Section du quatriéme Livre; c'eſt-à-dire, on diviſera la propoſée par une équation ſimple faite de l'inconnue de la propoſée + ou − chaque diviſeur du dernier terme; & s'il y a quelque racine commenſurable, on trouvera toujours une de ces équations ſimples, qui fera la diviſion ſans reſte. On operera enſuite ſur le quotient, comme on a fait ſur la propoſée; & ſi les racines ſont toutes commenſurables, on les trouvera par cette méthode les unes après les autres; s'il n'y en a que quelques-unes, on trouvera enfin pour quotient une équation d'un moindre degré que la propoſée, dont on trouvera les racines par les Problêmes précedens, ſi elle ne paſſe pas le 4[e] degré : ſi elle le paſſe, on operera comme dans les cas qui ſuivent.

II.

Lorsque les racines étant toutes incommensurables, la proposée est composée d'équations plus simples commensurables.

On réduira toujours, par les Problêmes de la troisiéme Section du quatriéme Livre, les équations composées aux équations plus simples qui la composent, lorsqu'elles sont commensurables; & ensuite si ces équations plus simples ne passent pas le quatriéme degré, on les résoudra par les Problêmes des Sections précedentes.

III.

Lorsque les coëficiens des équations plus simples qui composent la proposée (qu'on suppose sans incommensurables) renferment des incommensurables.

On tâchera de trouver des équations plus simples indéterminées, dont les coëficiens indéterminez contiennent des incommensurables, & dont le produit fasse une équation indéterminée qui soit du même degré que la proposée, & sans incommensurables, comme l'on en a vû des exemples dans la Section précedente. * On comparera les termes du pro- *104.
duit indéterminé des équations composantes, avec les ter- & 105.
mes correspondans de la proposée; & par les équations particulieres qui naîtront de ces comparaisons, on déterminera les grandeurs indéterminées des équations composantes, ce qui donnera la résolution de la proposée, lorsqu'on la peut trouver par cette voye.

Après les ouvertures qu'on vient de donner pour résoudre les équations qui passent le quatriéme degré, on ajoutera une méthode qui convient à tous les degrez; mais comme elle demande des calculs rebutans, ce qui la rend assez inutile dans la pratique, on l'appliquera seulement au troisiéme degré.

Méthode pour résoudre les équations de tous les degrez.

114. ON supposera une équation indéterminée moindre d'un degré que la proposée qu'on veut résoudre, dont l'inconnue soit celle de la proposée, qui ait une indéterminée pour le coëficient de chacun de ses termes, & deux indéterminées lineaires pour son dernier terme. Par exemple, si la proposée est du troisiéme degré, comme $x^3 - nxx + px - q = 0$, on

supposera l'équation indéterminée $\begin{array}{l} xx - fx - g = 0. \\ \qquad\qquad\;\; - h \end{array}$

Si la proposée est du 4e degré, comme $x^4 - nx^3 + pxx - qx + r = 0$, on supposera l'équation indéterminée $\begin{array}{l} x^3 - fxx - gx - h = 0. \\ \qquad\qquad\quad\;\; - i \end{array}$

Si la proposée est du 5e degré, comme $x^5 - nx^4 + px^3 - qxx + rx - s = 0$, on supposera l'équation indéterminée $\begin{array}{l} x^4 - fx^3 - gxx - hx - i = 0; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\;\; - k \end{array}$ & ainsi des autres.

Pour abreger le calcul, on fera d'abord évanouir le second terme de la proposée ; ainsi l'on supposera que l'équation du troisiéme degré, à laquelle on va appliquer la méthode, est par exemple, $x^3 - px - q = 0$.

On cherchera le plus grand diviseur commun de la proposée & de l'équation indéterminée $\begin{array}{l} xx - fx - g = 0; \\ \qquad\qquad\;\; - h \end{array}$ & l'on continuera l'operation jusqu'à ce qu'on soit arrivé à un reste où l'inconnue x ne soit plus.

On prendra dans le dernier diviseur où x est lineaire, & qui a donné ce dernier reste, la valeur de x, & on la mettra à part. Ce dernier diviseur est $\begin{array}{ll} -px & -q = 0, \\ +gx & +fg \\ +hx & +fh \\ +ffx & \end{array}$ & la valeur de x prise dans ce diviseur, supposé égal à zero, est $x = \frac{-fg - fh + q}{ff + g + h - p}$; on supposera le reste dans lequel x n'est plus, égal à zero, & on ordonnera l'équation de ce reste par raport à l'une des deux indéterminées du dernier terme de l'équation supposée laquelle on voudra, qui sera l'inconnue de ce reste, & l'on aura la réduite

$$\begin{array}{llll} g^3 & -2pgg & +ppg & +pph = 0. \\ & +3hgg & -4phg & -2phh \\ & & -pffg & -pffh \\ & & +3hhg & +h^3 \\ & & +3qfg & -pqf \\ & & & +3qfh \\ & & & +qf^3 \\ & & & -qq \end{array}$$

On supposera le second & le troisiéme terme de cette réduite chacun égal à zero, & que la réduite est elle-même

égale à zero, ce qui donnera trois équations particulieres, qui serviront à déterminer les trois indéterminées h, f, g; sçavoir h par l'équation qui naîtra du second terme égal à zero, f par celle du troisiéme, & g par la supposition que le premier terme & le dernier sont ensemble égaux à zero: ces trois équations sont la 1re, $-2p+3h=0$; ainsi $h=\frac{2}{3}p$: la 2e, $+pp-4ph-pff+3hh+3qf=0$; la 3e, $g^3+pph-2phh-pffh+h^3-pqf+3qfh+qf^3-qq=0$. Substituant la valeur de h dans la seconde équation, & la mettant en ordre par raport à l'indéterminée f, on aura l'équation du second degré $ff-\frac{3qf}{p}+\frac{p}{3}=0$; on trouvera par cette équation deux valeurs de f, la premiere $f=\frac{3q}{2p}+\sqrt{\frac{9qq}{4pp}-\frac{p}{3}}$; la seconde, $f=\frac{3q}{2p}-\sqrt{\frac{9qq}{4pp}-\frac{p}{3}}$; multipliant chaque terme de $-\frac{p}{3}$ par $9pp$, l'on changera l'expression $\sqrt{\frac{9qq}{4pp}-\frac{p}{3}}$ en celle-ci, $\sqrt{\frac{9qq}{4pp}-\frac{9p^3}{27pp}}=\frac{3}{p}\sqrt{\frac{qq}{4}-\frac{p^3}{27}}$; ainsi $f=\frac{3}{p}\times\frac{q}{2}\pm\frac{3}{p}\sqrt{\frac{qq}{4}-\frac{p^3}{27}}=\frac{3}{p}\times\overline{\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}$: Substituant la valeur de h & celle de f dans la troisiéme équation particuliere, qui est $g^3+pph-2phh-pffh+h^3-pqf+3qfh+qf^3-qq=0$, on aura $g^3+\frac{27q^4}{2p^3}+\frac{8p^3}{27}-4qq+\overline{\frac{27q^3}{p^3}-4q}\times\pm\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}=0$; d'où l'on déduira $g=\sqrt[3]{-\frac{27q^4}{2p^3}-\frac{8p^3}{27}+4qq-\overline{\frac{27q^3}{p^3}+4q}\times\pm\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}$.

On substituera les valeurs qu'on vient de trouver des trois indéterminées f, g, h, dans $x=\frac{+q-fg-fh}{ff+g+h-p}$; mais pour abreger l'expression & le calcul, on laissera g au lieu de sa valeur, & l'on aura

$$x=\frac{\frac{-3qg}{2p}+\overline{\frac{3g}{p}+2}\times\mp\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}{\frac{-2p}{3}+g+\frac{9qq}{2pp}+\frac{9q}{pp}\times\pm\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}.$$

Cette valeur de x est une racine de la proposée.

Application de cette méthode à un exemple.

POUR trouver par cette méthode la racine de $x^3-24x-72=0$, on supposera $p=24$, & $q=72$; & substituant ces valeurs de p, q, l'on aura $h=\frac{2}{3}p=16$.

$+\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}=+28$, & $-\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}=-28$.

$f=\frac{3q}{2p}+\frac{3}{p}\times+\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}=+8$, 1re valeur de f.

$f=\frac{3q}{2p}+\frac{3}{p}\times-\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}=+1$, 2e valeur de f.

On trouvera de même la valeur de $g = \sqrt[3]{-\frac{27q^4}{2p^3} - \frac{8p^3}{27} + 4qq - \overline{\frac{27q^3}{p^3} + 4q} \times + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$, en substituant les valeurs de p, q, comme on le voit ici : $-\frac{27q^4}{2p^3} = -26244$. $-\frac{8p^3}{27} = -4096$. $-\overline{\frac{27q^3}{2p^3} + 4q} \times + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} = -12348$; ainsi $-\frac{27q^4}{2p^3} - \frac{8p^3}{27} - \overline{\frac{27q^3}{p^3} + 4q} \times + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} = -42688$; & $+4qq = +20736$; donc $-\frac{27q^4}{2p^3} - \frac{8p^3}{27} - \overline{\frac{27q^3}{p^3} + 4q} \times + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} + 4qq = g^3 = -21952$; tirant la racine cubique, on aura $g = -28$: c'est la valeur de g déduite de la 1re valeur de f où il y a $+\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} = +28$.

On trouvera, si l'on veut, une seconde valeur de g, en se servant de la seconde valeur de f où il y a $-\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} = -28$; en voici le calcul, $+4qq = +20736$. $-\overline{\frac{27q^3}{p^3} + 4q} \times -\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} = +12348$; ainsi $+4qq - \overline{\frac{27q^3}{p^3} + 4q} \times -\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} = +33084$; & $-\frac{27q^4}{2p^3} - \frac{8p^3}{27} = -30340$; donc $-\frac{27q^4}{2p^3} - \frac{8p^3}{27} + 4qq - \overline{\frac{27q^3}{p^3} + 4q} \times -\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} = +2744 = g^3$; tirant la racine cubique, on aura $g = +14$; c'est la seconde valeur de g déduite de la 2e valeur de f, dans laquelle il y a $-\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} = -28$. Après avoir trouvé les valeurs de f, g, h, on les substituera avec celles de p, q, dans l'équation de la racine mise à part $x = \frac{q - fg - fh}{ff + g + h - p}$, observant que si l'on substitue la premiere valeur de $g = -28$, il faut substituer à même temps la premiere valeur de $f = +8$; & que si l'on substitue la seconde valeur de $g = +14$, il faut substituer à même temps la seconde valeur de $f = +1$; & l'on trouvera toujours que la racine de la proposée est $x = +6$. *Ce qui étoit proposé.*

Démonstration de cette méthode.

LE dernier diviseur $-px + gx + hx + ffx - q + fg + fh = 0$, d'où l'on déduit $x = \frac{+q - fg - fh}{ff + h + g - p}$, qui donne par la supposition un reste égal à zero, étant déterminé par la supposition des valeurs des trois indéterminées f, g, h, qu'on trouve en supposant la réduite égale à zero, & chacun de ses deux termes moyens aussi égal à zero ; ce dernier divi-

seur, dis-je, dans lequel l'inconnue x est lineaire, étant devenu déterminé, est necessairement un diviseur exact de l'équation proposée, puisque par la démonstration de la méthode de trouver le plus grand diviseur commun de deux équations qui ont la même inconnue, il est un diviseur exact de la proposée & de l'équation feinte ou indéterminée $xx - fx \begin{array}{l} - g \\ - h \end{array} = 0$, lorsqu'elle est devenue réelle & déterminée; car il ne laisse point de reste, ou, ce qui est la même chose, il laisse un reste égal à zero. Mais une équation où x est lineaire, & qui divise exactement la proposée, en contient une racine par la formation des équations. La méthode fait donc trouver une racine de la proposée. *Ce qu'il faloit démontrer.*

Remarques sur cette méthode.

I.

L'ART de cette méthode consiste, 1°. à pouvoir représenter par le moyen des indéterminées f, g, h, une équation $xx - fx \begin{array}{l} - g \\ - h \end{array} = 0$, moindre d'un degré que la proposée, qui ait une racine commune, c'est-à-dire un diviseur commun où x soit lineaire, avec la proposée; 2°. à trouver ce diviseur commun par la méthode de trouver le plus grand diviseur commun, d'une maniere indéterminée; 3°. à pouvoir déterminer, en supposant que ce dernier diviseur commun ne laisse aucun reste, par le moyen du reste supposé égal à zero, & chacun de ses termes moyens aussi égal à zero, les valeurs des indéterminées f, g, h, propres à rendre réelle l'équation indéterminée $xx - fx \begin{array}{l} - g \\ - h \end{array} = 0$, qui a une racine commune ou un diviseur commun avec la proposée dans lequel x est lineaire, & propres aussi à rendre réel ce diviseur commun qui contient une racine de la proposée.

II.

Quand on a trouvé les valeurs des indéterminées f, g, h, il est d'ordinaire plus court de les substituer immédiatement dans l'équation indéterminée de la valeur de la racine $x = \frac{+q - fg - fh}{ff + g + h - p}$, que de se servir de la formule $x = \frac{- \frac{3qg}{2p} +, \text{\&c.}}{- \frac{2p}{3} +, \text{\&c.}}$

III.

On a mis deux indéterminées g & h au dernier terme de l'équation indéterminée $xx - fx - g = 0$; parceque
$ - h$
si l'on n'en mettoit qu'une seule, on trouveroit une réduite dont le second terme n'auroit qu'une seule grandeur, ce qui obligeroit à faire évanouir ce second terme, & demanderoit un plus long calcul.

IV.

La valeur de f contenant la grandeur $\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$, qui est imaginaire quand $\frac{1}{27}p^3$ surpasse $\frac{1}{4}qq$, cette méthode n'est utile que quand $\frac{1}{4}qq$ surpasse $\frac{1}{27}p^3$, ou quand il y a $\sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$; ainsi cette méthode fait à la verité toujours trouver une formule de la racine qu'on cherche, mais cette formule contient dans plusieurs cas des expressions imaginaires lorsque la racine est réelle.

V.

Cette méthode s'étend à tous les degrez, pourvû qu'on aille de suite; car si on l'applique aux degrez les plus élevez, on verra que pour trouver la premiere indéterminée par l'équation du second terme de la réduite supposé égal à zero, l'équation à résoudre sera lineaire; l'équation du 3e terme de la réduite supposé égal à zero, qui sert à trouver la seconde indéterminée, sera du second degré; l'équation du 4e terme, qui servira à trouver la troisiéme indéterminée, sera du 3e degré, & ainsi de suite.

Remarques sur les Problèmes précedens.

I.

115. LES Problêmes de ce Livre ne servent pas seulement à résoudre les équations composées qui n'ont qu'une inconnue, ils servent aussi à résoudre celles qui ont deux ou plusieurs inconnues; car dans ce cas il faut les regarder comme des grandeurs connues, excepté une seule, par raport à laquelle l'équation sera ordonnée, & ensuite résoudre l'équation par les Problêmes de ce Livre.

II.

On peut toujours trouver les racines commensurables des équations, de quelque degré qu'elles puissent être, par la méthode generale du quatriéme Livre. On peut toujours trouver

trouver les racines des équations du second degré, quoiqu'elles soient incommensurables, par le premier Problême de ce Livre. On peut trouver celles des équations du 3e degré quand elles sont commensurables & incommensurables, excepté dans le seul cas irréductible, où toutes les racines sont réelles & incommensurables; car on a vû que la formule de la racine dans ce cas, renferme des expressions imaginaires, qu'on ne peut pas faire évanouir par les Problêmes de la seconde Section.

On peut toujours trouver les racines des équations du quatriéme degré, excepté dans les cas où la résolution renferme le cas irréductible du troisiéme degré, par les Problêmes de la troisiéme Section. On a aussi donné plusieurs ouvertures pour trouver les racines des équations des degrez plus élevez que le quatriéme, dans cette Section.

SECTION V.

Où l'on explique la maniere de trouver les racines des grandeurs complexes incommensurables, par le moyen des équations.

DÉFINITION.

QUAND une grandeur complexe contient plusieurs grandeurs incommensurables, ou seules, ou avec des grandeurs commensurables, comme $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$, ou $a+\sqrt{b}$, &c. chacune des grandeurs incommensurables differentes est un *terme* de la grandeur complexe; & quand il y a des grandeurs commensurables, elles ne font toutes ensemble qu'un seul terme de la grandeur complexe; ainsi $a+\sqrt{b}$ contient deux termes; de même $a+b+\sqrt[3]{c}$ ne contient que deux termes; $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ contient trois termes; & ainsi à l'infini. Une grandeur complexe incommensurable qui a deux termes, s'appelle un *binome*; quand elle a trois termes, un *trinome*; quand elle en a quatre, un *quadrinome*; & ainsi de suite; $a+b+\sqrt{c}$ est un binome; $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ est trinome, &c.

PROBLÊME VIII.

116. *TROUVER la racine* 2e, 3e, 4e, *&c. d'une grandeur complexe incommensurable.*

MÉTHODE.

1°. IL faut ſuppoſer une grandeur complexe incommenſurable, qui repréſente par des grandeurs indéterminées la racine de la propoſée qu'on cherche ; cette grandeur qu'on ſuppoſe doit avoir ces conditions : 1°. qu'il y ait une indéterminée dans chaque terme de la grandeur qu'on ſuppoſe repréſenter la racine qu'on cherche : 2°. qu'en élevant cette grandeur ſuppoſée à la puiſſance dont l'expoſant eſt celui de la racine qu'on cherche, c'eſt-à-dire ; l'élevant au quarré ſi on cherche la racine quarrée ; à la troiſiéme puiſſance, ſi on cherche la racine cubique, &c. la grandeur complexe incommenſurable qu'on trouvera, ait preciſément le même nombre de termes, & diſpoſez de la même maniere & avec les mêmes ſignes que la propoſée ; c'eſt-à-dire, ſi la propoſée eſt un binome, & qu'on en cherche la racine quarrée, il faut ſuppoſer une grandeur complexe qui repréſente la racine, telle que ſon quarré ſoit un binome ſemblable ; ſi la propoſée eſt un trinome, que le quarré de la ſuppoſée ſoit un trinome ſemblable ; ſi l'on cherche la racine cubique de la propoſée, que la troiſiéme puiſſance de la grandeur ſuppoſée ſoit un binome, un trinome, &c. ſemblable à la propoſée ; ſi elle eſt un binome, un trinome, &c. cette condition doit regler les ſignes radicaux de la grandeur qu'on ſuppoſera repréſenter la racine ; ces ſignes radicaux doivent avoir ordinairement les mêmes expoſans que dans la propoſée ; c'eſt-à-dire, ſi les ſignes radicaux de la propoſée ſont $\sqrt[2]{}$, ceux de la grandeur ſuppoſée doivent être pour l'ordinaire $\sqrt[2]{}$; ſi les ſignes radicaux de la propoſée ſont $\sqrt[3]{}$, ceux de la grandeur ſuppoſée doivent auſſi être pour l'ordinaire $\sqrt[3]{}$, &c. il y a pourtant quelque cas où ils doivent être differens.

2°. Il faut élever au quarré la grandeur ſuppoſée, ſi l'on cherche la racine quarrée de la propoſée ; à la troiſiéme puiſſance, ſi l'on cherche la racine cubique ; & ainſi de ſuite ; & ſuppoſant que la grandeur complexe ainſi élevée repréſente la propoſée, on les comparera l'une avec l'autre terme

à terme ; c'eſt-à-dire, on ſuppoſera les termes de l'une égaux aux termes correſpondans de l'autre ; ce qui donnera les équations particulieres propres à trouver les valeurs des indéterminées qu'on a ſuppoſées.

3°. On réduira toutes ces équations particulieres à une ſeule qui ne contienne pour inconnue qu'une ſeule des indéterminées qu'on a ſuppoſées, & on trouvera les valeurs de cette indéterminée par les Problêmes précedens ; & par le moyen de cette valeur, on trouvera, en ſe ſervant des équations particulieres qu'a donné la ſuppoſition des termes correſpondans égaux, les valeurs de toutes les indéterminées qu'on a ſuppoſées.

4°. On ſubſtituera ces valeurs à la place des indéterminées dans la grandeur complexe indéterminée qu'on a priſe pour repréſenter la racine de la propoſée qu'on cherche ; & après les ſubſtitutions, elle ſera la racine qu'on cherchoit.

REMARQUE.

SI l'indéterminée qui ſert d'inconnue à l'équation du troiſiéme article, qui ne contient qu'une ſeule indéterminée, a pluſieurs valeurs réelles, chacune de ces valeurs pourra ſervir à trouver la racine qu'on cherche.

Tout ce qu'on vient de dire s'éclaircira par l'application qu'on en va faire à des exemples.

EXEMPLE I.

POUR trouver la racine quarrée du binome $+7+\sqrt{48}$: 1°. on ſuppoſera que le binome $+f+\sqrt{g}$ repréſente la racine qu'on cherche, f & g ſont des grandeurs indéterminées. 2°. On élevera $+f+\sqrt{g}$ au quarré, & l'on aura $ff+g+2f\sqrt{g}$, qui eſt un binome ſemblable au propoſé, en prenant la grandeur commenſurable $ff+g$ pour un ſeul terme du binome $ff+g+2f\sqrt{g}$. On ſuppoſera que $ff+g+2f\sqrt{g}$ repréſente le binome propoſé $+7+\sqrt{48}$, & que les termes correſpondans ſont égaux, ſçavoir la grandeur commenſurable $ff+g$ égale à la grandeur commenſurable $+7$, & l'incommenſurable $+2f\sqrt{g}$ égale à l'incommenſurable $\sqrt{48}$. On a donc les deux équations particulieres : 1re, $ff+g=7$; 2e, $+2f\sqrt{g}=\sqrt{48}$. 3°. Pour dégager les indéterminées, on élevera au quarré chacune de ces équations, & l'on aura

$f^4 + 2ffg + gg = 49$, & $4ffg = 48$. On ôtera le premier membre $4ffg$ du premier membre $f^4 + 2ffg + gg$, & le second 48 du second 49; & l'on aura $f^4 - 2ffg + gg = 49 - 48 = 1$; tirant la racine quarrée de chaque membre, on trouvera $ff - g = \sqrt{1} = 1$, d'où l'on déduira $g = ff - 1$. On substituera cette valeur de g dans l'équation $ff + g = 7$, & l'on aura $2ff - 1 = 7$, d'où l'on déduira $ff = 4$, & $f = 2$; mettant cette valeur de ff dans $g = ff - 1$, on trouvera $g = 3$. 4°. On substituera les valeurs de f & de g dans $f + \sqrt{g}$, qui représente la racine qu'on cherche, & après les substitutions l'on aura $f + \sqrt{g} = 2 + \sqrt{3}$; c'est la racine quarrée de $7 + \sqrt{48}$ que l'on cherchoit.

EXEMPLE II.

POUR trouver la racine quarrée de $-1 + \sqrt{-8}$, 1°. on supposera que $+ f + \sqrt{-g}$ represente la racine qu'on cherche; f & g sont indéterminées. 2°. On élevera $+ f + \sqrt{-g}$ au quarré, & l'on aura $ff - g + 2f\sqrt{-g}$ (par la supposition) $= -1 + \sqrt{-8}$, on supposera $ff - g = -1$, & $2f\sqrt{-g} = +\sqrt{-8}$. 3°. Elevant chacune de ces équations au quarré, on trouvera $f^4 - 2ffg + gg = 1$, & $4ffg = 8$; on ajoutera ensemble ces deux équations, & l'on aura $f^4 + 2ffg + gg = 9$; tirant la racine quarrée de chaque membre, on trouvera $ff + g = 3$, d'où l'on déduira $g = 3 - ff$; on substituera cette valeur de g dans $ff - g = -1$, & l'on aura $2ff = 2$, $ff = 1$, & $f = 1$; on substituera cette valeur de ff dans $g = 3 - ff$, & l'on trouvera $g = 2$. 4°. On substituera les valeurs de f & de g dans $f + \sqrt{-g}$, & l'on aura $f + \sqrt{-g} = 1 + \sqrt{-2}$. C'est la racine quarrée de $-1 + \sqrt{-8}$ que l'on cherchoit.

EXEMPLE III.

POUR trouver la racine quarrée du quadrinome $10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}$: 1°. on supposera que $\sqrt{f} + \sqrt{g} + \sqrt{h}$ est l'expression indéterminée de cette racine; f, g, h, sont indéterminées. 2°. On élevera $\sqrt{f} + \sqrt{g} + \sqrt{h}$ au quarré, & l'on aura $f + g + h + 2\sqrt{fg} + 2\sqrt{fh} + 2\sqrt{gh} =$ (par la supposition) $= 10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}$; en comparant les termes correspondans, on aura les équations suivantes: 1re, $2\sqrt{fg} = \sqrt{24}$; 2e, $2\sqrt{fh} = \sqrt{40}$; 3e, $2\sqrt{gh} = \sqrt{60}$; 4e, $f + g + h = 10$,

3°. Pour dégager les indéterminées qu'on regarde comme des inconnues, on ôtera les incommensurables, & l'on aura 1re, $4fg = 24$; 2e, $4fh = 40$; 3e, $4gh = 60$. On trouvera par la 1re $f = \frac{6}{g}$, & par la 2e, $f = \frac{10}{h}$; par conséquent $\frac{6}{g} = \frac{10}{h}$, & $6h = 10g$, & $g = \frac{3h}{5}$. Par la 3e, on trouvera $g = \frac{15}{h}$; par conséquent $\frac{3h}{5} = \frac{15}{h}$; d'où l'on déduira $hh = 25$, & $h = 5$. On mettra cette valeur de h dans $g = \frac{3h}{5}$, & l'on trouvera $g = 3$. On substituera cette valeur de g dans $f = \frac{6}{g}$; & l'on aura $f = 2$. Les valeurs de toutes les indéterminées étant trouvées, on les substituera dans la 4e équation $f + g + h = 10$; & comme l'on trouve $2 + 3 + 5 = 10$, c'est une marque qu'on a découvert les véritables valeurs des indéterminées. 4°. On substituera ces valeurs dans $\sqrt{f} + \sqrt{g} + \sqrt{h}$, & l'on aura $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$, pour la racine que l'on cherchoit de $10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}$.

AVERTISSEMENT.

TOUT *l'article* 96 contient des exemples où l'on trouve par cette méthode la racine cubique d'un binome qui n'a que le signe radical $\sqrt[3]{}$; ainsi il est inutile d'en mettre ici d'autres exemples.

Pour trouver la racine 4e d'une grandeur complexe incommensurable, il faudra d'abord chercher par la méthode la racine 2e de la proposée, & ensuite la racine 2e de la racine qu'on vient de découvrir, & elle sera la racine 4e de la proposée.

De même pour trouver la racine 6e d'une grandeur complexe incommensurable, il faudra d'abord chercher la racine 2e de la proposée, & ensuite la racine 3e de cette racine, & elle sera la racine 6e de la proposée.

Pour en trouver la racine 9e, on cherchera d'abord la racine 3e; & ensuite la racine 3e de cette racine, & elle sera la racine 9e de la proposée; & ainsi des autres racines dont l'exposant peut se diviser par des nombres entiers.

EXEMPLE IV.

POUR trouver la racine 3e de $5 + \sqrt[3]{324} + \sqrt[3]{486}$; 1°. on supposera que l'expression indéterminée de cette racine est $\sqrt[3]{f} + \sqrt[3]{g}$; 2°. on prendra la troisiéme puissance de cette

expreſſion, & l'on aura $f + g + 3\sqrt[3]{ffg} + 3\sqrt[3]{fgg}$ pour l'expreſſion indéterminée de la propoſée; on ſuppoſera leurs termes correſpondans égaux, & l'on aura les trois équations ſuivantes: 1re, $f + g = 5$; 2e, $3\sqrt[3]{ffg} = \sqrt[3]{324}$; 3e, $3\sqrt[3]{fgg} = \sqrt[3]{486}$. 3°. Pour dégager les indéterminées, on ôtera les incommenſurables de la ſeconde & troiſiéme équation, & l'on aura pour la ſeconde $27ffg = 324$; d'où l'on déduira $ffg = 12$, & $g = \frac{12}{ff}$; on aura pour la troiſiéme $27fgg = 486$, d'où l'on déduira $fgg = 18$, & $f = \frac{18}{gg}$. On prendra la valeur de gg dans l'équation $g = \frac{12}{ff}$, & l'on aura $gg = \frac{144}{f^4}$; & on la ſubſtituera dans $f = \frac{18}{gg}$, & l'on trouvera $f = \frac{18f^4}{144}$, qui ſe réduit à $f = \frac{f^4}{8}$, qui donnera $f^3 = 8$, & $f = 2$. On ſubſtituera la valeur de $ff = 4$ dans $g = \frac{12}{ff}$, & l'on aura $g = 3$. Les valeurs de toutes les indéterminées étant découvertes, on les ſubſtituera dans la premiere équation $f + g = 5$; & comme l'on trouve $5 = 5$, c'eſt une marque qu'on a découvert les veritables valeurs de f & de g; 4°. On les ſubſtituera dans l'expreſſion indéterminée de la racine qu'on cherche, & l'on aura $\sqrt[3]{f} + \sqrt[3]{g} = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$; c'eſt la racine que l'on cherchoit.

EXEMPLE V.

POUR trouver la racine 5e de $76 + \sqrt{5808}$, 1°. on ſuppoſera que $f + \sqrt{g}$ eſt l'expreſſion indéterminée de cette racine; 2°. On l'élevera à la 5e puiſſance, & l'on aura $f^5 + 10f^3g + 5fgg + \overline{5f^4 + 10ffg + gg} \times \sqrt{g}$, pour l'expreſſion indéterminée de la propoſée. On ſuppoſera leurs termes correſpondans égaux, & l'on aura ces deux équations: 1re, $f^5 + 10f^3g + 5fgg = 76$; 2e, $\overline{5f^4 + 10ffg + gg} \times \sqrt{g} = \sqrt{5808}$; 3°. Pour dégager les indéterminées, on élevera chacune de ces équations au quarré, & l'on aura pour la premiere $f^{10} + 20f^8g + 110f^6gg + 100f^4g^3 + 25ffg^4 = 5776$; & pour la ſeconde, $25f^8g + 100f^6gg + 110f^4g^3 + 20ffg^4 + g^5 = 5808$. On ôtera la premiere de ces équations de la ſeconde, & l'on aura le reſte $-f^{10} + 5f^8g - 10f^6gg + 10f^4g^3 - 5ffg^4 + g^5 = 32$. Le premier membre de cette équation eſt la 5e puiſſance de $-ff + g$, & le ſecond eſt la 5e puiſſance de 2; ainſi tirant la racine 5e de chaque membre, on aura $-ff + g = 2$; d'où l'on déduira $g = ff + 2$, & $gg = f^4 + 4ff + 4$. On

substituera ces valeurs de g & de gg dans $f^5 + 10f^3g + 5fgg = 76$, & l'on trouvera l'équation $16f^5 + 40f^3 + 20f - 76 = 0$, qui se réduit en divisant par 4, à $4f^5 + 10f^3 + 5f - 19 = 0$, qu'on transformera, en supposant $f = \frac{h}{4}$, en $h^5 + 40h^3 + 320h - 4864 = 0$, qui a pour diviseur exact $h - 4 = 0$; ainsi $h = 4$, & $f = \frac{h}{4} = 1$. On substituera la valeur de f dans $g = ff + 2$, & l'on trouvera $g = 3$. 4°. On substituera les valeurs de f & de g qu'on vient de découvrir dans $f + \sqrt{g}$, & l'on aura $f + \sqrt{g} = 1 + \sqrt{3}$; c'est la racine 5ᵉ que l'on cherchoit.

Cette méthode n'a pas besoin de démonstration, n'étant qu'une application de la méthode qui employe les indéterminées dans les équations.

AVERTISSEMENT.

L'EXTRACTION des racines des grandeurs complexes incommensurables n'est pas d'un grand usage dans les Mathematiques; ainsi il suffit d'en avoir ici donné la méthode generale; cependant comme l'on trouve dans l'application de cette méthode plusieurs difficultez, on a cru devoir marquer les principales, & indiquer les moyens de les surmonter dans les remarques suivantes, pour ceux qui auroient de la curiosité pour cette matiere.

REMARQUES.

I.

117. LA premiere difficulté qu'on trouve, est sur le nombre des termes incommensurables qu'on doit donner à l'expression indeterminée, qu'on suppose représenter la racine qu'on cherche : si l'on veut se mettre en état de la surmonter, il faut prendre par ordre des grandeurs complexes qui ayent deux, trois, quatre termes, &c. avec le signe $\sqrt[2]{}$, comme $a + \sqrt{b}$, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, $a + \sqrt{b} + \sqrt{c}$, $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$, $a + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}$, $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}$, & ainsi de suite; les élever par ordre à la puissance 2ᵉ, 3ᵉ, 4ᵉ, &c. & remarquer le nombre des termes qu'auront ces differentes puissances, & en faire une table. Il faut faire la même chose pour les grandeurs complexes incommensurables, dont les signes radicaux seront $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$, $\sqrt[5]{}$, &c.

On connoîtra par ce moyen, quand on voudra chercher la racine 2e, 3e, &c. d'une grandeur complexe incommensurable, le nombre des termes qu'on doit supposer dans l'expression indéterminée de la racine; car ayant remarqué par exemple, qu'un binome a pour quarré un binome, qu'un trinome a pour quarré un quatrinome, qu'un quatrinome a pour quarré une grandeur complexe de sept termes, &c. (on suppose qu'il n'y a de signe radical que $\sqrt[2]{}$;) quand on voudra chercher la racine quarrée d'une grandeur incommensurable, par exemple de sept termes, il faudra supposer que l'expression de la racine a quatre termes; & ainsi des autres. Il faut cependant remarquer qu'une grandeur complexe incommensurable, dont les grandeurs qui sont sous les signes radicaux dans tous les termes, n'ont aucun diviseur commun, étant élevée à une puissance quelconque, cette puissance aura plus de termes que n'en aura une semblable puissance d'une autre grandeur complexe incommensurable d'un même nombre de termes que la premiere, mais dont les grandeurs qui sont sous les signes radicaux, ont des diviseurs communs. Par exemple le quarré de $\sqrt{f} + \sqrt{g} + \sqrt{h} + \sqrt{i}$ a sept termes, mais le quarré de $\sqrt{f} + \sqrt{g} + \sqrt{fh} + \sqrt{gh}$, n'a que quatre termes; & le quarré de $-f + \sqrt{f} + \sqrt{g} + \sqrt{fg}$, n'a que trois termes. Ces remarques aideront à déterminer le nombre des termes que l'on doit supposer dans l'expression indéterminée de la racine qu'on cherche; & les remarques qu'on pourra faire sur les signes radicaux des grandeurs complexes incommensurables qu'on aura élevées aux puissances 2e, 3e, 4e, &c. serviront à faire connoître les signes radicaux qu'on doit supposer dans l'expression indéterminée de la racine qu'on cherche.

II.

La seconde difficulté qu'on trouve en cherchant les racines des incommensurables complexes suivant la méthode, est sur la comparaison des termes de la proposée avec les termes correspondans de son expression indéterminée; car dans la plûpart des cas, sur-tout lorsqu'ils sont fort composez, on a de la peine à bien distinguer les termes correspondans. Voici ce qu'on doit faire pour ôter cette difficulté: Il faut prendre par ordre des incommensurables complexes, en nombres, 1°. avec le signe radical $\sqrt[2]{}$; 2°. avec le signe $\sqrt[3]{}$;

&

& ainſi de ſuite, & mettre de l'ordre dans les termes, mettant, par exemple, le plus petit au premier terme, celui qui ſurpaſſe immédiatement le plus petit, au ſecond terme; & ainſi de ſuite. Il faut prendre à même temps une incommenſurable complexe en lettres avec les mêmes ſignes radicaux, & qui ait le même nombre de termes; par exemple ſi l'on prend $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$, on prendra à même temps $\sqrt{f} + \sqrt{g} + \sqrt{h} + \sqrt{i}$. Il faut élever l'une & l'autre ſucceſſivement aux puiſſances 2e, 3e, 4e, &c. & ſuppoſant que les lettres du quadrinome litteral répondent, ſelon l'ordre où elles ſont, aux nombres du quadrinome numerique, & qu'elles les repréſentent, on remarquera avec attention dans chaque puiſſance, quelles ſont les grandeurs numeriques correſpondantes aux grandeurs litterales; ce qui ſera facile à diſtinguer : on remarquera auſſi dans les puiſſances de la grandeur complexe numerique, l'ordre ſuivant lequel il faut arranger les termes, afin qu'ils ſoient correſpondans à l'ordre naturel des termes de la ſemblable puiſſance de la grandeur complexe litterale. Si l'on prend la peine de ſe rendre ces operations familieres, en faiſant pluſieurs exemples de la maniere qu'on vient de l'indiquer, on diſtinguera aiſément en pratiquant la méthode, quels ſont les termes correſpondans de l'expreſſion indéterminée, & de la grandeur propoſée.

III.

Il arrive ſouvent qu'on trouve beaucoup plus d'équations particulieres, qu'on a ſuppoſé de grandeurs indéterminées dans l'expreſſion indéterminée de la racine qu'on cherche; dans ce cas le plus court eſt, quand on a trouvé les valeurs des indéterminées par autant d'équations qu'on a ſuppoſé d'indéterminées, de ſubſtituer ces valeurs dans l'expreſſion de la racine, & de l'élever enſuite à la puiſſance de la propoſée, c'eſt-à-dire au quarré, ſi on cherche une racine quarrée; à la troiſiéme puiſſance, ſi on cherche une racine cubique, &c. car ſi on trouve que cette puiſſance de la racine qu'on cherche, ſoit la même grandeur que la propoſée, on a trouvé la racine qu'on cherchoit; ſi cela n'arrive pas, il faut chercher d'autres valeurs des indéterminées, & continuer juſqu'à ce que cela arrive.

IV.

Quand l'indéterminée qui sert d'inconnue à l'équation dont il est parlé dans le troisiéme article de la méthode, qui ne contient que cette seule indéterminée, quand, dis-je, cette indéterminée n'a pas de valeur commensurable dans cette équation, il faut cesser la recherche de la racine qu'on cherchoit ; & il suffit de mettre au-devant de la proposée le signe radical avec l'exposant de la racine qu'on cherchoit ; par exemple, si l'on cherchoit la racine cubique de $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, il suffiroit d'écrire $\sqrt[3]{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$.

EXEMPLE VI.

Où l'on fait l'application des remarques précedentes.

SOIT proposé de trouver la racine quarrée de la grandeur complexe incommensurable $15 + \sqrt{8} + \sqrt{28} + \sqrt{40} + \sqrt{140} + \sqrt{56} + \sqrt{20}$, qui a sept termes.

1°. Il me faut chercher une grandeur complexe incommensurable, qui représente d'une maniere indéterminée la racine que je cherche, & dont le quarré contienne sept termes : Pour trouver combien cette racine elle-même doit contenir de termes, j'éleve au quarré le trinome $f + \sqrt{g} + \sqrt{h}$, & trouvant que le quarré ne contient que quatre termes, je prens le quadrinome $f + \sqrt{g} + \sqrt{h} + \sqrt{i}$, je l'éleve au quarré, & trouvant que son quarré $ff + g + h + i + 2f\sqrt{g} + 2f\sqrt{h} + 2f\sqrt{i} + 2\sqrt{gh} + 2\sqrt{gi} + 2\sqrt{hi}$, contient sept termes, cela me fait juger que je dois supposer pour l'expression indéterminée qui représente la racine que je cherche, un quadrinome indéterminé, comme $f + \sqrt{g} + \sqrt{h} + \sqrt{i}$; l'élever au quarré, & j'aurai $ff + g + h + i + 2f\sqrt{g} + 2f\sqrt{h} + 2f\sqrt{i} + 2\sqrt{gh} + 2\sqrt{gi} + 2\sqrt{hi}$, qui représente d'une maniere indéterminée la grandeur complexe proposée $15 + \sqrt{8} +$, &c.

2°. Pour distinguer les termes correspondans de ces deux grandeurs complexes, l'une litterale & l'autre numerique, que je suppose égales, je prens un quadrinome numerique $\sqrt{1}$ ou bien $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$, que je range de maniere que la plus petite grandeur soit la premiere, & ensuite celle qui est immédiatement plus grande ; & ainsi de suite : je la suppose représentée par le quadrinome litteral $f + \sqrt{g} + \sqrt{h} + \sqrt{i}$, de maniere que f représente 1, $\sqrt{g}$ représente $\sqrt{2}$, & ainsi de suite : j'éleve l'une & l'autre au quarré, & ordon-

nant les termes dans le quarré numerique dans le même ordre que dans le quarré litteral, je trouve $11 + \sqrt{8} + \sqrt{12} + \sqrt{20} + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}$, qui eſt repréſenté par $ff + g + h + i + 2f\sqrt{g} + 2f\sqrt{h} + 2f\sqrt{i} + 2\sqrt{gh} + 2\sqrt{gi} + 2\sqrt{hi}$; & en remarquant avec attention les termes correſpondans, je vois que la ſomme de tous les quarrez des termes $ff + g + h + i$, repréſente la ſomme des quarrez des termes qui doit être 11; que $2f\sqrt{g}$ repréſente $\sqrt{8}$; $2f\sqrt{h}$ repréſente $\sqrt{12}$; & ainſi de ſuite. Cela me fait voir qu'il faut ordonner les termes de la grandeur propoſée de maniere qu'ils aillent de ſuite en augmentant, & elle ſera $15 + \sqrt{8} + \sqrt{20} + \sqrt{28} + \sqrt{40} + \sqrt{56} + \sqrt{140}$; & alors les termes correſpondans ſeront de ſuite, & j'aurai les équations ſuivantes $ff + g + h + i = 15$, $2f\sqrt{g} = \sqrt{8}$, $2f\sqrt{h} = \sqrt{20}$, $2f\sqrt{i} = \sqrt{28}$, $2\sqrt{gh} = \sqrt{40}$, $2\sqrt{gi} = \sqrt{56}$, $2\sqrt{hi} = \sqrt{140}$.

3°. Les termes correſpondans étant ainſi diſtinguez, il ne faut plus que dégager les indéterminées regardées comme inconnues, ce qui eſt facile en ôtant d'abord les incommenſurables, & operant enſuite à l'ordinaire; & l'on trouvera par l'équation $4ffg = 8$, que $ff = \frac{2}{g}$; par l'équation $4ffh = 20$, que $ff = \frac{5}{h}$; par conſequent $\frac{2}{g} = \frac{5}{h}$, & $g = \frac{2}{5}h$; on trouvera par l'équation $4ffi = 28$, que $ff = \frac{7}{i}$, par conſequent $\frac{2}{g} = \frac{7}{i}$, & $g = \frac{2}{7}i$; on trouvera par l'équation $4gh = 40$, que $g = \frac{10}{h}$; comparant cette valeur de g avec $g = \frac{2}{5}h$, on aura $\frac{10}{h} = \frac{2}{5}h$; d'où l'on déduira $hh = 25$, & $h = 5$; on ſubſtituera cette valeur de h dans $g = \frac{2}{5}h$, & l'on trouvera $g = 2$; on ſubſtituera cette valeur de g dans $ff = \frac{2}{g}$, & l'on aura $ff = 1$, & $f = 1$; enfin on ſubſtituera la valeur de g dans $g = \frac{2}{7}i$, & l'on trouvera $i = 7$. On ſubſtituera ces valeurs de f, g, h, i, dans $f + \sqrt{g} + \sqrt{h} + \sqrt{i}$, & l'on aura $1 + \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$ pour la racine de la propoſée $15 + \sqrt{8} +$, &c. car en élevant $1 + \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$ au quarré, on trouve la propoſée $15 + \sqrt{8} +$, &c.

EXEMPLE VII.

POUR trouver la racine cubique de la grandeur complexe incommenſurable $10 + \sqrt[3]{324} + \sqrt[3]{486} + \sqrt[3]{540} + \sqrt[3]{6480} + \sqrt[3]{1215} + \sqrt[3]{1350} + \sqrt[3]{2025}$, qui a huit termes: 1°. il me faut chercher une grandeur complexe incommenſurable

qui répréſente d'une maniere indéterminée la racine de la propoſée; pour la trouver, j'éleve un trinome $\sqrt[3]{f} + \sqrt[3]{g} + \sqrt[3]{h}$ à la troiſiéme puiſſance; & voyant que ſa troiſiéme puiſſance $f + g + h + 3\sqrt[3]{ffg} + 3\sqrt[3]{fgg} + 3\sqrt[3]{ffh} + 6\sqrt[3]{fgh} + 3\sqrt[3]{ggh} + 3\sqrt[3]{fhh} + 3\sqrt[3]{ghh}$, contient huit termes, je ſuppoſe que $\sqrt[3]{f} + \sqrt[3]{g} + \sqrt[3]{h}$ répréſente d'une maniere indéterminée la racine que je cherche, & que la troiſiéme puiſſance $f + g + h + 3\sqrt[3]{ffg} +$, &c. répréſente la propoſée.

2°. Pour découvrir quels ſont les termes correſpondans de la propoſée & de la grandeur qui la répréſente, & que je lui ſuppoſe égale, j'éleve pluſieurs trinomes numeriques, comme $1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$, $1 + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{5}$, &c. à la troiſiéme puiſſance; & faiſant mes remarques ſur les troiſiémes puiſſances de tous ces trinomes, que je regarde comme répréſentées par $f + g + h + 3\sqrt[3]{ffg} +$, &c. je vois que leur plus grand terme eſt répréſenté par $6\sqrt[3]{fgh}$, & que $3\sqrt[3]{ggh}$ répréſente dans quelques-unes le plus grand terme aprés le précedent, & que dans quelques autres il eſt répréſenté par $3\sqrt[3]{ghh}$, & en d'autres par $3\sqrt[3]{fhh}$.

3°. Je compare $6\sqrt[3]{fgh}$ avec le plus grand terme de la propoſée, & j'ai la premiere équation $6\sqrt[3]{fgh} = \sqrt[3]{6480}$, je compare $\sqrt[3]{2025}$ avec $3\sqrt[3]{ghh}$, & j'ai la ſeconde équation $3\sqrt[3]{ghh} = \sqrt[3]{2025}$; je compare $\sqrt[3]{1350}$ avec $3\sqrt[3]{fhh}$, & j'ai la troiſiéme équation $3\sqrt[3]{fhh} = \sqrt[3]{1350}$; je dégage les inconnues à l'ordinaire, & je trouve $f = 2$, $g = 3$, $h = 5$.

4°. Je ſubſtitue ces valeurs de f, g, h, dans la racine que j'ai ſuppoſée, & je trouve $\sqrt[3]{f} + \sqrt[3]{g} + \sqrt[3]{h} = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{5}$. J'éleve cette racine à la troiſiéme puiſſance, & je trouve que ſa troiſiéme puiſſance eſt la propoſée $10 + \sqrt[3]{324} +$, &c. d'où je conclus que $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{5}$ eſt la racine de la propoſée.

AVERTISSEMENT.

SI la troiſiéme puiſſance de la racine que j'ai trouvée n'avoit pas été la grandeur propoſée, j'aurois changé la ſeconde & la troiſiéme équation en comparant $3\sqrt[3]{ghh}$ & $3\sqrt[3]{fhh}$ ſucceſſivement avec les plus grands termes, juſqu'à ce que j'euſſe trouvé les valeurs des indéterminées de la racine ſuppoſée, dont la troiſiéme puiſſance eût été la grandeur propoſée; ce qu'il faut entendre dans l'exemple ſixiéme, & dans tous les autres qui peuvent ſe préſenter.



ANALYSE COMPOSÉE, OV ANALYSE QUI ENSEIGNE A RESOUDRE les Problêmes qui ſe réduiſent à des équations composées.

LIVRE VI.

De l'approximation des racines des équations numeriques.

AVERTISSEMENT.

ON a expliqué dans le quatriéme Livre la maniere de trouver les racines des équations, lorſqu'elles ſont commenſurables; dans ce cas, il eſt inutile de les chercher par approximation : On a auſſi donné au même endroit la méthode de réduire une équation composée aux équations plus ſimples dont elle eſt composée, quand les produits des équations lineaires, qui contiennent les racines priſes deux à deux, ou trois à trois, &c. ſont des grandeurs commenſurables : Enfin on a donné dans le cinquiéme Livre le moyen de trouver en pluſieurs cas les expreſſions incommenſurables, mais exactes, des racines incommenſurables des équations du ſecond degré, du troiſiéme, du quatriéme, &c.

On va donner dans ce ſixiéme Livre la méthode de trouver les valeurs approchées des racines incommenſurables de toutes les équations composées numeriques, & le moyen d'approcher ces valeurs auſſi près qu'on voudra des racines exactes, qu'on ne peut pas avoir dans la derniere juſteſſe.

On expliquera dans le ſeptiéme Livre les méthodes d'approximation des racines des équations litterales ou algebriques.

SECTION I.

Où l'on explique les principes d'où dépend la méthode de trouver pour chaque racine d'une équation numerique composée, deux grandeurs, dont l'une soit moindre, & l'autre plus grande que cette racine.

DÉFINITION I.

LES grandeurs entre lesquelles se trouvent les racines d'une équation, seront nommées les *limites* de ces racines. Si l'on suppose, par exemple, toutes les racines d'une équation réelles & inégales, & que l'on nomme par ordre la premiere celle qui est la plus petite ; la seconde, celle qui est immédiatement plus grande que la premiere, & ainsi de suite ; d'autres grandeurs dont la premiere est moindre que la plus petite racine, la seconde la surpasse, mais elle est moindre que la seconde racine ; & ainsi de suite : ces autres grandeurs sont les *limites* des racines.

DÉFINITION II.

QUAND les racines d'une équation sont les limites des racines d'une équation proposée, on la nommera l'*équation des limites.*

COROLLAIRE.

LORSQUE les racines d'une équation sont les limites des racines d'une autre équation, il est évident que les racines de cette seconde sont aussi les limites des racines de la premiere équation.

THEORÊME I.

Premiere Partie.

118. *SI l'on substitue une grandeur connue quelconque positive, à la place de l'inconnue dans une équation composée, la somme connue de toutes les grandeurs de l'équation, après la substitution, est precisément le reste tout connu qu'on trouveroit en divisant l'équation par l'inconnue lineaire moins cette grandeur connue.*

PAR exemple, si on substitue la grandeur connue positive $+a$ dans $x^3 - nxx + px + q = 0$, la somme toute connue

$a^3 - naa + pa + q$ qui vient de la ſubſtitution, eſt preciſément le reſte qu'on trouve en diviſant $x^3 - nxx + px + q = 0$, par $x - a = 0$; car en faiſant la diviſion, comme on le voit ici, on trouvera que le reſte de la diviſion eſt $a^3 - naa + pa + q$.

$$\begin{array}{rrrr|l} 1x^3 & -1nxx & +1px & +q & x - a \\ & +1axx & -1nax & +pa & xx - nx + p \\ & & +1aax & -naa & \quad +ax - na \\ & & & +a^3 & \quad\quad +aa \end{array}$$

Il n'y a qu'à faire pluſieurs operations ſemblables, & ſe les rendre familieres, pour en voir la raiſon, qui paroît par l'operation même.

Seconde Partie du premier Theorême.

SI l'on ſubſtitue une grandeur négative — a *à la place de l'inconnue dans une équation, la ſomme toute connue qui naîtra de la ſubſtitution, ſera preciſément le reſte tout connu qu'on trouvera en diviſant la même équation par* x + a = 0.

IL n'y a qu'à faire l'operation pour en découvrir la raiſon.

COROLLAIRE.

IL ſuit de ce Theorême que c'eſt la même choſe de ſubſtituer une grandeur + ou — a au lieu de l'inconnue dans une équation, ou de diviſer cette équation par l'inconnue moins ou plus la grandeur a, & que l'un revient à l'autre, puiſqu'on trouve la même choſe; ce qui ſe doit entendre dans la ſuite.

THEORÊME II.

Premiere Partie.

119. *LA ſomme toute connue qui vient de la ſubſtitution d'une grandeur connue poſitive quelconque* + a, *à la place de l'inconnue d'une équation, par exemple* $x^3 - nxx + px + q = 0$, *eſt preciſément le dernier terme de la transformée qu'on trouveroit en ſuppoſant* x = z + a, *& mettant* z + a, *au lieu de* x *dans l'équation.*

CAR cette transformée ſeroit

$$\begin{array}{rcllll} x^3 & = & z^3 & + 3azz & + 3aaz & + a^3 \\ - nxx & = & 0 & - nzz & - 2naz & - naa \\ + px & = & & & + pz & + pa \\ + q & = & & & & + q. \end{array}$$

dans laquelle on voit que le dernier terme $a^3 - naa + pa + q$, eſt preciſément la ſomme qui vient de la ſubſtitution de + a au lieu de x, dans la propoſée.

Il n'y a qu'à se rendre cette operation familiere par plusieurs exemples, pour en voir la raison, qui paroît par l'operation même.

Seconde Partie du second Theorême.

LA somme toute connue qui viendroit de la substitution de la grandeur négative — a, *au lieu de* x *dans une équation, seroit precisément le dernier terme de la transformée, qu'on trouveroit en supposant* x = z — a, *& en substituant dans la proposée* z — a *au lieu de* x.

IL n'y a qu'à faire l'operation pour en voir la raison.

THEORÊME III.

120. *LES racines de la transformée d'une équation quelconque, qui vient de la substitution de* z + a = x, *à la place de l'inconnue* x, *sont les racines mêmes de la proposée; mais les racines po-*
* 38. *sitives de la proposée sont diminuées de la grandeur* a* *dans la transformée, & les racines négatives de la proposée sont aug-*
* 38. *mentées de la même grandeur* a * *dans la transformée.*

AINSI supposé que toutes les racines de la proposée soient positives, les racines de la transformée sont toutes les differences de la grandeur *a* d'avec chacune des racines de la proposée.

* 38. Ce Theorême a été démontré dans le troisiéme Livre.*

COROLLAIRE I.

121. LE dernier terme de la transformée, dont on vient de parler, étant le produit de toutes les racines de la transformée; & ces racines étant les differences de la grandeur *a* d'avec chacune des racines de la proposée, qu'on suppose toutes positives, il est évident que le dernier terme de cette transformée est le produit de toutes les differences de la grandeur *a* d'avec les racines de la proposée.

COROLLAIRE II.

122. MAIS en substituant + *a* dans la proposée à la place de *x*, la somme toute connue qui en vient est le dernier terme de la transformée dont on vient de parler, c'est pourquoi en substituant une grandeur quelconque + *a* dans une équation proposée, dont toutes les racines sont positives, à la place

place de x, la ſomme toute connue qui vient de cette ſubſtitution, eſt le produit de toutes les differences qui ſont entre la grandeur ſubſtituée a & les racines de la propoſée.

Ce Corollaire, c'eſt-à-dire que la ſomme toute connue qui vient de la ſubſtitution d'une grandeur connue a, au lieu de l'inconnue de l'équation, eſt preciſément le produit de toutes les differences qui ſont entre a & les racines de la propoſée, qu'on ſuppoſe toutes poſitives, ſe peut démontrer de cette autre maniere.

Suppoſé que les racines d'une équation ſoient b, c, d, ainſi les équations lineaires dont elle eſt compoſée, ſont $x - b = 0$, $x - c = 0$, $x - d = 0$. Si on met une grandeur connue a au lieu de x, elles ſeront changées en $a - b = 0$, $a - c = 0$, $a - d = 0$. Le produit de ces trois quantitez $a - b$, $a - c$, $a - d$, eſt évidemment le même qu'on trouveroit ſi l'on ſubſtituoit $+ a$ au lieu de x dans l'équation compoſée $\begin{array}{l} x^3 - bxx, \\ \quad\;\, - cxx \\ \quad\;\, - dxx \end{array}$ &c. qui eſt le produit des trois équations ſimples $x - b = 0$, $x - c = 0$, $x - d = 0$. Mais il eſt évident que le produit des trois quantitez $a - b$, $a - c$, $a - d$, eſt le produit des trois differences qui ſont entre la grandeur a & les trois racines b, c, d de la propoſée: donc ſi l'on ſubſtitue une grandeur a au lieu de l'inconnue d'une équation dont toutes les racines ſont poſitives, la ſomme toute connue qui en vient, eſt le produit des differences qui ſont entre a & les racines de l'équation.

REMARQUES.

I.

SI la grandeur a qu'on ſubſtitue à la place de l'inconnue dans une équation dont toutes les racines ſont poſitives, eſt zero, ou une grandeur moindre que la plus petite des racines, il eſt évident que toutes les differences $0 - b$, $0 - c$, $0 - d$, ou $a - b$, $a - c$, $a - d$, ſont toutes négatives, & ont les mêmes ſignes $-$ qu'ont toutes les racines dans les équations lineaires $x - b = 0$, $x - c = 0$, $x - d = 0$: par conſequent le produit de toutes les differences, c'eſt-à-dire la ſomme toute connue qui viendra de la ſubſtitution de a au lieu de x dans l'équation, aura le même ſigne que

le dernier terme de l'équation qui eſt le produit des racines $-b$, $-c$, $-d$.

I I.

Si la grandeur a ſurpaſſe la premiere racine qui eſt la plus petite, & qu'elle ſoit ſurpaſſee par la ſeconde racine, il eſt évident que la premiere difference $a-b$ eſt poſitive, & que toutes les autres $a-c$, $a-d$, ſont négatives : par conſequent le produit de toutes les differences $a-b$, $a-c$, $a-d$, qui eſt la ſomme qui vient de la ſubſtitution de a au lieu de x dans l'équation, aura un ſigne different de celui du dernier terme de l'équation.

I I I.

Si la grandeur a ſurpaſſe les deux premieres racines, & qu'elle ſoit moindre que la troiſiéme, il eſt évident que les deux premieres differences $a-b$, $a-c$, ſeront poſitives, & que la troiſiéme $a-d$ ſera négative, & les autres ſuivantes, ſi l'équation eſt du quatriéme ou cinquiéme degré, &c. par conſequent le produit de toutes les differences, qui eſt la ſomme qui vient de la ſubſtitution de a au lieu de x dans l'équation, aura un ſigne different du précedent ; c'eſt-à-dire, le même ſigne que le dernier terme de l'équation.

COROLLAIRE III. FONDAMENTAL.

123. EN continuant le même raiſonnement, on verra qu'en prenant ſucceſſivement a pour les grandeurs entre leſquelles les racines d'une équation quelconque, dont toutes les racines ſont poſitives, ſont des grandeurs moyennes ; & ſubſtituant ſucceſſivement ces grandeurs a au lieu de l'inconnue dans l'équation propoſée, en commençant par celle qui eſt moindre que la plus petite racine, les ſommes toutes connues qui viendront des ſubſtitutions ſucceſſives, auront alternativement le ſigne du dernier terme de l'équation & ſon ſigne oppoſé, c'eſt-à-dire $+$ & $-$ dans les équations des degrez pairs, comme du ſecond, du quatriéme, du ſixiéme, &c. & $-$ & $+$ dans les équations des degrez impairs. Si l'on ſubſtitue à la place de l'inconnue d'une équation, dont toutes les racines ſont poſitives, une grandeur poſitive $+a$, qui ſurpaſſe la plus grande des racines de l'équation, la ſomme toute connue qui viendra de la ſubſtitution, aura toujours le ſigne $+$; car cette ſomme eſt le produit de toutes les diffe-

rences qui ſont entre la grandeur ſubſtituée & toutes les racines de l'équation ; & comme cette grandeur eſt ſuppoſée plus grande que toutes les racines, toutes ces differences auront chacune le ſigne +; leur produit aura donc le ſigne +.

COROLLAIRE IV.

124. IL ſuit de là & du ſecond Theorême, que ſi l'on transforme une équation propoſée, en ſuppoſant ſon inconnue $x = z + a$, & ſubſtituant $z + a$ au lieu de x dans la propoſée, quand le ſigne du dernier terme de la transformée ſera le même que celui du dernier terme de la propoſée, la grandeur a, dont les racines poſitives ſont diminuées, ſera moindre que la plus petite racine de la propoſée, ou qu'elle ſurpaſſera un nombre pair des racines poſitives de la propoſée, comme deux ou quatre, &c. Mais ſi le dernier terme de la transformée a un ſigne different de celui du dernier terme de la propoſée, la grandeur a ſurpaſſe neceſſairement la moindre racine poſitive de la propoſée ; mais elle en peut auſſi ſurpaſſer un nombre impair, comme trois, cinq, &c.

COROLLAIRE V.

125. SI l'on ſubſtitue ſucceſſivement une grandeur négative $-a$ dans une équation dont toutes les racines ſont négatives & differentes, à la place de l'inconnue, & qu'on commence par ſubſtituer une grandeur $-a$ moindre que la plus petite des racines négatives, & enſuite une grandeur $-a$ plus grande que la premiere racine négative, mais moindre que la ſeconde, & ainſi de ſuite, les ſommes toutes connues qui viendront des ſubſtitutions ſucceſſives, auront alternativement les ſignes + & —.

La démonſtration eſt ſi facile après celle qu'on a donnée pour le cas où les racines ſont toutes poſitives, qu'il eſt inutile de la mettre.

THEORÊME IV.

126. *QUAND toutes les racines d'une équation ſont négatives & réelles, ſi l'on ſubſtitue une grandeur poſitive quelconque* $+ a$ *au lieu de l'inconnue, la ſomme toute connue qui viendra de la ſubſtitution, aura toujours le ſigne* + ; *& quand les racines ſont toutes poſitives, ſi l'on ſubſtitue une grandeur négative quelconque* $- a$

au lieu de l'inconnue, la somme toute connue qui en viendra, aura toujours le même signe qu'avoit le dernier terme de l'équation.
Ce Theorême est évident après tout ce qui précede.

THEORÊME V.

127. *QUAND toutes les racines d'une équation sont égales, qu'elles sont en nombre pair, & qu'elles sont toutes positives ou toutes négatives, ou bien un nombre pair de positives, & un nombre pair de négatives, si l'on substitue une grandeur* a *soit positive, soit négative, moindre ou plus grande que chaque racine égale, la somme qui viendra de la substitution sera toujours positive.*

DÉMONSTRATION.

SOIENT les équations lineaires dont l'équation est composée $x - b = 0$, $x - b = 0$, $x - b = 0$, $x - b = 0$, ou bien $x - b = 0$, $x - b = 0$, $x + b = 0$, $x + b = 0$; si l'on substitue dans chacune de ces équations lineaires une grandeur $+ a$ moindre ou plus grande que la racine b, l'on aura $a - b$, $a - b$, $a - b$, $a - b$; ou bien $a - b$, $a - b$, $a + b$, $a + b$.

1°. Il est évident que si a est moindre que b, les quatre grandeurs $a - b$, $a - b$, $a - b$, $a - b$, sont négatives; ainsi leur produit tout connu sera positif. Si a surpasse b, les quatre grandeurs $a - b$, $a - b$, $a - b$, $a - b$, sont toutes positives, ainsi leur produit sera positif.

2°. Si a est moindre que b, les deux grandeurs $a - b$, $a - b$, sont négatives; ainsi leur produit qui est positif, étant multiplié par les deux autres qui sont positives $a + b$, $a + b$, donnera un produit positif. Si a surpasse b, les quatre grandeurs $a - b$, $a - b$, $a + b$, $a + b$, sont positives, ainsi leur produit est positif.

Mais il est évident que le produit des quatre grandeurs $a - b$, $a - b$, $a - b$, $a - b$, & celui des quatre $a - b$, $a - b$, $a + b$, $a + b$, sont precisément les sommes toutes connues qui viendroient en substituant la grandeur a au lieu de x dans l'équation composée des équations lineaires $x - b = 0$, $x - b = 0$, $x - b = 0$, $x - b = 0$, ou des équations lineaires $x - b = 0$, $x - b = 0$, $x + b = 0$, $x + b = 0$; donc, &c.

La démonstration se fera de la même maniere, si l'on

substitue la grandeur négative $-a$ moindre ou plus grande que la racine égale b.

COROLLAIRE.

Il est évident que ce Theorême est également veritable par raport à une équation composée d'un nombre pair de racines égales qui ont un même signe $+$ ou $-$, & d'un autre nombre pair d'autres racines égales differentes des premieres, qui ont aussi toutes le même signe $+$, ou le même signe $-$.

Remarques pour le Theorême suivant.

128. 1°. Il faut remarquer sur les racines imaginaires, dont on parlera dans ce Theorême, qu'elles sont toujours en nombre pair dans une équation composée. * * 29. 14e Cor.

2°. Qu'elles peuvent être de deux sortes, ou purement imaginaires comme dans ces équations lineaires $x+\sqrt{-ab}=0$, $x-\sqrt{-ab}=0$; ou contenir une partie réelle, & l'autre imaginaire, comme dans celles-ci $x-b+\sqrt{-bc}=0$, $x-b-\sqrt{-bc}=0$.

3°. Qu'étant toujours deux à deux dans une équation composée, si l'une est purement imaginaire, l'autre l'est aussi : si l'une contient une partie réelle & l'autre imaginaire, il faut que l'autre contienne la même partie réelle sous le même signe, & la partie imaginaire sous un signe opposé; la raison en est qu'autrement la racine imaginaire paroîtroit avec son signe dans l'équation composée, où l'on suppose qu'il n'y en paroît aucune.

4°. Dans les équations où la racine est purement imaginaire, comme dans $x+\sqrt{-ab}=0$, $x-\sqrt{-ab}=0$, on pourra dire que la racine imaginaire de la premiere est négative, & celle de la seconde positive : mais dans les équations $x-b+\sqrt{-bc}=0$, $x-b-\sqrt{-bc}=0$, on dira que les deux racines sont positives; & dans les deux équations $x+b+\sqrt{-bc}=0$, $x+b-\sqrt{-bc}=0$, qu'elles sont négatives, ces dénominations étant arbitraires.

5°. Une équation dont les deux racines sont imaginaires, & qui a tous ses termes, comme $xx-2bx+bb=0$, ou
$+bc$

$xx+2bx+bb=0$, contient une équation de deux racines
$+bc$

égales toutes deux positives, ou toutes deux négatives; & de plus, elle a dans son dernier terme tout connu une grandeur positive, outre le quarré de la racine égale; ainsi son dernier terme $+ bb + bc$, qui est toujours positif, surpasse le dernier terme de l'équation des deux racines égales $xx \pm 2bx + bb$ d'une grandeur positive $+ bc$.

THEORÊME VI.

129. *SI l'on substitue une grandeur a soit positive, soit négative, qui soit moindre que la partie réelle des racines imaginaires, quand elles en ont une, ou qui soit plus grande, ou qui lui soit égale, dans une équation qui a ses deux racines imaginaires, à la place de l'inconnue* x, *la somme toute connue qui en viendra, aura toujours le signe* +.

DÉMONSTRATION.

1°. LE Theorême est évident par lui-même, quand les deux racines de l'équation sont purement imaginaires, comme dans $xx + bc = 0$; 2°. quand les deux racines imaginaires ont une partie réelle, qui est toujours la même, & avec le même signe, en ôtant du dernier terme la grandeur positive qui s'y trouve, & laissant le quarré positif de la partie réelle, l'équation aura deux racines égales & réelles, toutes deux avec le même signe: donc par ce qui a été démontré pour les équations des racines égales en nombre pair & avec le même signe, en substituant + ou — a dans cette équation, la somme toute connue qui en viendra aura le signe +; & si l'on substitue la partie réelle, qui est la racine de l'équation qui a ses deux racines égales, la somme toute connue qui en viendra sera zero: donc en y ajoutant la grandeur positive du dernier terme, qui est cause que l'équation a deux racines imaginaires, cette somme aura toujours le signe +. *Ce qu'il faloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

SI une équation est composée de quatre, de six, de huit racines imaginaires, en y substituant à la place de l'inconnue une grandeur quelconque a positive ou négative, la somme qui en viendra aura toujours le signe +.

Ce Corollaire est une suite évidente du sixiéme Theorême

COROLLAIRE II.

IL n'y a aucune grandeur réelle qui étant ſubſtituée à la place de l'inconnue d'une équation dont toutes les racines ſont imaginaires, donne zero pour la ſomme toute connue.

THEORÊME VII.

130. *SI une équation compoſée a pluſieurs racines poſitives & inégales, & qu'elle en ait encore de négatives; qu'elle en ait même encore d'égales en nombre pair, & qui ſoient toutes poſitives ou toutes négatives, ou qui ſoient poſitives en nombre pair, & négatives en nombre pair; qu'enfin elle en ait encore (ſi l'on veut) d'imaginaires, qui ſont toujours en nombre pair; qu'on ſubſtitue ſucceſſivement dans l'équation compoſée, à la place de l'inconnue, une grandeur poſitive* a, 1°. *moindre que la plus petite des poſitives inégales*; 2°. *plus grande que cette premiere, & moindre que la ſeconde racine poſitive, & ainſi de ſuite, par raport aux ſeules poſitives inégales, les ſommes toutes connues qui viendront des ſubſtitutions ſucceſſives auront alternativement les ſignes + & —, ſi les racines poſitives inégales ſont en nombre pair; & alternativement — & +, ſi les racines poſitives ſont en nombre impair.*

DÉMONSTRATION.

QU'ON conçoive ſeparément l'équation compoſante des racines poſitives inégales, qu'on nommera *A*, pour rendre la démonſtration plus claire; & ſeparément l'équation compoſante des racines négatives, qu'on nommera *B*; & ſeparément celle des racines égales, qu'on nommera *C*; & enfin celle des racines imaginaires, qu'on nommera *D*. Il eſt évident par le troiſiéme Corollaire fondamental du 3e Theorême, * que les ſubſtitutions ſucceſſives des grandeurs *a*, telles qu'on les a ſuppoſées, dans l'équation *A* à la place de l'inconnue *x*, donneront ſucceſſivement des ſommes qui auront alternativement + & —, ou — & +: Il eſt auſſi évident par les 4e, * 5e, * & 6e * Theorêmes, que les mêmes grandeurs ſucceſſives *a* étant ſubſtituées ſucceſſivement dans les équations *B*, *C*, *D*, les ſommes qui en naîtront auront toujours le ſigne +. Ainſi le produit qui naîtra de la multiplication d'une ſomme connue qui vient de la ſubſtitution de *a* dans l'équation *A*, par le produit des trois ſommes

* 123. * 126. * 127. * 129.

connues qui viendront de la ſubſtitution de la même grandeur a dans les trois équations B, C, D, aura toujours le même ſigne que celui de la ſomme connue qui vient de la ſubſtitution de a dans l'équation A; car les autres ſommes de B, C, D, ayant toujours $+$, leur produit par la ſomme connue de A aura le ſigne de cette ſomme.

Mais il eſt évident que le produit qui vient de la multiplication des ſommes connues que donnent les équations B, C, D, par la ſomme connue que donne l'équation A, eſt la ſomme toute connue qu'on trouve en ſubſtituant la même grandeur a au lieu de x dans l'équation compoſée des quatre équations A, B, C, D. Par conſequent les ſommes toutes connues qui naîtront des ſubſtitutions ſucceſſives des grandeurs a, telles qu'on les a ſuppoſées, dans l'équation compoſée des quatre A, B, C, D, au lieu de l'inconnue x, auront alternativement $+$ & $-$, ou $-$ & $+$. *Ce qu'il faloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

SI en ſubſtituant deux grandeurs poſitives connues $+a$ & $+b$, l'une après l'autre dans une équation quelconque, à la place de l'inconnue x, les deux ſommes connues qui en naiſſent ont les ſignes oppoſez $+$ & $-$, ou $-$ & $+$, il eſt certain qu'il y a au moins une racine poſitive de cette équation entre les deux grandeurs a & b; c'eſt-à-dire, plus grande que la moindre des deux, & plus petite que la plus grande des deux grandeurs a & b.

Il faudroit conclure la même choſe ſi on diviſoit la même équation par $x-a=0$, & enſuite par $x-b=0$, & que les deux diviſions donnaſſent deux reſtes qui euſſent des ſignes
* 118. oppoſez. *

COROLLAIRE II.

SI l'on ſubſtituoit $-a$, $-b$, l'une après l'autre, à la place de x, ou ſi l'on diviſoit l'équation par $x+a=0$, & par $x+b=0$, & ſi les deux ſommes qui naîtroient des ſubſtitutions, ou les deux reſtes des diviſions, avoient des ſignes
* 125, oppoſez, il eſt certain * qu'il y auroit au moins une racine
& 126. négative entre les deux grandeurs a & b, plus grande que la moindre des deux, & plus petite que la plus grande des deux grandeurs a & b.

COROLLAIRE

COROLLAIRE III.

SI l'on transforme une équation en deux autres, 1°. en ſuppoſant l'inconnue de l'équation $x = z + a$, & ſubſtituant $z + a$ au lieu de x dans l'équation; 2°. en ſuppoſant l'inconnue $x = y + b$, & ſubſtituant $y + b$ au lieu de x dans l'équation, & que les deux derniers termes des transformées ayent deux ſignes oppoſez, il eſt certain qu'il y a au moins une des racines poſitives de l'équation propoſée entre a & b, plus grande que la moindre des deux, & plus petite que la plus grande des deux grandeurs a & b.

Mais ſi l'on ſuppoſe, 1°. $x = z - a$, & enſuite $x = y - b$, & ſi après avoir fait les ſubſtitutions de $z - a$ au lieu de x, & de $y - b$ au lieu de x dans l'équation, il vient deux transformées dont les ſignes ſoient differens, il eſt certain qu'il y a au moins une racine négative de l'équation entre les grandeurs a & b.

Ces trois Corollaires ſont des ſuites évidentes des Theorêmes précedens.* *118, 119, 125, 126, & 130

COROLLAIRE IV.

QUAND on peut trouver deux limites pour chacune des racines d'une équation, c'eſt-à-dire deux grandeurs pour chaque racine, dont l'une eſt moindre & l'autre plus grande que cette racine, il eſt certain que toutes les racines de l'équation ſont réelles & inégales; car il n'y a pas de limites pour les imaginaires, puiſqu'on a démontré * que quelque grandeur qu'on ſubſtitue dans une équation dont les racines ſont imaginaires, la ſomme toute connue qui en vient a toujours +; & il eſt évident qu'il n'y a pas d'autres limites entre les racines égales que zero. *129.

COROLLAIRE V.

SI l'on peut trouver deux limites pour chaque racine d'une équation, ou ſi l'on trouve les limites des unes, & zero pour les limites des autres; ou ſi l'on trouve zero pour les limites de chacune, toutes les racines de l'équation ſont réelles; car on ne ſçauroit trouver pour les imaginaires des limites dont l'une ſoit moindre & l'autre plus grande que chaque racine imaginaire; on ne ſçauroit auſſi trouver zero pour

les limites des racines imaginaires : Ainſi quand on trouve les limites de toutes les racines, ou du moins zero pour leurs limites : elles ſont toutes réelles.

Premiere ſuppoſition.

LES équations lineaires de toute équation compoſée, dont toutes les racines ſont réelles inégales & poſitives, ſoient repréſentées par $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x - c = 0$, $x - d = 0$, &c. que ces racines aillent en augmentant dans l'ordre qu'on les voit; c'eſt-à-dire, que a ſoit la plus petite, & b plus grande que a, c plus grande que b; & ainſi de ſuite : que la difference de a & de b ſoit f, celle de a & de c ſoit g, celle de a & de d ſoit h, & ainſi de ſuite; l'on a $a + f = b$, $a + g = c$, $a + h = d$. Que les differences de la ſeconde racine b d'avec les autres, ſoient exprimées par les mêmes lettres de ſuite f, g, h, &c. ainſi la difference de b & de a ſoit f, celle de b & de c ſoit g, celle de b & de d ſoit h, &c. (On ſe ſert des mêmes lettres pour marquer les differences, quoiqu'inégales, afin de rendre la choſe plus ſimple;) ainſi $a = b - f$, $c = b + g$, $d = b + h$. Que les differences de la troiſiéme racine d'avec les autres ſoient auſſi marqués par les mêmes lettres f, g, h, &c. ainſi $a = c - f$, $b = c - g$, $d = c + h$. Enfin que les differences de quelle racine on voudra de l'équation d'avec les autres, ſoient marquées de ſuite par les lettres f, g, h, &c.

1°. Il eſt évident que les équations lineaires dont l'équation eſt compoſée, peuvent être repréſentées par des équations lineaires, qui auront toutes, celle des racines de la propoſée qu'on voudra, jointe avec les differences qui ſont entre cette racine & les autres.

Premieres.	Secondes.	Troiſiémes.	Quatriémes.	Cinquiémes.
$x - a = 0$	$= x - a = 0$	$= x - b + f = 0$	$= x - c + f = 0$	$= x - d + f = 0$
$x - b = 0$	$= x - a - f = 0$	$= x - b = 0$	$= x - c + g = 0$	$= x - d + g = 0$
$x - c = 0$	$= x - a - g = 0$	$= x - b - g = 0$	$= x - c = 0$	$= x - d + h = 0$
$x - d = 0$	$= x - a - h = 0$	$= x - b - h = 0$	$= x - c - h = 0$	$= x - d = 0$.

2°. Il eſt évident que le produit des premieres équations, celui des ſecondes, celui des troiſiémes, celui des quatriémes, celui des cinquiémes, ſont tous egaux, & que les équations compoſées qui viennent de ces produits, ſont preciſément la même équation ſous differentes expreſſions, comme on le voit ici. Il faut les former ſoi même pour ſe rendre cette formation familiere.

Premiere équation.

$$\begin{array}{lllll}
x^4 & -ax^3 & +abxx & -abcx & +abcd=0. \\
 & -bx^3 & +acxx & -abdx & \\
 & -cx^3 & +adxx & -acdx & \\
 & -dx^3 & +bcxx & -bcdx & \\
 & & +bdxx & & \\
 & & +cdxx & &
\end{array}$$

Seconde équation.

$$\begin{array}{llllll}
x^4 & -4ax^3 & +6aaxx & -4a^3x & +a^4 & = x^4\,\overline{-4ax^3+6aaxx-4a^3x+a^4}\times 1 \\
 & -fx^3 & +3faxx & -3faax & +fa^3 & = +\overline{x^3-3axx+3aax-a^3}\times -f \\
 & -gx^3 & +3gaxx & -3gaax & +ga^3 & = +\overline{x^3-3axx+3aax-a^3}\times -g \\
 & -hx^3 & +3haxx & -3haax & +ha^3 & = +\overline{x^3-3axx+3aax-a^3}\times -h \\
 & & +fgxx & -2fgax & +fgaa & = +\overline{xx-2ax+aa}\times +fg \\
 & & +fhxx & -2fhax & +fhaa & = +\overline{xx-2ax+aa}\times +fh \\
 & & +ghxx & -2ghax & +ghaa & = +\overline{xx-2ax+aa}\times +gh \\
 & & & -fghx & +fgha & = +\overline{x-a}\times -fgh
\end{array}$$

Troisiéme équation.

$$\begin{array}{llllll}
x^4 & -4bx^3 & +6bbxx & -4b^3x & +b^4 & = x^4\,\overline{-4bx^3+6bbxx-4b^3x+b^4}\times 1 \\
 & +fx^3 & -3fbxx & +3fbbx & -fb^3 & = +\overline{x^3-3bxx+3bbx-b^3}\times +f \\
 & -gx^3 & +3gbxx & -3gbbx & +gb^3 & = +\overline{x^3-3bxx+3bbx-b^3}\times -g \\
 & -hx^3 & +3hbxx & -3hbbx & +hb^3 & = +\overline{x^3-3bxx+3bbx-b^3}\times -h \\
 & & -fgxx & +2fgbx & -fgbb & = +\overline{xx-2bx+bb}\times -fg \\
 & & -fhxx & +2fhbx & -fhbb & = +\overline{xx-2bx+bb}\times -fh \\
 & & +ghxx & -2ghbx & +ghbb & = +\overline{xx-2bx+bb}\times +gh \\
 & & & +fghx & -fghb & = +\overline{x-b}\times +fgh
\end{array}$$

Quatriéme équation.

$$\begin{array}{llllll}
x^4 & -4cx^3 & +6ccxx & -4c^3x & +c^4 & = x^4\,\overline{-4cx^3+6ccxx-4c^3x+c^4}\times 1 \\
 & +fx^3 & -3fcxx & +3fccx & -fc^3 & = +\overline{x^3-3cxx+3ccx-c^3}\times +f \\
 & +gx^3 & -3gcxx & +3gccx & -gc^3 & = +\overline{x^3-3cxx+3ccx-c^3}\times +g \\
 & -hx^3 & +3hcxx & -3hccx & +hc^3 & = +\overline{x^3-3cxx+3ccx-c^3}\times -h \\
 & & +fgxx & -2fgcx & +fgcc & = +\overline{xx-2cx+cc}\times +fg \\
 & & -fhxx & +2fhcx & -fhcc & = +\overline{xx-2cx+cc}\times -fh \\
 & & -ghxx & +2ghcx & -ghcc & = +\overline{xx-2cx+cc}\times -gh \\
 & & & -fghx & +fghc & = +\overline{x-c}\times -fgh
\end{array}$$

Cinquiéme équation.

$$\begin{array}{llllll}
x^4 & -4dx^3 & +6ddxx & -4d^3x & +d^4 & = x^4\,\overline{-4dx^3+6ddxx-4d^3x+d^4}\times 1 \\
 & +fx^3 & -3fdxx & +3fddx & -fd^3 & = +\overline{x^3-3dxx+3ddx-d^3}\times +f \\
 & +gx^3 & -3gdxx & +3gddx & -gd^3 & = +\overline{x^3-3dxx+3ddx-d^3}\times +g \\
 & +hx^3 & -3hdxx & +3hddx & -hd^3 & = +\overline{x^3-3dxx+3ddx-d^3}\times +h \\
 & & +fgxx & -2fgdx & +fgdd & = +\overline{xx-2dx+dd}\times +fg \\
 & & +fhxx & -2fhdx & +fhdd & = +\overline{xx-2dx+dd}\times +fh \\
 & & +ghxx & -2ghdx & +ghdd & = +\overline{xx-2dx+dd}\times +gh \\
 & & & +fghx & -fghd & = +\overline{x-d}\times +fgh
\end{array}$$

THEORÊME VIII.

131. *TOUTE équation composée, dont les racines sont réelles inégales & positives, peut être conçûe comme contenant toutes les équations faites de seules racines égales à celle de ses racines qu'on voudra, qui suivent.*

1°. Une équation du degré de la proposée, par exemple du 4e degré, dont toutes les racines sont égales à celle qu'on voudra des racines de la proposée, laquelle équation de racines égales est multipliée par l'unité.

2°. Une équation des mêmes racines égales moindre d'un degré que la précedente, multipliée par chacune des differences qui est entre cette racine égale & les autres.

3°. Une équation des mêmes racines égales moindre d'un degré que la précedente, multipliée par chacun des produits des mêmes differences multipliées entr'elles deux à deux.

4°. Une équation des mêmes racines égales moindre d'un degré que la précedente, multipliée par chacun des produits des mêmes differences multipliées entr'elles trois à trois.

Et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on soit arrivé à une équation lineaire qui a la même racine égale, & laquelle équation lineaire est multipliée par le produit des mêmes differences multipliées toutes les unes par les autres.

Ce Theorême est évident par la supposition précedente.

Remarque sur cette formation des équations.

SUPPOSANT que l'on marque chacune des racines $a, b, c, d,$ de la proposée, par k, on aura l'équation suivante,

x^4	$-4kx^3$	$+6kkxx$	$-4k^3x$	$+k^4$	$\times 1$
	$+x^3$	$-3kxx$	$+3kkx$	$-k^3$	$\times \pm f$
	$+x^3$	$-3kxx$	$+3kkx$	$-k^3$	$\times \pm g$
	$+x^3$	$-3kxx$	$+3kkx$	$-k^3$	$\times \pm h$
		$+xx$	$-2kx$	$+kk$	$\times \pm fg$
		$+xx$	$-2kx$	$+kk$	$\times \pm fh$
		$+xx$	$-2kx$	$+kk$	$\times \pm gh$
			$+x$	$-k$	$\times \pm fgh$

$a+4d, a+3d, a+2d, a+1d, a+0.$

Le premier terme de l'équation lineaire $\pm fghx \mp fgh \times k;$

qui eſt la derniere, a le ſigne —, ſi les racines ſont en nombre pair, & qu'on conçoive que k repréſente la plus petite racine a de la propoſée; & il a le ſigne +, ſi les racines ſont en nombre impair.

Le même premier terme $fghx$ a un ſigne oppoſé au précedent, ſi l'on conçoit que k repréſente la ſeconde racine b. Il a un ſigne oppoſé au précedent, ſi k repréſente la troiſiéme racine c. Il a un ſigne oppoſé au précedent, ſi k repréſente la quatriéme racine d; & ainſi le terme $fghx$ a alternativement les ſignes + & —, ou — & +, ſelon qu'on conçoit l'équation propoſée formée ſucceſſivement par la premiere racine de la propoſée, enſuite par la ſeconde, enſuite par la troiſiéme, &c.

La raiſon en eſt évidente, ſi l'on fait attention qu'il eſt le produit de toutes les differences de la racine qu'on employe dans la formation, d'avec tous les autres, multiplié par x.

Seconde ſuppoſition.

SI on multiplie la 2e, la 3e, la 4e, la 5e équations qui précedent, repréſentées par l'équation de la remarque précedente, ſi on multiplie, dis-je, ſeparément chacune de ces équations par les termes d'une progreſſion arithmetique quelconque, en multipliant le premier terme de l'équation par le premier terme de la progreſſion, le ſecond par le ſecond, & ainſi de ſuite; il eſt évident que les termes de chacune des équations compoſées de racines égales, qui ſont contenues dans chacune de ces quatre équations, ſeront multipliez de ſuite par les termes d'une progreſſion arithmetique.

THEORÊME IX.

132. *SI on multiplie ſeparément de ſuite les termes de la 2e, de la 3e, de la 4e, de la 5e équation précedente par les termes d'une progreſſion arithmetique, les équations particulieres compoſées de racines égales contenues dans chacune de ces équations, auront encore après la multiplication une de leurs racines égales, excepté la ſeule équation lineaire.*

C'EST-à-dire, après avoir multiplié, par exemple, la ſeconde équation par les termes de la progreſſion arithmetique, le produit de l'équation de quatre racines égales, celui

de l'équation de trois racines égales, celui de l'équation de deux racines égales, tous ces produits auront encore tous la racine égale commune; il n'y aura d'excepté que le seul produit de l'équation lineaire, qui n'aura plus une racine commune avec les autres.

Ce Theorême a été démontré dans la derniere Section
74. du quatriéme Livre.

COROLLAIRE I.

133. SI après avoir multiplié celle qu'on voudra de la 2e, 3e, 4e, 5e équation précedente, par une progression arithmetique, on substitue à la place de l'inconnue dans le produit, la racine égale, sçavoir *a* dans le produit de la 2e, *b* dans celui de la 3e, *c* dans celui de la 4e, *d* dans celui de la 5e, toutes les quantitez du produit se détruiront par des signes opposez, excepté les seules quantitez du produit de l'équation lineaire.

Car en substituant en des équations une racine de ces équations, à la place de l'inconnue, tous les produits se dé-
31. truisent par des signes opposez.

COROLLAIRE II.

134. SI on multiplie separément la 2e, la 3e, la 4e, la 5e équation précedente, par les termes d'une progression arithmetique qui va en diminuant, & qu'on substitue dans le produit la racine égale de cette équation, sçavoir *a* dans le premier produit, *b* dans le second, *c* dans le troisiéme, *d* dans le quatriéme, à la place de l'inconnue; il est évident que parmi les deux quantitez du produit de l'équation lineaire, qui restent seules, la premiere est la plus grande.

Car elles sont toutes deux la même quantité sous differens signes, sçavoir *fgha* dans le produit de la seconde, *fghb* dans le produit de la troisiéme, *fghc* dans celui de la quatriéme, *fghd* dans celui de la cinquiéme: mais la premiere de ces deux quantitez égales est multipliée, par la supposition, par un plus grand terme de la progression arithmetique, & la seconde par un moindre; par consequent la premiere est la plus grande.

COROLLAIRE III.

135. D'OU il ſuit que le ſigne de la premiere des deux quantitez de l'équation lineaire eſt celui de la ſomme toute connue qui demeure après la ſubſtitution.

COROLLAIRE IV.

136. SI on multiplie ſeparément la ſeconde équation précedente, la 3ᵉ, la 4ᵉ & la 5ᵉ, par la progreſſion arithmetique 4, 3, 2, 1, 0, de maniere que le dernier terme ſoit multiplié par zero; ou, ce qui eſt la même choſe, ſi on multiplie ſeparément chaque terme de ces équations par l'expoſant de l'inconnue de ce terme, & le dernier terme par zero; & ſi après avoir diviſé chaque produit par l'inconnue x, on ſubſtitue dans le produit de la ſeconde la premiere racine a au lieu de l'inconnue, la ſomme toute connue qui reſtera, ſera $-fgh$; c'eſt-à-dire, le produit de toutes les differences qui ſont entre la premiere racine a & toutes les autres racines. Si on ſubſtitue b dans le produit de la troiſiéme, la ſomme toute connue ſera $+fgh$; c'eſt-à-dire, le produit de toutes les differences qui ſont entre la ſeconde racine b & toutes les autres racines. Si on ſubſtitue c dans le produit de la quatriéme, la ſomme ſera $-fgh$; c'eſt-à-dire, le produit de toutes les differences qui ſont entre la troiſiéme racine c & toutes les autres racines. Enfin ſi on ſubſtitue d dans le produit de la cinquiéme, la ſomme ſera $+fgh$; c'eſt-à-dire, le produit de toutes les differences qui ſont entre la quatriéme racine d & toutes les autres racines.

Pour faire la démonſtration de ce Corollaire, il n'y a qu'à en faire l'operation.

Seconde équation.

$$\begin{array}{llllll}
x^4 - 4ax^3 & + 6aaxx & - 4a^3x & + a^4 & = & \overline{x^4 - 4ax^3 + 6aaxx - 4a^3x + a^4} \times 1 \\
 - fx^3 & + 3faxx & - 3faax & + fa^3 & = & + \overline{x^3 - 3axx + 3aax - a^3} \times -f \\
 - gx^3 & + 3gaxx & - 3gaax & + ga^3 & = & + \overline{x^3 - 3axx + 3aax - a^3} \times -g \\
 - hx^3 & + 3haxx & - 3haax & + ha^3 & = & + \overline{x^3 - 3axx + 3aax - a^3} \times -h \\
 & + fgxx & - 2fgax & + fgaa & = & + \overline{xx - 2ax + aa} \times +fg \\
 & + fhxx & - 2fhax & + fhaa & = & + \overline{xx - 2ax + aa} \times +fh \\
 & + ghxx & - 2ghax & + ghaa & = & + \overline{xx - 2ax + aa} \times +gh \\
 & & - fghx & + fgha & = & + \overline{x - a} \times -fgh \\
\hline
4 \quad 3 & 2 & 1 & 0. & & 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0.
\end{array}$$

Produit des termes de l'équation précedente par les termes de la progression arithmetique.

$$\begin{array}{rl}
4x^4 - 12ax^3 + 12aaxx - 4a^3x + 0 = & 4x^4 - 12ax^3 + 12aaxx - 4a^3x + 0 \times 1 \\
-3fx^3 + 6faxx - 3faax + 0 = & +\overline{3x^3 - 6axx + 3aax - 0} \times -f \\
-3gx^3 + 6gaxx - 3gaax + 0 = & +\overline{3x^3 - 6axx + 3aax - 0} \times -g \\
-3hx^3 + 6haxx - 3haax + 0 = & +\overline{3x^3 + 6axx + 3aax - 0} \times -h \\
+2fgxx - 2fgax + 0 = & +\overline{2xx - 2ax + 0} \times +fg \\
+2fhxx - 2fhax + 0 = & +\overline{2xx - 2ax + 0} \times +fh \\
+2ghxx - 2ghax + 0 = & +\overline{2xx - 2ax + 0} \times +gh \\
-fghx + 0 = & +x - 0 \times -fgh
\end{array}$$

Divisant tous les termes par $+x$, & substituant $+a$ au lieu de x, l'on trouve

$$\begin{array}{rl}
4a^3 - 12a^3 + 12a^3 - 4a^3 = & \overline{4a^3 - 12a^3 + 12a^3 - 4a^3} \times 1 \\
-3faa + 6faa - 3faa = & +\overline{3aa - 6aa + 3aa} \times -f \\
-3gaa + 6gaa - 3gaa = & +\overline{3aa - 6aa + 3aa} \times -g \\
-3haa + 6haa - 3haa = & +\overline{3aa - 6aa + 3aa} \times -h \\
+2fga - 2fga = & +\overline{2a - 2a} \times +fg \\
+2fha - 2fha = & +\overline{2a - 2a} \times +fh \\
+2gha - 2gha = & +\overline{2a - 2a} \times +gh \\
-fgh = & +1. \times -fgh
\end{array}$$

Il est évident que tous les termes se détruisent par des signes opposez, & qu'il ne reste que le produit des trois differences $-fgh$.

Il est aussi évident qu'en faisant une operation semblable pour la troisiéme équation, on trouvera le seul reste $+fgh$.

Pour la quatriéme on trouvera $-fgh$.

Pour la cinquiéme on trouvera $+fgh$.

Enfin il est évident que ce Corollaire convient aux équations de tous les degrez, & l'on n'en a pris une du quatriéme que pour faire concevoir plus clairement ce Corollaire par un exemple.

Mais il est évident que s'il y a des racines égales dans la proposée, la difference qui est entre les racines égales étant zero, & le produit de zero par les autres differences étant aussi zero, il est, dis-je, évident qu'en substituant chacune des racines égales dans le produit, la somme toute connue sera zero; ainsi la racine égale étant substituée dans le produit, est elle-même une racine de l'équation que forme le produit; puisqu'étant substituée dans le produit à la place de l'inconnue, elle le rend égal à zero.* *31.

COROLLAIRE V.

COROLLAIRE V. FONDAMENTAL.

137. SI on multiplie tous les termes d'une équation quelconque, de quelque degré qu'elle puiſſe être, dont toutes les racines ſont réelles, poſitives & inégales, chacun par le nombre qui eſt l'expoſant du degré qu'a l'inconnue dans ce terme, & le dernier terme par zero; & ſi après avoir diviſé tous les termes par l'inconnue x, l'on ſubſtitue dans le produit à la place de l'inconnue, 1°. la premiere, c'eſt-à-dire, la plus petite racine de l'équation propoſée, la ſomme toute connue qui en viendra étant preciſément le produit de toutes les differences qui ſont entre la plus petite racine & chacune des autres racines, il s'enſuit que ſi l'équation eſt d'un degré impair, par exemple du 5ᵉ degré, il y aura un nombre pair de differences, par exemple quatre differences; & comme elles ont chacune le ſigne —, leur produit aura le ſigne +. Si l'équation eſt d'un degré pair, comme du quatriéme, il y aura un nombre impair de differences, ainſi leur produit aura —.

2°. Si on ſubſtitue la ſeconde racine, la ſomme toute connue étant le produit de toutes les differences qui ſont entre la ſeconde racine & les autres, la difference qui eſt entre la ſeconde racine & la premiere ayant le ſigne +, & chacune des autres le ſigne —, leur produit aura le ſigne opposé à celui du produit précedent.

3°. Si on ſubſtitue la troiſiéme racine dans le même produit, les differences de cette troiſiéme racine d'avec la premiere & la ſeconde ayant chacune le ſigne +, & chacune des autres differences ayant le ſigne —, leur produit aura un ſigne oppoſé au précedent.

D'où l'on voit que la ſubſtitution des racines de l'équation ſucceſſivement les unes après les autres dans le produit de l'équation multipliée par la progreſſion arithmetique, donnera pour les ſommes toutes connues qui en viendront, les ſignes alternatifs + & — dans les équations des degrez impairs, & — & + dans celles des degrez pairs.

Ce Corollaire eſt une ſuite évidente de celui qui précede.

COROLLAIRE VI.

138. MAIS lorſque des grandeurs étant ſubſtituées ſeparément de ſuite à la place de l'inconnue dans une équation, les ſom-

mes toutes connues qui viennent de ces ſubſtitutions, ont alternativement les ſignes + & —, ou — & +; ces grandeurs ſont les limites des racines de cette équation par le troiſiéme Corollaire du troiſiéme Theorême: Donc les racines d'une équation, dont toutes les racines ſont réelles, poſitives & inégales, ſont les limites de l'équation nouvelle qui vient de la multiplication de chaque terme de la premiere par le nombre qui eſt l'expoſant de l'inconnue de ce terme, & de ſon dernier terme par zero.

COROLLAIRE VII. QUI EST FONDAMENTAL.

139. MAIS les racines d'une premiere équation ne ſçauroient être les limites des racines d'une ſeconde, que les racines de la ſeconde ne ſoient auſſi les limites des racines de la premiere; par conſequent ſi on multiplie les termes d'une équation quelconque, dont toutes les racines ſont réelles, poſitives & inégales, chacun par le nombre qui eſt l'expoſant de l'inconnue de ce terme, & le dernier terme par zero, les racines de l'équation qui vient de cette multiplication, ſont les limites des racines de l'équation propoſée; par exemple ſuppoſant que $x^4 \quad — nx^3 \quad + pxx \quad — qx + r = 0$, repréſente une équation dont toutes les racines ſont réelles, poſitives & inégales, ſi on multiplie chaque terme par l'expoſant du degré de l'inconnue de ce terme, & le dernier terme par zero, l'on aura $4x^4 — 3nx^3 + 2pxx — qx = 0$; ou bien diviſant par x, $4x^3 — 3nxx + 2px — q = 0$; les racines de cette derniere équation ſont les limites des racines de la propoſée.

$$\begin{array}{l} 4 \quad\quad 3 \quad\quad 2 \quad\quad 1 \quad\quad 0. \\ \hline 4x^4 — 3nx^3 + 2pxx — qx + 0 = 0, \\ \hline \text{ou } 4x^3 — 3nxx + 2px — q \quad = 0, \end{array}$$

Ce Corollaire eſt évident par ce qui précede.

COROLLAIRE VIII.

140. QUAND les racines de la propoſée ſont toutes réelles, poſitives & inégales, les racines de l'équation des limites qui vient de la multiplication de la propoſée par les termes de la progreſſion arithmetique, ſont auſſi toutes réelles, poſitives & inégales; puiſque toutes les ſubſtitutions des racines de la propoſée à la place de l'inconnue, donnent

des sommes successives qui ont alternativement les signes + & —, ou — & +.

COROLLAIRE IX.

141. PAR consequent s'il y a des racines égales dans l'équation des limites, il y a nécessairement des racines égales dans la proposée : Et comme l'on a démontré dans la derniere Section du 4[e] Livre, * que quand on multiplie les termes *74. d'une équation proposée qui a des racines égales, par les termes d'une progression arithmetique, l'équation qui en vient a autant de racines égales moins une que la proposée ; il est certain que quand l'équation des limites a des racines égales, l'équation proposée a les mêmes racines égales, & une de plus.

COROLLAIRE X.

142. S'IL y a des racines imaginaires dans l'équation des limites, il est certain qu'il y a le même nombre de racines imaginaires (qui sont toujours deux à deux) dans la proposée.

Car si la proposée avoit toutes ses racines réelles, il est évident que l'équation des limites les auroit aussi toutes réelles, puisque si les racines de la proposée étoient toutes réelles, positives & inégales, les racines de l'équation des limites seroient aussi toutes réelles, positives & inégales par le huitiéme Corollaire ; si la proposée avoit toutes ses racines égales, toutes les racines de l'équation des limites seroient aussi égales & réelles, par le neuviéme Corollaire ; si les racines de la proposée étoient en partie égales, & en partie inégales, on prouveroit toujours par les Corollaires précedens, qu'étant substituées par ordre dans l'équation des limites, elles donneroient de suite des sommes toutes connues qui auroient + & —, ou — & +, ou zero, comme on le verra clairement dans les remarques suivantes ; ce qui ne peut convenir qu'à une équation dont toutes les racines sont réelles ; par consequent s'il y a des racines imaginaires dans l'équation des limites, il faut qu'il y ait le même nombre de racines imaginaires dans la proposée. *Ce qu'il faloit démontrer.*

REMARQUES.

I.

143. QUAND on multiplie une équation quelconque

comme . . . $x^5 - nx^4 + px^3 - qxx + rx - s = 0$,
par . . . . . $5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0$,
l'on trouve $5x^5 - 4nx^4 + 3px^3 - 2qxx + rx - 0 = 0$,
qui se réduit à $5x^4 - 4nx^3 + 3pxx - 2qx + r = 0$;

l'on peut toujours supposer que le produit qui vient de la multiplication est une équation.

Car l'inconnue x du produit pouvant être considerée comme une indéterminée differente de x, qui est l'inconnue de la proposée, & étant possible que l'indéterminée x ait des valeurs propres à faire en sorte que le produit soit égal à zero, en supposant que x représente dans le produit ces valeurs-là, il est évident que le produit peut être supposé égal à zero.

II.

D'où l'on voit que les valeurs de x dans le produit, c'est-à-dire, que les racines du produit supposé égal à zero, ne sont pas les racines de l'équation proposée, mais elles en sont differentes, à moins qu'il n'y eût des racines égales dans la proposée, qui demeureroient encore toutes dans le produit, excepté une seule.

III.

Il est évident que les termes de la proposée ayant alternativement + & —, les termes du produit, qui est l'équation des limites, ont aussi alternativement + & —; par consequent toutes les racines de l'équation des limites sont aussi positives.

IV.

L'équation des limites se peut toujours diviser par l'inconnue, parceque le dernier terme de la proposée est multiplié par zero.

Ainsi l'équation des limites a zero pour une de ses racines; mais elle a pour ses racines réelles une racine de moins que la proposée, étant moindre d'un degré, & son dernier terme tout connu a toujours un signe different de celui du dernier terme de la proposée.

V.

Quand toutes les racines d'une équation, par exemple du cinquiéme degré, sont réelles, positives & inégales; si l'on substitue sa premiere racine, c'est-à-dire la plus petite, dans son équation des limites, à la place de l'inconnue, la somme toute connue qui en viendra étant le produit des differences qui sont entre la premiere racine de la proposée & les autres, chacune de ces differences ayant le signe —, & étant quatre dans notre exemple, leur produit aura le signe +, qui est celui du dernier terme de l'équation des limites.

Si on substitue la seconde racine de la proposée dans l'équation des limites, comme il n'y aura plus que trois differences qui ayent chacune le signe —, le produit des differences qui sont entre la seconde racine de la proposée & les autres, aura le signe —, c'est-à-dire le signe opposé au précedent; ainsi la somme toute connue qui viendra de la substitution aura le signe —.

On verra par un semblable raisonnement que la substitution de la troisiéme racine de la proposée dans l'équation des limites, donnera le signe +; la substitution de la quatriéme donnera le signe —.

Et enfin la substitution de la cinquiéme donnera le signe +.

Cela fait voir que la premiere racine de la proposée est plus petite que la premiere racine de l'équation des limites.

Que la seconde racine de la proposée surpasse la premiere racine de l'équation des limites, mais elle est moindre que la seconde.

Que la troisiéme racine de la proposée est entre la seconde & la troisiéme racine de l'équation des limites.

Que la quatriéme racine de la proposée est entre la troisiéme & la quatriéme de l'équation des limites, qui est sa plus grande & derniere racine.

Enfin que la cinquiéme racine de la proposée surpasse la quatrieme de l'équation des limites.

VI.

D'où l'on voit que la premiere racine réelle de l'équation des limites, est plus grande que la premiere racine de la proposée, & moindre que la seconde racine de la proposée.

Que la ſeconde racine de l'équation des limites eſt entre la ſeconde & la troiſiéme racine de la propoſée.

Que la troiſiéme racine de l'équation des limites eſt entre la troiſiéme & la quatriéme racine de la propoſée.

Enfin que la quatriéme & derniere racine de l'équation des limites, eſt entre la quatriéme & la cinquiéme ou derniere racine de la propoſée.

VII.

Par conſequent les racines de l'équation des limites étant priſes de ſuite, ſont des grandeurs moyennes entre les racines de la propoſée, & ſont par conſequent les limites des racines de la propoſée qui ſont entre la premiere & la derniere.

VIII.

Mais zero étant toujours moindre que la plus petite des racines de la propoſée, & le plus grand coëficient négatif de la propoſée, rendu poſitif, & augmenté d'une grandeur arbitraire comme de l'unité, étant toujours une quantité plus
*47. grande que la plus grande des racines pôſitives, * il eſt évident qu'en ajoutant zero, & ce plus grand coëficient ainſi augmenté, aux racines de l'équation des limites, l'on aura deux limites pour chacune des racines de la propoſée.

IX.

Pour les racines égales.

Quand il y a des racines égales dans la propoſée, il peut arriver trois cas; car ou bien, 1°. les racines égales peuvent être moindres que chacune des racines inégales; 2°. ou être plus grandes; 3°. ou bien elles peuvent être plus grandes que quelques racines inégales, & moindres que les autres; par exemple ſi l'on ſuppoſe deux racines égales dans une équation du ſixiéme degré, elles peuvent être, 1°. moindres que les quatre inégales; 2°. ou plus grandes; 3°. ou bien il peut y avoir quelques racines inegales moindres que les égales, & les autres inégales ſeront plus grandes.

PREMIER CAS.

L'EQUATION des limites ayant une des deux racines égales de la propoſée du ſixiéme degré, la ſubſtitution de chacune des racines égales dans l'équation des limites à la place de l'inconnue, donnera zero.

La ſubſtitution de la premiere, c'eſt-à-dire de la plus petite des quatre racines inégales de la propoſée dans l'équation des limites, donnera pour la ſomme toute connue le produit des differences qui ſont entre cette premiere racine & toutes les autres, & comme il y a trois racines plus grandes, il y aura trois differences qui auront chacune le ſigne —, ainſi le produit aura le ſigne —.

La ſubſtitution de la ſeconde racine inégale de la propoſée, dans l'équation des limites, donnera pour la ſomme toute connue le produit des differences qui ſont entre la ſeconde racine inégale de la propoſée & toutes les autres; & comme il y en a deux plus grandes que la ſeconde, il n'y aura que deux differences qui ayent chacune le ſigne —, ainſi le produit aura le ſigne +.

Par un ſemblable raiſonnement on verra que la ſubſtitution de la troiſiéme racine inégale de la propoſée dans l'équation des limites, donnera une ſomme qui aura le ſigne —; & que la ſubſtitution de la quatriéme ou derniere racine inégale de la propoſée, donnera une ſomme qui aura le ſigne +.

D'où il ſuit, 1°. que la quatriéme racine inégale de la propoſée ſurpaſſe la plus grande racine de l'équation des limites; que la troiſiéme racine inégale de la propoſée eſt moindre que la plus grande ou cinquiéme racine de l'équation des limites, mais elle en ſurpaſſe la quatriéme; que la ſeconde racine inégale de la propoſée eſt moindre que la quatriéme racine de l'équation des limites, mais elle en ſurpaſſe la troiſiéme; enfin que la premiere ou plus petite racine inégale de la propoſée eſt moindre que la troiſiéme racine de l'équation des limites, mais qu'elle ſurpaſſe la ſeconde, c'eſt-à-dire, celle qui eſt immédiatement plus grande que la racine égale commune aux deux équations.

2°. Par conſequent la 3e, 4e & 5e racine de l'équation des limites, ont chacune deux limites, elles ſont par conſequent réelles; la premiere l'eſt auſſi, étant la racine égale de la propoſée: La ſeconde racine de l'équation des limites eſt donc auſſi une grandeur réelle, puiſque les racines imaginaires ſont toujours deux à deux.

3°. Il eſt donc évident que la ſeconde racine de l'équation des limites eſt moindre que la premiere racine inégale de la propoſée.

Que la troiſiéme racine de l'équation des limites ſurpaſſe la premiere racine inégale de la propoſée, & eſt moindre que la ſeconde.

Que la quatriéme racine de l'équation des limites ſurpaſſe la ſeconde racine inégale de la propoſée, & eſt moindre que la troiſiéme.

Enfin que la cinquiéme racine de l'équation des limites ſurpaſſe la troiſiéme racine inégale, & eſt moindre que la quatriéme ou plus grande racine inégale de la propoſée.

4°. Par conſequent les racines de l'équation des limites étant ſubſtituées de ſuite dans la propoſée, la premiere donnera zero; & les autres donneront des ſommes qui auront alternativement les ſignes + & —, ou — & +, & l'on aura deux limites de chacune des racines inégales de la propoſée, en prenant pour derniere limite le plus grand coëficient négatif de la propoſée augmenté de l'unité.

SECOND CAS.

SI les deux racines égales ſont les plus grandes, & qu'on ſubſtitue la premiere ou la plus petite racine de la propoſée dans l'équation des limites, à la place de l'inconnue, on trouvera en raiſonnant comme dans le premier cas, qu'elle donnera une ſomme toute connue qui aura le ſigne —, cette ſomme étant le produit des cinq differences qui ſont entre la premiere racine de la propoſée & les cinq autres, & qui ont chacune le ſigne —.

La ſubſtitution de la ſeconde racine inégale de la propoſée dans l'équation des limites, donnera une ſomme qui aura le ſigne +.

La ſubſtitution de la troiſiéme donnera une ſomme qui aura le ſigne —.

La ſubſtitution de la quatriéme, qui eſt la plus grande racine inégale, donnera une ſomme qui aura le ſigne +.

La ſubſtitution de la cinquiéme & ſixiéme, qui ſont les racines égales, donnera zero.

D'où il ſuit 1°. que la premiere ou plus petite racine de la propoſée eſt moindre que la plus petite racine de l'équation des limites.

La ſeconde racine de la propoſée eſt moyenne entre la premiere & la ſeconde racine de l'équation des limites.

Et

Et ainsi de suite jusqu'à la quatriéme & plus grande racine inégale de la proposée, qui est moyenne entre la troisiéme & la quatriéme racine de l'équation des limites; & les deux racines égales de la proposée, qui sont la cinquiéme & la sixiéme, sont chacune égale à la cinquiéme racine de l'équation des limites.

2°. Par consequent la premiere, la seconde & la troisiéme racine de l'équation des limites, ont chacune deux limites; ainsi elles sont réelles.

La cinquiéme est aussi une grandeur réelle, puisque c'est la racine égale de la proposée.

La quatriéme racine de l'équation des limites est donc aussi réelle; puisque les racines imaginaires ne peuvent être que deux à deux.

3°. La premiere racine de l'équation des limites est moyenne entre la premiere racine de la proposée & la seconde racine.

La seconde racine de l'équation des limites est moyenne entre la seconde & la troisiéme racine de la proposée.

La troisiéme racine de l'équation des limites est moyenne entre la troisiéme & la quatriéme racine de la proposée.

Enfin la quatriéme racine de l'équation des limites surpasse la quatriéme & plus grande racine inégale de la proposée.

Ainsi prenant zero pour la moindre des limites de la proposée, & substituant de suite dans la proposée à la place de l'inconnue, zero, la premiere, la seconde, la troisiéme, la quatriéme racine de l'équation des limites, les sommes toutes connues qui en viendront auront alternativement — & +, ou + & —; & l'on aura deux limites pour chacune des racines inégales de la proposée.

TROISIÉME CAS.

LORSQU'IL y a des racines inégales dans la proposée, moindres que les racines égales, par exemple deux, & qu'il y a encore d'autres racines inégales plus grandes que les racines égales, par exemple deux, il est toujours évident qu'en substituant la premiere, c'est-à-dire la plus petite des racines inégales de la proposée, à la place de l'inconnue dans l'équation des limites, la somme toute connue qui

en viendra, aura le ſigne —; puiſqu'elle eſt le produit des cinq differences qui ſont entre la premiere racine & les cinq autres de la propoſée, leſquelles differences ont chacune le ſigne —.

Si on ſubſtitue la ſeconde racine inégale de la propoſée, la ſomme qui en viendra aura le ſigne +, étant le produit des cinq differences qui ſont entre la ſeconde racine & toutes les autres, deſquelles differences la premiere a le ſigne +, & chaque autre le ſigne —.

Si on ſubſtitue la troiſiéme & la quatriéme racine de la propoſée, elles donneront zero; parceque ce ſont les deux racines égales.

Si on ſubſtitue la cinquiéme racine de la propoſée, qui eſt la troiſiéme des inégales, la ſomme aura le ſigne —, parcequ'elle eſt le produit des cinq differences qui ſont entre la cinquiéme racine de la propoſée & toutes les autres, dont une ſeule a le ſigne —, & toutes les autres le ſigne +.

Enfin ſi on ſubſtitue la ſixiéme racine de la propoſée, qui eſt la quatriéme des inégales, la ſomme aura le ſigne +.

D'où il ſuit, 1°. que la premiere ou la plus petite des racines de la propoſée eſt moindre que la premiere racine de l'équation des limites.

La ſeconde racine de la propoſée ſurpaſſe la premiere racine de l'équation des limites, & elle eſt moindre que la ſeconde.

La troiſiéme & la quatriéme racine de la propoſée ſont égales à la troiſiéme de l'équation des limites; puiſqu'elles donnent zero.

La cinquiéme racine de la propoſée ſurpaſſe la quatriéme racine de l'équation des limites, mais elle eſt moindre que la cinquiéme.

Enfin la ſixiéme racine de la propoſée ſurpaſſe la cinquiéme & plus grande racine de l'équation des limites.

2°. Par conſequent la premiere racine de l'équation des limites a deux limites; la troiſiéme eſt la racine égale commune aux deux équations.

La cinquiéme racine de l'équation des limites a deux limites, qui ſont la cinquiéme & ſixiéme racine de la propoſée.

Ces trois racines de l'équation des limites ſont donc réelles.

La ſeconde & la quatriéme le ſont auſſi, car il eſt impoſſible qu'elles ſoient imaginaires, étant impoſſible qu'il y ait une grandeur reelle entre deux racines imaginaires, qui donne zero; & la troiſiéme & quatriéme racine de la propoſée donnent zero, & ſont entre la ſeconde & la quatriéme racine de l'équation des limites.

Ainſi toutes les racines de l'équation des limites ſont réelles.

3°. La premiere ou plus petite racine de l'équation des limites eſt donc moyenne entre la premiere & la ſeconde racine de la propoſée.

La ſeconde racine de l'équation des limites ſurpaſſe la ſeconde racine de la propoſée.

Ainſi en prenant zero pour la moindre limite de la premiere racine de la propoſée, l'on a les limites de la premiere & de la ſeconde racine inégale de la propoſée.

La troiſiéme racine de l'équation des limites eſt la troiſiéme & la quatriéme de la propoſée.

La quatriéme racine de l'équation des limites eſt moindre que la cinquiéme racine de la propoſée.

La cinquiéme racine de l'équation des limites eſt moyenne entre la cinquiéme & la ſixiéme racine de la propoſée.

Ainſi en prenant le plus grand coëficient négatif de la propoſée augmenté de l'unité, l'on aura toutes les limites des racines de la propoſée.

X.

Pour les racines imaginaires.

IL eſt donc évident que quand toutes les racines d'une équation propoſée ſont réelles & poſitives, toutes les racines de l'équation des limites le ſont auſſi: Par conſequent s'il y a des racines imaginaires dans l'équation des limites, qui ne peuvent être que deux à deux, il y a autant de racines imaginaires dans la propoſée.

Mais il faut remarquer que quand toutes les racines de l'équation des limites ſont réelles, ce n'eſt pas une marque aſſurée qu'il n'y ait point de racines imaginaires dans la propoſée, comme on le voit dans cet exemple.

Soit l'équation du ſecond degré $xx - 2ax + \begin{matrix} aa \\ +ff \end{matrix} = 0$,

dont deux racines sont imaginaires : qu'on la multiplie par l'équation lineaire $x - a - g = 0$; le produit est une équation du troisiéme degré dont deux racines sont imaginaires. Qu'on multiplie chaque terme du produit par l'exposant du degré de l'inconnue de ce terme, & le dernier terme par zero; on aura l'équation des limites, qui étant divisée par $3x$, donne l'équation du 2e degré, qui est l'équation des limites, dans laquelle, si l'on suppose que le dernier terme $+ aa + \frac{2}{3}ag + \frac{1}{3}ff$ est moindre

$$\begin{array}{llll} x^3 - 3axx & + 3aax & - a^3 & = 0, \\ - gxx & + 2agx & - aag & \\ & + ffx & - aff & \\ & & - ffg & \\ 3 \quad\quad 2 & \quad 1 & \quad 0 & \\ \hline 3x^3 - 6axx & + 3aax & = 0, & \\ - 2gxx & + 2agx & & \\ & + ffx & & \\ \hline xx - 2ax & + aa & = 0, & \\ - \frac{2}{3}gx & + \frac{2}{3}ag & & \\ & + \frac{1}{3}ff & & \end{array}$$

que le quarré de la moitié du coëficient $- 2a - \frac{2}{3}g$ du 2e terme, qui est $+ aa + \frac{2}{3}ag + \frac{1}{9}gg$, ou qu'il lui est égal; il est certain que les deux racines de cette équation du second degré, qui est l'équation des limites, seront toutes deux réelles & positives : Mais il est évident que le dernier terme $+ aa + \frac{2}{3}ag + \frac{1}{3}ff$, sera moindre que $aa + \frac{2}{3}ag + \frac{1}{9}gg$, si $\sqrt{\frac{1}{3}ff}$ est moindre que $\sqrt{\frac{1}{9}gg} = \frac{1}{3}g$.

Ainsi, dans ce cas l'équation des limites aura toutes ses racines réelles, & cependant l'équation proposée aura deux de ses racines imaginaires.

En voici un exemple en nombres. Soit $xx - 6x + 9 = 0$, dont les racines sont imaginaires. Qu'on $ + 1$ la multiplie par l'équation lineaire . . . $x - 9 = 0$,

on aura l'équation du 3e degré dont deux racines sont imaginaires. Qu'on la multiplie par la progression arithmetique, on aura le produit . . . . . qui étant divisé par $3x$, se réduit à . . . .

$$\begin{array}{l} x^3 - 15xx + 64x - 90 = 0, \\ 3 \quad\quad 2 \quad\quad 1 \quad\quad 0, \\ \hline 3x^3 - 30xx + 64x \quad = 0, \\ \hline xx - 10x + 21\frac{1}{3} \quad = 0, \end{array}$$

dont les deux racines sont réelles, l'une étant $x = 5 + \sqrt{3\frac{2}{3}}$, & l'autre étant $x = 5 - \sqrt{3\frac{2}{3}}$.

COROLLAIRE XI.

144. APRÈS les remarques précedentes, il eſt évident qu'en prenant zero pour la plus petite des limites des racines d'une équation quelconque, dont tous les termes ont alternativement + & —, & le plus grand coëficient négatif de cette équation, augmenté d'une unité ou d'un plus grand nombre, pour la plus grande des limites, & les racines de l'équation des limites pour les limites moyennes; l'on aura toutes les limites des racines de la propoſée, deux limites pour chacune.

Zero & la premiere racine de l'équation des limites, ſeront les limites de la premiere racine de la propoſée.

La premiere & la ſeconde racine de l'équation des limites, ſeront les limites de la ſeconde racine de la propoſée.

La ſeconde & la troiſiéme racine de l'équation des limites, ſeront les limites de la troiſiéme racine de la propoſée.

Et ainſi de ſuite juſqu'à la derniere racine de l'équation des limites; cette derniere racine & le plus grand coëficient négatif de la propoſée, augmenté de l'unité ou d'un autre nombre, ſeront les limites de la derniere racine de la propoſée.

Ainſi zero étant ſubſtitué à la place de l'inconnue dans la propoſée, la ſomme toute connue qui en viendra ſera le dernier terme de la propoſée, avec ſon ſigne qui eſt + dans les équations des degrez pairs, & — dans les équations des degrez impairs.

La premiere racine de l'équation des limites étant enſuite ſubſtituée dans la propoſée à la place de l'inconnue, la ſomme aura un ſigne oppoſé au précedent.

La ſeconde racine de l'équation des limites étant enſuite ſubſtituée dans la propoſée, la ſomme toute connue aura un ſigne oppoſé au précedent, & ainſi de ſuite.

COROLLAIRE XII.

145. LORSQU'UNE des racines de l'équation des limites étant ſubſtituée dans la propoſée, donne zero, il y a deux racines égales dans la propoſée.

Si pluſieurs racines differentes de l'équation des limites, étant ſubſtituées, donnent zero, il y a deux fois autant de racines égales, deux à deux, dans la propoſée.* *74.

COROLLAIRE XIII.

146. LORSQU'UNE des racines de l'équation des limites étant ſubſtituée dans la propoſée à la place de l'inconnue, la ſomme qui en vient n'a pas le ſigne qu'elle devroit avoir, & n'eſt pas zero, il y a deux racines imaginaires dans la propoſée.

Si pluſieurs racines de l'équation des limites étant ſubſtituées dans la propoſée, les ſommes qui en viennent n'ont pas le ſigne qu'elles devroient avoir, ſi les racines de la propoſée étoient toutes réelles, ou ne ſont pas zero, il y aura deux fois autant de racines imaginaires dans la propoſée, que l'on trouvera de fois des ſignes contraires à ceux qu'on devroit trouver.

Ainſi ſi l'on trouve deux fois que les racines de l'équation des limites étant ſubſtituées dans la propoſée, donnent des ſignes contraires à ceux qu'elles devroient donner, il y a quatre racines imaginaires dans la propoſée.

COROLLAIRE XIV.

147. L'EQUATION des limites pouvant elle-même être conſiderée comme une équation principale, ſi on en multiplie chaque terme par l'expoſant du degré de l'inconnue de ce terme, & le dernier terme par zero, le produit ſera ſon équation des limites, à qui il faudra appliquer tout ce qu'on a dit de l'équation des limites: Et ſi on continue de multiplier chaque terme de cette nouvelle équation des limites par l'expoſant du degré de l'inconnue de ce terme, & le dernier terme par zero, on aura l'équation des limites de l'équation précedente; en continuant cette operation juſqu'à ce qu'on ſoit arrivé à une équation lineaire, l'on aura toutes les limites des racines de toutes ces équations des limites.

Car la racine de l'équation lineaire avec zero & le plus grand coëficient négatif de l'équation des limites du ſecond degré, augmenté de l'unité, ſeront les limites des racines de cette équation du ſecond degré.

Les racines de celle-ci avec zero & le plus grand coëficient négatif de l'équation du troiſiéme degré, augmenté de l'unité, ſeront les limites de l'équation des limites du troiſiéme degré; & ainſi de ſuite juſqu'à l'équation propoſée.

SECTION II.

Où l'on explique la méthode de trouver les limites des racines d'une équation numerique quelconque.

PROBLÊME I.

148. *TROUVER les limites par ordre de toutes les racines d'une équation numerique quelconque.*

ON ſuppoſe que l'équation eſt ſans fractions, que ſon premier terme n'a pas d'autre coëficient que l'unité, & que tous ſes termes ont alternativement les ſignes + & —. On a vû dans le troiſiéme Livre les moyens de lui donner ces préparations.

1°. Il faut multiplier chaque terme de l'équation propoſée par le nombre qui eſt l'expoſant du degré de l'inconnue de ce terme, & multiplier le dernier terme par zero. Il faut diviſer le produit par l'inconnue lineaire, & il ſera l'équation des limites de la propoſée, moindre d'un degré que la propoſée, & dont toutes les racines priſes de ſuite ſeront les limites des racines de la propoſée. Il faut multiplier chaque terme de cette premiere équation des limites par l'expoſant du degré de l'inconnue de ce terme, & le dernier terme par zero ; & le produit étant diviſé par deux fois l'inconnue (car on trouvera que tous les termes ſe peuvent diviſer par $2x$) ſera la ſeconde équation des limites, dont les racines ſeront les limites de la précedente. Il faut multiplier chaque terme de cette ſeconde équation des limites par l'expoſant du degré de l'inconnue, & le dernier terme par zero ; & parcequ'on trouvera que chaque terme ſe peut diviſer par $3x$, il faut diviſer le produit par $3x$; & l'on aura la troiſiéme équation des limites, dont les racines ſeront les limites de la précedente. On continuera d'operer de cette maniere juſqu'à ce qu'on ſoit arrivé à une équation lineaire ; ce ſera la derniere équation des limites.

2°. Il faudra prendre zero pour la moindre limite de l'équation du ſecond degré ; la racine de l'équation lineaire pour la ſeconde limite ; & le plus grand coëficient négatif augmenté de l'unité ou d'un nombre arbitraire, pour la troi-

ſiéme & plus grande limite de la même équation du ſecond degré ; & l'on aura ainſi toutes les limites des racines de l'équation du ſecond degré.

Il faudra prendre pour les limites des racines de l'équation du troiſiéme degré, zero, les deux racines de l'équation du ſecond degré, & le plus grand coëficient négatif de l'équation du troiſiéme degré, augmenté de l'unité ; & l'on aura ainſi toutes les limites des racines de l'équation du troiſiéme degré, deux limites pour chacune.

Il faudra prendre de même zero, les racines de l'équation du troiſiéme degré, & le plus grand coëficient négatif de l'équation du quatriéme degré, augmenté de l'unité ou d'un autre nombre, pour les limites de l'équation des limites du quatriéme degré ; & l'on aura ainſi deux limites pour chaque racine de cette équation.

Il faudra faire la même choſe pour les équations ſuivantes juſqu'à la propoſée, dont zero, les racines de la premiere équation des limites, & le plus grand coëficient négatif de la propoſée, augmenté de l'unité ou d'un autre nombre, ſeront les limites, & il y en aura deux pour chacune des racines de la propoſée.

On enſeignera dans la Section ſuivante la maniere de trouver chaque racine d'une équation, lorſqu'on en a les deux limites.

Pour les racines égales.

QUAND une des racines d'une des équations des limites étant ſubſtituée dans toutes les équations qui la précedent, donne zero au lieu de donner une ſomme qui ait le + ou le —, qu'elle doit avoir, il y a dans ce cas des racines égales dans la propoſée. Voici la maniere d'en déterminer le nombre.

Si une ſeule des racines de la premiere équation des limites étant ſubſtituée dans la propoſée, donne zero, il y a deux racines égales dans la propoſée.

Si deux racines étoient égales dans la premiere équation des limites, & donnoient zero étant ſubſtituées dans la propoſée, il y auroit trois racines égales dans la propoſée ; & ainſi de ſuite.

Si deux racines de l'équation des limites, quoiqu'inégales entr'elles, étoient auſſi les racines de la propoſée, elle auroit quatre racines égales, deux à deux.

Si

Si une des racines de la ſeconde équation des limites étant ſubſtituée dans la premiere équation des limites, & dans la propoſee, donne zero, il y a trois racines égales dans la propoſée.

S'il y avoit deux racines égales dans la ſeconde équation des limites, & qu'elles donnaſſent zero étant ſubſtituées dans les précedentes, il y auroit quatre racines égales dans la propoſée ; & ainſi de ſuite.

Si une des racines de la troiſiéme équation des limites étant ſubſtituée dans la ſeconde, & dans les précedentes, donne zero, il y a quatre racines égales dans la propoſée ; & ainſi des autres qui ſuivent la troiſiéme équation des limites, juſqu'à l'équation lineaire, dont la racine étant ſubſtituée dans l'équation des limites du ſecond degré & dans les autres qui la précedent, ſi elle donne zero, toutes les racines de la propoſée ſeront égales.

Tout ce qu'on vient de dire des racines égales eſt une ſuite évidente de ce qu'on en a démontré dans la derniere Section du quatriéme Livre.

Quand on trouve par la méthode de ce Problême, que la propoſée contient des racines égales, le plus court eſt de diviſer la propoſée par l'équation compoſée de toutes les racines égales, & l'on aura un quotient qui contiendra les ſeules racines inégales de la propoſée, dont on trouvera les limites par le premier article.

Pour les racines imaginaires.

QUAND une racine d'une des équations des limites étant ſubſtituée à la place de l'inconnue dans l'équation qui la précede immédiatement, & dont ſes racines ſont les limites, la ſomme qui en vient n'a pas le ſigne + ou —, qu'elle devroit avoir ſi les racines étoient toutes réelles & inégales, & que cette ſomme n'eſt pas zero ; dans ce cas il y a deux racines imaginaires dans l'équation qui la précede, & dans toutes les autres équations des limites qui la précedent, juſqu'à la propoſée, qui a auſſi deux racines imaginaires.

Si deux racines d'une des équations des limites ne donnoient dans celle qui la précede immédiatement, ni le ſigne qu'elles doivent donner, ni zero, il y auroit quatre racines imaginaires dans la propoſée ; & ainſi de ſuite.

Les autres racines réelles de l'équation qui précede n'au-

roient pas moins leurs limites, il y en auroit deux pour chacune, en prenant zero pour la moindre, le plus grand coëficient négatif augmenté de l'unité, pour la plus grande, & les autres racines de l'équation des limites, dont on parle, pour les limites moyennes.

Toute cette méthode est une suite évidente de tout ce qui précede.

Application du Problême à des exemples.

EXEMPLE I.

POUR trouver les limites des racines de l'équation du troisiéme degré . . $x^3 - 114xx + 3744x - 30240 = 0$,

1°. On multipliera ses termes par . . . $3 \quad 2 \quad 1 \quad 0$;

on divisera le produit $3x^3 - 228xx + 3744x \quad = 0$,

par x, & l'on aura l'équation des limites $3xx - 228x + 3744 \quad = 0$.

On multipliera ses termes par . . . $2 \quad 1 \quad 0$,

& l'on aura le produit . . . . . $6xx - 228x = 0$,

qui étant divisé par $6x$, donnera . . $x - 38 \quad = 0$,

qui est la derniere équation des limites, ou l'équation lineaire des limites.

2°. Pour avoir à present les limites, l'on ôtera le coëficient du premier terme de l'équation des limites du second degré $3xx - 228x + 3744 = 0$, ce qui se fera ici en divisant chaque terme par 3, & l'on aura $xx - 76x + 1248 = 0$, pour l'équation des limites du second degré.

Zero & la racine $+ 38$ de l'équation lineaire, seront les limites de la 1re racine de l'équation $xx - 76x + 1248 = 0$.

$+ 38$ & $+ 77$, qui est le plus grand coëficient négatif de cette équation augmenté de l'unité, seront les limites de sa seconde racine.

Ainsi en substituant zero au lieu de x dans l'équation $xx - 76x + 1248 = 0$, l'on aura $+ 1248$.

En substituant la seconde limite 38, on aura $- 196$.

En substituant la troisiéme limite $+ 77$, on aura $+ 1325$.

Et l'on trouvera par les méthodes de la Section suivante, que les deux racines de $xx - 76x + 1248 = 0$, sont 24 & 52.

Ainsi zero & 24 sont les limites de la premiere racine de la proposée $x^3 - 114xx + 3744x - 30240 = 0$, c'est-à-dire, la premiere racine de la proposée est entre zero & 24; & en substituant zero au lieu de l'inconnue x dans la proposée, la somme toute connue qui en viendra, aura le signe $-$; en substituant 24, la somme aura $+$.

24 & 52 sont les limites de la seconde racine de la proposée, & en substituant 52, la somme aura $-$.

Enfin 52 & le plus grand coëficient négatif de la proposée, augmenté de l'unité, qui est 30241, sont les limites de la troisiéme racine de la proposée; & en substituant 30241, la somme qui en viendra aura $+$.

L'on a donc les limites de toutes les racines de la proposée, deux limites pour chacune; *ce qu'il faloit trouver.*

Second exemple où il y a des racines égales.

POUR trouver les limites des racines de cette équation du troisiéme degré . . $x^3 - 30xx + 288x - 864 = 0$,
1°. on multipliera ses termes par . . . . . $3 \quad 2 \quad 1 \quad 0$,
& l'on aura la premiere équation des limites . . $3x^3 - 60xx + 288x = 0$,
qui étant divisée par x, donnera . . . . . . $3xx - 60x + 288 = 0$;
multipliant cette équation par . . . . . $2 \quad 1 \quad 0$
l'on aura la derniere équation des limites . . $6xx - 60x = 0$,
qui étant divisée par $6x$, se réduit à l'équation lineaire . . . . . . $x - 10 = 0$.

2°. Pour avoir les limites de l'équation du second degré $3xx - 60x + 288 = 0$, on divisera ses termes par 3, & l'on aura $xx - 20x + 96 = 0$ pour la premiere équation des limites. Les limites de la premiere racine de $xx - 20x + 96 = 0$, sont zero & la racine 10 de la derniere équation des limites. Les limites de la seconde racine de $xx - 20x + 96 = 0$, sont 10 & son plus grand coëficient négatif augmenté de l'unité, qui est 21. On trouvera par les méthodes de la Section suivante, que les racines de la

premiere équation des limites $xx - 20x + 96 = 0$, sont 8 & 12.

Ainsi 0, 8, 12, 865, sont les limites des racines de la proposée : mais parcequ'on trouve que 12 étant substitué dans la proposée à la place de x, la somme qui en vient est zero, & qu'ainsi 12 en est une racine ; la proposée a deux racines égales 12, 12, & il ne lui reste plus qu'une racine inégale, dont les limites sont 0 & 8.

Mais le plus court est de diviser la proposée par l'équation composée des deux racines égales 12 & 12, qui est $xx - 24x + 144 = 0$, & le quotient $x - 6 = 0$, contiendra la racine inégale.

Troisiéme exemple où il y a des racines imaginaires.

POUR trouver les limites des racines de cette équation du quatriéme degré $x^4 - 76x^3 + 1872xx - 15120x + 35136 = 0$,

1°. on multipliera ses termes par . . . $4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0$,

& l'on aura la 1re équation des limites $4x^4 - 228x^3 + 3744xx - 15120x = 0$,

qui se réduit en divisant par $4x$ à . . . $x^3 - 57xx + 936x - 3780 = 0$.

On multipliera cette équation par . . . $3 \quad 2 \quad 1 \quad 0$,

& on aura la seconde équation des limites $3x^3 - 114xx + 936x = 0$,

qui étant divisée par $3x$, se réduit à . . . $xx - 38x + 312 = 0$,

On multipliera cette équation par . . . $2 \quad 1 \quad 0$,

& on aura la derniere équation des limites $2xx - 38x = 0$;

qui étant divisée par $2x$, se réduit à l'équation lineaire . . . $x - 19 = 0$.

2°. Pour avoir les limites des deux racines de l'équation des limites du 2e degré $xx - 38x + 312 = 0$, on prendra zero pour premiere limite ; la racine 19 de l'équation lineaire des limites $x - 19 = 0$, pour seconde limite ; & le plus grand coëficient négatif de l'équation $xx - 38x + 312 = 0$,

augmenté de l'unité, qui eſt 39, pour la troiſiéme limite. Ainſi les trois limites ſeront 0, 19, 39.

On trouvera par les méthodes de la Section ſuivante, en ſe ſervant de ces limites, que les deux racines de la ſeconde équation des limites $xx - 38x + 312 = 0$, ſont 12 & 26.

Ainſi les limites de la premiere équation des limites $x^3 - 57xx + 936x - 3780 = 0$, ſeront 0, 12, 26, 3781, par le moyen deſquelles on trouvera que les racines de la premiere équation des limites $x^3 - 57xx + 936x - 3780 = 0$, ſont 6, 21, 30.

Par conſequent les limites des racines de la propoſée $x^4 - 76x^3 + 1872xx - 15120x + 35136 = 0$, ſont 0, 6, 21, 30, 15121. *Ce qu'il faloit trouver.*

En ſubſtituant zero dans la propoſée au lieu de x, la ſomme toute connue qui en vient eſt le dernier terme, & elle a le ſigne +.

En ſubſtituant la ſeconde limite 6, la ſomme a le ſigne —.

En ſubſtituant la troiſiéme limite 21, la ſomme a le ſigne +.

En ſubſtituant la quatriéme limite 30, la ſomme qui devroit avoir le ſigne —, a encore le ſigne +. C'eſt une marque certaine qu'il y a deux racines imaginaires dans la propoſée, & deux racines réelles, dont on trouvera par les méthodes de la Section ſuivante, que la premiere eſt 4, & que la ſeconde eſt incommenſurable, plus grande que 8, & moindre que 9.

REMARQUE.

POUR faire concevoir clairement la méthode du Problême, on a choiſi des exemples dont les équations des limites euſſent ces deux conditions: 1°. qu'elles ſe trouvaſſent ſans fractions, le coëficient de leur premier terme étant un diviſeur exact de tous les autres termes: 2°. que toutes les racines des équations des limites fuſſent commenſurables. Quand ces deux conditions ne ſe trouvent pas, qui eſt le cas le plus ordinaire, on verra à la fin de la Section ſuivante le moyen de trouver, nonobſtant cela, les limites qu'on cherche.

PROBLÊME II.

149. *QUAND on a les limites des racines d'une équation, trouver les limites des racines de toute équation en laquelle on transformera la premiere.*

PAR exemple on a l'équation $x^3 - 114xx + 3744x - 30240 = 0$, dont on connoît les limites 0, 24, 52, 24241; on veut la transformer en une autre, soit en supposant par exemple $x - 10 = y$, qui se réduit à $x = y + 10$,

ou $x + 10 = y$ $\quad x = y - 10$,

ou $10 - x = y$ $\quad x = 10 - y$,

ou $10x = y$ $\quad x = \frac{y}{10}$,

ou $\frac{x}{10} = y$ $\quad x = 10y$,

ou enfin de quelqu'autre maniere qu'on voudra. Substituant ensuite la valeur de x prise dans quelqu'une de ces équations où x est lineaire, au lieu de x dans la proposée, l'équation qui en naîtra sera la transformée.

Pour avoir les limites des racines de la transformée, il faut substituer les limites successivement à la place de x dans l'équation où x est lineaire, & qui a servi à faire la transformation; & les valeurs de y toutes connues qui viendront de ces substitutions, seront les limites des racines de la transformée; par exemple en substituant 0 à la place de x dans l'équation $x - 10 = y$, on aura $0 - 10 = y$; ainsi la premiere limite de la transformée sera -10.

En substituant 24, on aura la seconde limite $24 - 10 = 14 = y$.

En substituant 52, on aura $52 - 10 = 42 = y$, ainsi la troisiéme limite de la transformée sera 42.

Il en est de même des autres transformations.

DÉMONSTRATION.

*36. IL est évident par la transformation, * que les racines de la transformée sont les racines mêmes de la proposée, diminuées ou augmentées de la grandeur connue 10, ou de telle autre qu'on voudra, ou multipliées ou divisées par cette même grandeur, &c. Par consequent si l'on diminue, ou si l'on augmente, ou si l'on multiplie, ou si l'on divise, &c. chaque limite de la proposée de la même maniere, il est

viſible que les grandeurs qui en viendront, ſeront les limites des racines de la transformée, ceſt à-dire, ces racines ſeront des grandeurs moyennes entre ces limites.

Mais en ſubſtituant chaque limite des racines de la propoſée à la place de x, dans l'équation qui a ſervi à la transformation, dans laquelle équation x eſt lineaire, il eſt évident que les limites de la propoſée ſont diminuées ou augmentées de la grandeur, par exemple 10, dont les racines de la propoſée ſont diminuées ou augmentées dans la transformée ; ou bien qu'elles ſont multipliées ou diviſées, &c. par la même grandeur 10, par laquelle les racines de la propoſée ſont multipliées ou diviſées, &c. dans la transformée. Les grandeurs qu'on trouve par ce Problême ſont donc les limites de la transformée.

COROLLAIRE.

SI l'on transforme une équation propoſée $x^3 - 114xx$, &c. en une autre dont les racines ſoient celles de la propoſée, diminuées chacune d'une des limites des racines de la propoſée, par exemple de 24, qui eſt la plus petite des deux limites de la ſeconde racine de la propoſée, en ſuppoſant $x - 24 = y$; il eſt évident que la plus petite des deux limites de la ſeconde racine de la transformée ſera zero ; la ſeconde limite ſera la difference qui eſt entre la limite 24 & la limite ſuivante 52, c'eſt-à-dire ſa ſeconde limite ſera 28 ; & les limites des racines ſuivantes de la transformée, ſi elle en a pluſieurs, ſeront les differences qui ſe trouvent entre la limite 24 & chacune des limites ſuivantes de la propoſée.

REMARQUES.

I.

QUAND on trouve par le Problême précedent une grandeur négative pour la premiere limite de la premiere racine d'une transformée ; comme on a trouvé la grandeur négative -10, il faut prendre zero pour premiere limite de la premiere racine de la transformée, & non pas la grandeur négative -10 : Cela eſt plus commode dans la pratique.

II.

Quand toutes les racines d'une équation ſont poſitives, ou toutes négatives & réelles, comme le coëficient du ſecond

terme en est la somme, si l'on prend le tiers de ce coëficient, si elle est du troisiéme degré, le quart si elle est du 4e degré, & ainsi de suite ; cette grandeur sera une limite moyenne, au moins entre la plus petite & la plus grande des racines.

Ainsi la plus petite des racines est entre zero & cette limite moyenne ; & la plus grande des racines est entre cette limite moyenne & le plus grand coëficient négatif de la proposée, augmenté de l'unité ou d'un autre nombre.

On pourra trouver la plus petite & la plus grande racine de la proposée en se servant de ces limites par les méthodes de la Section suivante.

AVERTISSEMENT.

CEUX qui commencent & ceux qui ne sçavent pas le calcul des differences, doivent passer à la Section suivante.

THEORÊME X.

150. *LES racines de l'équation des limites formée par la méthode du premier Problème, sont les veritables limites des racines de la proposée dont elle est l'équation des limites, c'est-à dire, elles sont les veritables limites moyennes entre la plus petite & la plus grande racine de la proposée.*

POUR bien entendre ce Theorême, il faut remarquer, 1°. que dans une équation proposée comme $xx - 76x + 1248 = 0$, dont les racines sont 24 & 52, toutes les grandeurs qui sont entre 24 & 52, comme 25, 26, 27, 28, &c. sont des grandeurs moyennes, ou des limites entre la premiere racine 24 & la seconde racine 52 ; & que la substitution de chacune de ces grandeurs à la place de x dans la proposée, donnera differentes sommes toutes connues, dont chacune aura toujours le même signe —.

2°. Que les sommes toutes connues qui naissent de la substitution de + 25, 26 27, &c. vont toujours en augmentant, c'est-à-dire, celle qui vient de la substitution de 25 est moindre que celle qui vient de la substitution de 26, & celle-ci moindre que celle qui vient de la substitution de 27 ; & elles vont ainsi en augmentant jusqu'à la substitution de la limite 38 trouvée par le premier Problême, qui donne une somme qui est la plus grande de toutes.

Et

Et ſubſtituant enſuite 39, 40, 41, 42 & les autres nombres ſuivans, les ſommes toutes connues qui naiſſent des ſubſtitutions vont en diminuant, celle qui vient de la ſubſtitution de 39 étant plus grande que celle qui vient de la ſubſtitution de 40, & celle-ci plus grande que celle qui vient de la ſubſtitution de 41, & ainſi de ſuite juſqu'à la ſubſtitution de la racine 52 qui donne zero.

Or j'appelle *la veritable limite* la grandeur 38, qui eſt celle de toutes les limites qui ſont entre la racine 24 & la racine 52, qui étant ſubſtituée dans la propoſée, donne la plus grande ſomme toute connue, les autres limites donnant chacune de moindres ſommes toutes connues: Et je dis que les limites qu'on trouve par le Problême, c'eſt-à-dire les racines de l'équation des limites, ſont les veritables limites moyennes des racines de la propoſée entre la premiere & la derniere racine de la propoſée; c'eſt-à-dire, qu'étant ſubſtituées dans la propoſée, les ſommes toutes connues qui en viennent, ſont plus grandes que celles qui viennent de la ſubſtitution des autres limites, qui ne ſont pas celles que j'appelle les veritables, & leſquelles veritables limites ſe trouvent par le premier Problême.

Pour le démontrer, 1°. il faut ſuppoſer dans le ſecond membre d'une équation propoſée, comme $x^3 - 114xx + 3744x - 30240 = 0$, dont les racines ſont 12, 42, 60, au lieu de zero, une grandeur indéterminée y, & l'on aura $x^3 - 114xx + 3744x - 30240 = y$.

2°. Il faut concevoir diſtinctement que x repréſentant tous les nombres imaginables qu'on peut ſubſtituer à ſa place dans le premier membre, y repréſente toutes les ſommes connues qui naîtront de la ſubſtitution de chacune de ces grandeurs à la place de x.

Et pour concevoir diſtinctement toutes ces grandeurs que repréſente y, il faut commencer par la ſubſtitution de zero à la place de x; & allant ſucceſſivement par ordre, il faut concevoir qu'on ſubſtitue à la place de x, après la ſubſtitution de zero, un nombre ſi petit qu'il differe de zero moins qu'aucune grandeur donnée, quelque petite qu'elle puiſſe être, & cette grandeur moindre qu'aucune grandeur donnée, eſt ce qu'on appelle une *grandeur infiniment petite*, ou une *difference*.

Il faut ensuite concevoir qu'on substitue aprés la grandeur précedente une autre grandeur plus grande, mais qui ne surpasse la precedente que d'une grandeur infiniment petite, ou d'une difference.

Concevant ainsi de suite qu'on substitue des grandeurs par ordre qui ne se surpassent que d'une grandeur infiniment petite, on concevra en même temps que les sommes toutes connues qui naissent par ordre de ces substitutions, vont toujours en diminuant, & sont représentées par y, & que le premier y surpasse le second d'une grandeur infiniment petite, le second surpasse le troisiéme d'une grandeur infiniment petite, & ainsi de suite jusqu'à ce que concevant que la premiere racine de la proposée $x^3 - 114xx + 3744x - 30240 = y$, qui est 12, étant substituée à la place de x, la somme toute connue qui en vient est zero; ainsi y représente alors zero, & n'est aucune grandeur réelle.

Continuant de concevoir qu'on substitue à la place de x un nombre qui surpasse la premiere racine 12 d'une grandeur infiniment petite, & ensuite une autre qui surpasse le précedent d'une difference, & ainsi de suite, on concevra en même temps que y, qui est toujours égale à chaque somme toute connue qui vient de chacune de ces substitutions, devient encore une grandeur réelle qui va en augmentant d'une grandeur infiniment petite, jusqu'à ce que concevant qu'on substitue la premiere limite qui est 24, y devient la plus grande somme toute connue que puissent donner les substitutions successives de chacun de tous les membres qui sont entre la premiere racine 12 & la seconde racine 42.

Et concevant qu'on substitue ensuite une grandeur qui surpasse la veritable limite 24 d'une difference, & ensuite une autre qui surpasse la précedente d'une difference, & ainsi de suite, y représentera les sommes toutes connues qui naissent de ces substitutions, qui vont en diminuant, & dont chacune surpasse celle qui la suit d'une difference, jusqu'à ce que concevant que l'on substitue à la place de x la seconde racine 42, l'on conçoive en même temps que la somme toute connue qui naît de cette substitution est zero, & qu'ainsi y représente alors zero, & n'est aucune quantité réelle.

On continuera le même raiſonnement ſur les ſubſtitutions des grandeurs qui ſont entre la ſeconde racine 42 & la troiſiéme racine 60, & ſur les ſommes repréſentées par y qui en naîtront; & ainſi de ſuite dans les équations des degrez plus élevez; & enſuite

3°. On remarquera que dans les ſubſtitutions des grandeurs qui ſont entre deux racines de la propoſée, par exemple des grandeurs qui ſont entre la premiere racine 12 & la ſeconde 42, à la place de x, les y, c'eſt à-dire les grandeurs que repreſente y, vont toujours en augmentant d'une difference juſqu'à la ſubſtitution de la veritable limite 24.

Que dans la ſubſtitution de 24, l'augmentation ceſſe, c'eſt-à dire qu'elle eſt nulle ou égale à zero, & qu'ainſi la difference de y eſt nulle dans cette ſubſtitution.

Et qu'enfin dans la ſubſtitution des grandeurs ſuivantes, juſqu'à celle de la racine 42, au lieu d'augmentation, c'eſt une diminution, & les y vont en diminuant juſqu'à ce qu'ils deviennent zero dans la ſubſtitution de la ſeconde racine 42.

D'où il ſuit, pour la démonſtration du 10e Theorême, que lorſque l'augmentation ou la difference de y eſt égale à zero, alors la valeur de x eſt celle qui étant ſubſtituée à ſa place dans la propoſée, donne une ſomme qui eſt la plus grande de toutes celles que donne la ſubſtitution des autres grandeurs moyennes entre deux racines, & que cette valeur de x eſt la veritable limite entre ces deux racines.

Pour trouver donc les veritables limites des racines, il ne faut que prendre la grandeur qui exprime la difference de y, la ſuppoſer égale à zero, & les racines de l'équation qui naîtra de cette ſubſtitution, c'eſt-à-dire les valeurs de x dans cette équation, ſeront les veritables limites des racines de la propoſée.

Or le calcul des differences apprend que pour prendre
la difference de $x^3 - 114xx + 3744x - 30240 = y$,
il faut multiplier $3 \quad 2 \quad 1 \quad 0$,
chaque terme ————————————
par l'expoſant $3xxdx - 228xdx + 3744dx = dy$
de ſon inconnue, & par la differencielle dx; qu'il faut multiplier le dernier terme par zero, & écrire au ſecond membre dy au lieu de y, & diviſer chaque terme par x, & l'on aura la difference $3xxdx - 228xdx + 3744dx = dy$.

Il faut ensuite supposer $dy = 0$, & l'on aura $3xxdx - 228xdx + 3744dx = 0$.

Il faut diviser chaque terme par dx, & l'on aura l'équation $3xx - 228x + 3744 = 0$; ou divisant par 3, $xx - 76x + 1248 = 0$, dont les racines étant substituées dans la proposée à la place de x, les sommes toutes connues qui en naîtront, seront plus grandes que toutes celles que pourront donner les substitutions des autres grandeurs moyennes entre les racines de la proposée.

Par conséquent les racines de l'équation des limites, qui est la même que celle qu'on vient de trouver, sont les veritables limites des racines de la proposée. *Ce qu'il faloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

151. SI l'on conçoit dans $x^3 - 114xx + 3744x - 30240 = y$, que y représente les plus grandes sommes toutes connues que donnent les substitutions successives des veritables limites des racines de la proposée, c'est-à-dire, par ce dixiéme Theorême, les sommes que donnent les substitutions successives des racines de l'équation des limites $xx - 76x + 1248 = 0$; & qu'on transpose y dans le premier membre; les racines de l'équation des limites $xx - 76x + 1248 = 0$, seront des racines exactes de l'équation $x^3 - 114xx + 3744x - 30240 - y = 0$; car les racines 24 & 52 de l'équation des limites étant substituées l'une après l'autre dans l'équation $x^3 - 114xx + 3744x - 30240 - y = 0$, la somme qui viendra de la 1re substitution sera $+ 7776$; & y représentant cette même somme là, l'on aura $+ 7776 - 7776 = 0$, ainsi la premiere racine 24 de l'équation des limites étant substituée à la place de x dans l'équation $x^3 - 114xx + 3744x - 30240 - y = 0$, donne zero; 24 est donc une racine de cette équation. La somme qui viendra de la substitution de 52 sera $- 3200$; & y représentant cette même somme, $- y$ sera égal à $+ 3200$; ainsi l'on aura $- 3200 + 3200 = 0$. La seconde racine 52 de l'équation des limites étant substituée à la place de x dans $x^3 - 114xx + 3744x - 30240 - y = 0$, donnant zero, est donc une racine de cette équation.

COROLLAIRE II.

152. D'OÙ il suit que chaque équation lineaire comme $x - 24 = 0$, $x - 52 = 0$, dont le premier terme est x, & le second l'une des racines de l'équation des limites, est un diviseur exact de l'équation $x^3 - 114xx + 3744x - 30240 - y = 0$, & de l'équation des limites $xx - 76x + 1248 = 0$, en supposant que y représente par raport à $x - 24 = 0$, la somme toute connue $+ 7776$, que donne la substitution de 24 à la place de x dans la proposée, & que y représente par raport à $x - 52 = 0$, la somme toute connue $- 3200$ que donne la substitution de 52 à la place de x dans la proposée.

COROLLAIRE III.

153. APRÈS avoir transposé y du second membre dans le premier membre d'une équation $x^3 - 114xx + 3744x - 30240 - y = 0$, si on la divise par son équation des limites $xx - 76x + 1248 = 0$, & après être arrivé à un reste où x ait un degré de moins que dans le diviseur $xx - 76x + 1248 = 0$, on divise ce diviseur par ce premier reste; & qu'on continue la methode de chercher le plus grand diviseur commun, jusqu'à ce qu'on soit arrivé à un reste $yy - 4576y + 24883200 = 0$, dans lequel x ne se trouve plus, & qui n'a d'inconnue que y, & qu'on suppose ce reste $yy - 4576y + 24883200$ égal à zero, & le dernier diviseur où x est lineaire aussi égal à zero, qui est $- 392x + 17184 - y = 0$, ou $+ 392x - 17184 + y = 0$. Il suit du Corollaire précedent que le reste, ou l'équation $yy - 4576y + 24883200 = 0$, (qui sera toujours du même degré que l'équation des limites, comme l'operation le démontre,) aura pour ses racines, ou pour les valeurs de y, les sommes toutes connues que donnent les substitutions successives des racines de l'équation des limites à la place de x dans la proposée, qui sont ici $+ 7776$ & $- 3200$; & en mettant successivement ces valeurs de y dans le dernier diviseur où x est lineaire, c'est-à-dire dans $392x - 17184 + y = 0$, l'on aura les deux équations lineaires $x - 24 = 0$, $x - 52 = 0$, qui sont les diviseurs communs aux

équations $x^3 - 114xx + 3744x - 30240 = 0$, où y repré-
$-y$

ſente ſucceſſivement $+7776$ & -3200, & $xx - 76x + 1248 = 0$, & qui contiennent les racines de l'équation des limites $xx - 76x + 1248 = 0$.

Ce Corollaire eſt une ſuite évidente du précedent & de la méthode de trouver le plus grand diviſeur commun de deux équations : car les racines de $yy - 4576y + 24883200 = 0$, ſont telles, qu'étant ſubſtituées à la place de y dans le dernier diviſeur où x eſt lineaire, qui eſt $392x - 17184$
$+y$

$= 0$, & dans $x^3 - 114xx + 3744x - 30240 = 0$, l'équa-
$-y$

tion lineaire eſt changée en deux autres, qui diviſent exactement l'équation des limites, & qui par conſéquent en contiennent les racines ; & ces mêmes équations lineaires diviſent auſſi exactement $x^3 - 114xx + 3744x - 30240 = 0$,
$-y$

où l'on ſuppoſe à la place de y, ſes deux valeurs $+7776$, -3200.

COROLLAIRE IV.

Pour les racines égales.

154. SOIT une équation qui a des racines égales $x^4 - 16x^3 + 72xx - 64x + 16 = 0$, dont l'équation des limites eſt $x^3 - 12xx + 36x - 16 = 0$; qu'on mette y à la place de zero, (conformément à la ſuppoſition du 2e Corollaire qui précede,) l'on aura $x^4 - 16x^3 + 72xx - 64x + 16 = y$. Les racines de l'équation des limites étant ſubſtituées ſucceſſivement à la place de x dans cette équation, les ſommes toutes
* 152. connues qui en viendront ſeront les valeurs de y* ; par conſéquent les racines égales étant communes à la propoſée & à l'équation des limites, il y aura tout autant de valeurs de y égales à zero, qu'il y aura de ces racines communes.

COROLLAIRE V.

Qui contient une méthode pour connoître quand une équation propoſée a des racines égales.

155. D'OU il ſuit & du troiſiéme Corollaire, que ſi l'on tranſpoſe y dans le premier membre ; qu'on cherche enſuite le

plus grand diviſeur commun de $x^4 - 16x^3 + 72xx - 64x + 16 = 0$, & de l'équation des limites $x^3 - 12xx + 36x$
$-y$
$- 16 = 0$, & qu'on continue l'operation juſqu'à ce qu'on ſoit arrivé à un reſte où x ne ſe trouve plus, & qui n'ait pour inconnue que y, en ſuppoſant ce reſte égal à zero ; il y aura autant de y égaux à zero dans l'équation de ce reſte, qu'il y a de racines communes à la propoſée $x^4 - 16x^3 + 72xx - 64x + 16 = 0$, & à l'équation des limites $x^3 - 12xx + 36x - 16 = 0$, ce qui marquera qu'il y a des racines égales dans la propoſée ; c'eſt-à-dire, y auroit trois dimenſions dans l'équation faite du reſte, ſi les quatre racines de la propoſée étoient inegales, mais au lieu de cela, y n'aura que deux dimenſions, s'il y a une racine commune à la propoſée & à l'équation des limites ; y n'aura qu'une dimenſion dans l'équation du reſte, s'il y a deux racines communes ; & y ſe trouvera entierement égale à zero dans l'équation faite du reſte, ſi toutes les racines de l'équation des limites ſont auſſi les racines de la propoſée, & que les quatre racines de la propoſée ſoient égales.

Dans cet exemple on trouve pour reſte $y - 144 = 0$, ce qui fait connoître qu'il y a deux racines communes à la propoſée & à ſon équation des limites, & que la propoſée contient par conſéquent des racines égales.

D'où l'on voit que pour connoître ſi une équation propoſée contient des racines égales, il n'y a qu'à ajouter $-y$ à ſon dernier terme, & enſuite chercher le plus grand diviſeur commun de cette équation & de ſon équation des limites ; & continuer l'operation juſqu'à ce qu'on ait un reſte qui n'ait que y pour inconnue, & ſuppoſer ce reſte égal à zero. Si l'inconnue y eſt au même degré dans cette équation, qu'eſt x dans l'équation des limites, c'eſt une marque qu'il n'y a pas de racines égales dans la propoſée : Si l'inconnue y eſt à un degré moindre dans cette équation du reſte que celui de x dans l'équation des limites, c'eſt une marque qu'il y a des racines égales dans la propoſée.

SECTION III.

Où l'on explique differentes méthodes pour trouver les racines d'une équation lorſqu'on a deux limites pour chacune.

PROBLÊME III.

156. *QUAND on a deux limites d'une racine d'une équation numerique, l'une moindre & l'autre plus grande que cette racine; ou, ce qui revient au même, lorſque la ſubſtitution de l'une & enſuite de l'autre à la place de l'inconnue, donne des ſommes toutes connues dont les ſignes ſont differens; trouver cette racine quand elle eſt commenſurable; en trouver une valeur approchée quand elle eſt incommenſurable; & continuer l'approximation tant qu'on voudra.*

PREMIERE MÉTHODE PAR SUBSTITUTION OU PAR DIVISION.

ON appliquera la méthode à un exemple en l'énonçant pour la rendre plus claire.

Il faut trouver les racines de $xx - 76x + 1248 = 0$; les limites de la plus petite ſont zero & 38; la premiere étant ſubſtituée donne +, & la ſeconde donne —; les limites de la plus grande ſont 38 & 77; la premiere étant ſubſtituée donne —, & la ſeconde donne +.

1°. On prendra la difference des deux limites, & l'on ajoutera la moitié de cette difference, priſes en nombres entiers, à la moindre limite, ce qui donnera une ſomme; ainſi la difference des deux limites zero & 38 de la premiere racine, eſt 38, dont la moitié eſt 19, & la ſomme de la moindre limite zero & de cette moitié, eſt 19. La difference des deux limites 38 & 77 eſt 39, dont la moitié eſt 19 ou 20; on prendra laquelle on voudra, quand la difference eſt un nombre impair: on ajoutera cette moitié à la moindre limite 38, & la ſomme ſera 57 ou 58, il n'importe pas laquelle on prenne.

2°. On ſubſtituera la ſomme qu'on vient de trouver à la place de l'inconnue x dans la propoſée; ainſi on ſubſtituera + 19 pour la premiere racine, & + 57 pour la ſeconde; ou,

ou, ce qui revient au même, on divisera l'équation proposée par l'équation lineaire x moins cette somme, c'est-à-dire par $x - 19 = 0$, pour trouver la premiere racine, & par $x - 57 = 0$, pour trouver la seconde. On remarquera le signe de la somme toute connue qui viendra de la substitution, ou du reste qui viendra de la division, & s'il est conforme au signe que doit donner la premiere limite, ou à celui que doit donner la seconde limite; par exemple en substituant 19, on trouve le signe + conforme au signe que donne la moindre limite zero des deux limites 0 & 38 de la premiere racine; en substituant 57, on trouve le signe + conforme au signe que donne la plus grande limite 77 des deux limites 38 & 77 de la seconde racine.

3°. On laissera à present comme inutile celle des deux limites d'une racine dont la grandeur, substituée à la place de x, a donné le signe, & on prendra cette grandeur à sa place pour être une des limites de la racine qu'on cherche, avec l'autre limite dont la grandeur substituée n'a pas donné le signe.

Dans notre exemple en cherchant la premiere racine de la proposée dont zero & 38 sont les limites, la grandeur 19 ayant donné le signe de la moindre limite zero, c'est-à-dire +, la limite zero sera desormais inutile pour trouver la premiere racine; on prendra à sa place la grandeur 19 qui a donné le même signe + de la premiere limite zero, & la seconde limite sera 38.

On trouve de même en cherchant la seconde racine, que la grandeur 57 étant substituée à la place de x, donne le signe + de la plus grande des deux limites 38 & 77 de la seconde racine; ainsi il faut laisser la plus grande limite 77 comme inutile, & prendre à sa place la grandeur 57 pour la plus grande limite, & la plus petite 38 demeure la même.

Il faut à present chercher la premiere racine de la proposée entre les nouvelles limites 19 & 38, & la seconde entre les limites 38 & 57, en faisant une operation semblable à celle du premier & du second article, c'est-à-dire en prenant, pour trouver la valeur de la premiere racine, la moitié de la difference de ces deux limites 19 & 38, laquelle moitié est 9, l'ajoutant à la moindre limite 19, ce qui donnera la somme 28, & substituant cette grandeur 28 à la place de x dans la

proposée : & comme la somme qui en vient a le signe —, qui est celui que donne la substitution de la plus grande limite, il faut laisser la limite 38 comme inutile, & mettre à sa place 28 pour la plus grande limite de la premiere racine, dont la plus petite limite sera 19 ; & continuer l'operation en ajoutant la moitié en nombres entiers de la difference 9 des deux dernieres limites 19 & 28, laquelle moitié est 5 ou 4, à la plus petite limite 19, ce qui donnera la somme 24, & substituant cette grandeur 24 à la place de x dans la proposée : Et comme on trouve que la somme qui en vient est zero, la grandeur 24 est la plus petite racine de la proposée.

On cherchera la seconde racine comme on a fait la premiere, en prenant 9 qui est la moitié de la difference 19 qui se trouve entre les deux dernieres limites 38 & 57 de la seconde racine de la proposée, & ajoutant cette moitié 9 à la moindre limite, la somme sera 47, qui étant substituée à la place de x dans la proposée, donne le signe — conforme à celui qui vient de la substitution de la moindre limite 38. On laissera la limite 38 comme inutile, & on prendra à sa place 47, & la plus grande limite sera encore 57; ainsi les deux limites de la seconde racine seront 47 & 57. On prendra 5, qui est la moitié exacte de leur difference, qui est 10, on l'ajoutera à la moindre limite 47, & la somme sera 52 ; on substituera 52 à la place de x dans la proposée, & l'on trouvera que la somme qui en vient est zero ; ce qui fera voir que la grandeur 52 est la seconde racine de la proposée.

REMARQUE.

IL est visible qu'en cherchant une racine, par cette méthode, entre deux limites, entre lesquelles cette racine est une grandeur moyenne, on augmente à chaque operation la plus petite limite, ou l'on diminue la plus grande ; c'est pourquoi on arrive enfin à trouver la racine même, quand elle est commensurable. Mais quand en suivant la méthode, on arrive à deux limites, l'une moindre, & l'autre plus grande que la racine, ou qui donnent par leur substitution des signes differens, qui ne different entr'elles que de l'unité, il est certain que la racine est incommensurable ; car on suppose

l'équation ſans fractions, & que ſon premier terme n'a pas d'autre coëficient que l'unité ; ainſi ſa racine étant entre deux nombres qui ne different que de l'unité, elle ne peut pas être un nombre entier ; & on a démontré * qu'une fraction ne peut pas être la racine d'une telle équation. * 34.

Continuation de la premiere méthode.

4°. ON continuera d'augmenter par la méthode la moindre limite, & de diminuer la plus grande limite de la racine qu'on cherche, juſqu'à ce qu'on trouve une grandeur qui étant ſubſtituée à la place de l'inconnue, donne zero ; ou, quand la racine eſt incommenſurable, juſqu'à ce qu'on ait trouvé deux limites, l'une moindre que la racine, & l'autre plus grande, qui ne different entr'elles que de l'unité ; & alors la moindre limite ſera la valeur approchée de la racine, plus petite que la racine, & la plus grande limite ſera la valeur approchée plus grande que la racine ; & l'une & l'autre valeur approchée ne different pas de la racine exacte de l'unité entiere.

Pour continuer l'approximation, on ſe ſervira ordinairement de la troiſiéme méthode qui ſuit, comme étant la plus courte, mais on le pourra faire auſſi par cette premiere, le calcul en ſera un peu plus long ; on prendra $\frac{1}{2}$, qui eſt la moitié de la difference des deux dernieres limites, qui ne different entr'elles que de l'unité, & on l'ajoutera à la moindre des deux dernieres limites ; on ſubſtituera cette grandeur à la place de l'inconnue, & on la prendra au lieu de la limite dont elle donnera le ſigne. Enſuite on prendra la moitié de la difference qui eſt entre cette nouvelle limite & l'autre limite qui eſt demeurée, on ajoutera cette moitié à la moindre de ces deux limites, & la ſomme ſera la grandeur qu'il faut ſubſtituer à la place de l'inconnue dans la propoſée, & on prendra cette grandeur au lieu de la limite dont elle donnera le ſigne.

On continuera ainſi de trouver des valeurs qui approchent de plus en plus à l'infini de la racine exacte, qu'on ne peut pas trouver autrement, puiſqu'elle eſt incommenſurable.

Exemple où les racines sont incommensurables.

POUR trouver les racines de l'équation $xx - 20x + 65 = 0$, dont la premiere a pour limites zero & 10, la seconde 10 & 21 : 1°. on prendra la moitié de la difference des limites zero & 10, laquelle moitié est 5, on l'ajoutera à zero, & la somme sera 5 ; on substituera 5 à la place de x dans la proposée, & l'on trouvera la somme toute connue -10 ; ainsi 5 donnant le signe $-$ de la plus grande des deux limites 0 & 10, on prendra 5 pour la plus grande limite au lieu de 10, & zero demeurera pour la moindre limite.

On prendra la plus grande moitié en nombres entiers de la difference des limites 0 & 5, cette moitié est 3, on la substituera à la place de x, & elle donnera $+14$; ainsi 3 donnant le signe de la moindre des deux limites zero & 5, on prendra 3 pour la moindre limite au lieu de zero, & la plus grande sera 5 ; on ajoutera 1, qui est la moitié de la difference de ces deux limites 3 & 5, à la plus petite 3, & on substituera la somme 4 au lieu de x, & l'on trouvera qu'elle donne la somme $+1$, qui a le même signe $+$ que donne la moindre limite.

L'on a donc les deux limites 4 & 5, qui ne different que de l'unité, dont l'une donne $+$ & l'autre $-$; ainsi la premiere racine de la proposée est plus grande que 4, & moindre que 5, & elle est incommensurable.

Pour en trouver la valeur en fractions qui en approche tant qu'on voudra, on prendra $\frac{1}{2}$ qui est la moitié de la difference 1 des deux limites 4 & 5, on l'ajoutera à la moindre limite 4, & la somme sera $4\frac{1}{2} = \frac{9}{2}$; on substituera $\frac{9}{2}$ à la place de x dans la proposée, & on trouvera la somme toute connue $-4\frac{3}{4}$, qui a le signe $-$ que donne la plus grande des deux limites 4 & 5 ; ainsi on prendra $4\frac{1}{2} = \frac{9}{2}$ au lieu de 5, & les deux limites ou valeurs approchées de la premiere racine seront 4 & $4\frac{1}{2}$. On prendra $\frac{1}{4}$ qui est la moitié de la difference $\frac{1}{2}$ de ces deux limites 4, $4\frac{1}{2}$; on ajoutera cette moitié $\frac{1}{4}$ à la plus petite 4, & la somme $4\frac{1}{4} = \frac{17}{4}$ sera la grandeur qu'on substituera à la place de x dans la proposée, & on trouvera la somme $-1\frac{15}{16}$, qui a le signe que donne la plus grande des deux limites 4, $4\frac{1}{2}$; ainsi on pren-

dra $4\frac{1}{4}$ au lieu de la plus grande limite, & 4 demeurera pour la plus petite.

On continuera l'approximation en ajoutant $\frac{1}{8}$ qui est la moitié de la difference des deux dernieres limites $4, 4\frac{1}{4}$, à la moindre 4; & l'on substituera la somme $4\frac{1}{8} = \frac{33}{8}$ à la place de x dans la proposée, & l'on trouvera la somme $-\frac{31}{64}$, qui a encore le signe que donne la plus grande limite $4\frac{1}{4}$; ainsi on prendra $4\frac{1}{8}$ pour la plus grande limite, au lieu de $4\frac{1}{4}$, & 4 demeurera la moindre limite.

Pour continuer l'approximation, on ajoutera $\frac{1}{16}$, qui est la moitié de la difference des deux limites $4, 4\frac{1}{8}$, à la moindre limite 4, & on substituera la somme $4\frac{1}{16} = \frac{65}{16}$, à la place de x dans la proposée, & on trouvera la somme toute connue $+\frac{65}{256}$, qui a le même signe que donne la substitution de la moindre limite 4; ainsi $4\frac{1}{16}$ sera une valeur approchée de la premiere racine moindre que la premiere racine, & $4\frac{1}{8}$ sera une valeur approchée de la même racine plus grande que cette racine, qui est entre $4\frac{1}{16}$ & $4\frac{1}{8}$.

On peut continuer l'approximation à l'infini : mais l'approximation qu'on vient de faire suffit pour faire concevoir la méthode.

2°. On appliquera la même méthode à la recherche de la seconde racine de la proposée, dont les limites sont 10 & 21; & après avoir trouvé qu'elle est entre 15 & 16, on continuera l'approximation en fractions, en ajoutant la moindre limite 15, la moitié de la difference qui est entre 15 & 16, c'est-à-dire $\frac{1}{2}$; & on substituera la somme $15\frac{1}{2}$ à la place de x dans la proposée, & le reste comme dans l'approximation de la premiere racine.

Cette premiere méthode est évidente après tout ce qui précede, puisqu'elle en est une suite necessaire, & elle n'a pas besoin de démonstration.

Seconde méthode par le moyen de la transformation, qui sert à diminuer & à augmenter les racines.

157. POUR rendre la méthode plus facile à entendre, on l'appliquera à un exemple en l'énonçant, & l'on fera en même temps les raisonnemens qui la démontrent.

Soit l'équation $xx - 76x + 1248 = 0$, dont il faut trouver la plus petite racine par cette méthode ; les limites de la premiere racine sont la plus petite 19, qui étant substituée à la place de x, donne une somme toute connue qui a le signe +; la plus grande 38, qui étant substituée à la place de x, donne une somme qui a le signe —.

Il faut commencer par la moindre limite 19, & supposer + 19 + une indéterminée $f = x$, & substituer $+ 19 + f = x$ à la place de x dans la proposée, comme on le voit dans l'exemple figuré ; le dernier terme de la transformée qui en viendra, aura toujours le même signe que donne la moindre limite ; dans notre exemple il a le signe +.

*38. Il est évident * que par cette premiere transformation, l'on diminue la premiere & plus petite racine dont on fait la recherche, de la grandeur 19, ainsi on la peut déja concevoir comme partagée en deux parties, dont l'une est la moindre limite 19, & l'autre est la plus petite racine de la transformée, dont il faut continuer la recherche. Il est de même évident qu'ôtant la moindre limite 19 de la plus grande 38, la difference 19 surpasse la premiere racine de la transformée, puisque 38 surpasse la premiere racine de la proposée ; ainsi il faut prendre la moitié en entiers 9 ou 10, il n'importe pas laquelle, de la difference 19, & supposer cette moitié 9 + une nouvelle indéterminée g, égale à la premiere indéterminée f, & substituer $+ 9 + g = f$ à la place de f dans la premiere transformée.

La seconde transformée qui vient de cette substitution,
*30. ayant le signe — au dernier terme, on est assuré * que la premiere racine de la premiere transformée est devenue négative dans la seconde, & qu'ainsi on l'a trop diminuée en la diminuant de 9.

On sçait donc déja que la premiere racine de la proposée est plus petite que $19 + 9 = 28$, & que la grandeur dont elle est plus petite que 28, est moindre que 9. C'est pourquoi il faut diminuer la premiere racine de la seconde transformée qui est négative, d'une grandeur moindre que 9 ; c'est-à-dire, il faut prendre la moitié de 9 en entiers qui est 4, la rendre négative, supposer — 4 + une nouvelle indéterminée h, égale à l'indéterminée g, & substituer $- 4 + h = g$ à la place de g dans la seconde transformée : Et

comme l'on trouve que le dernier terme de la troisiéme transformée qui vient de cette substitution, est zero; il est évident * que la grandeur 4 est justement celle dont la premiere racine de la seconde transformée avoit été trop diminuée, & qui étoit devenue négative par cette diminution; & qu'ainsi 4 est la grandeur qu'il faut ôter de $+28$, pour avoir la racine qu'on cherche, qui est par consequent $19+9-4=24$. *Ce qu'il faloit trouver.* * 37.

Exemple figuré pour trouver la plus petite racine de l'équation $xx-76x+1248=0$, dont la moindre limite est 19, *qui étant substituée à la place de* x, *donne une somme qui a le signe* +, *& dont la plus grande limite est* 38, *qui donne le signe* —.

EQUATION PROPOSÉE,

$$xx-76x+1248=0.$$

Il faut commencer par la moindre limite 19, & supposer

$+19+f=x$	xx $-76x$ $+1248$	$=+361+38f+ff$ $=-1444-76f$ $=+1248$
Il faut ôter la moindre limite 19 de la plus grande 38, & prendre la moitié en entiers, qui est 9, de la difference qui est 19, & supposer	*Premiere transformée.*	$+165-38f+ff$
$+9+g=f$	ff $-38f$ $+165$	$=+81+18g+gg$ $=-342-38g$ $=+165$
9 ayant donné au dernier terme de la transformée le signe — de la plus grande limite 38, il faut prendre la moitié de 9 en entiers, qui est 4, & lui donner le signe —, & supposer	*Seconde transformée.*	$-96-20g+gg$
$-4+h=g$	gg $-20g$ -96	$=+16-8h+hh$ $=+80-20h$ $=-96$

Etant arrivé à une transformée dont le dernier terme eſt zero, la racine eſt com-	*Troiſiéme transformée.*	$o - 28h + hh$

menſurable, & elle eſt égale à la ſomme des grandeurs connues des équations lineaires qui ont ſervi aux transformations; ainſi $x = +19 + 9 - 4 = 24$. *Ce qu'il faloit trouver.*

En diminuant la premiere racine de la propoſée par les transformations, on diminue auſſi la ſeconde; ainſi en ajoutant la premiere racine 24 à la racine 28 de la derniere transformée qui eſt lineaire, la ſomme 52 eſt la ſeconde racine de la propoſée, dont cependant on va faire la recherche par la méthode, pour la faire mieux concevoir.

On trouvera donc de même que la ſeconde racine eſt 52; on en voit les operations dans l'exemple figuré.

Pour trouver la plus grande racine de $xx - 76x + 1248 = o$, *dont la plus petite limite eſt* 38, *qui étant ſubſtituée donne le ſigne* $-$, *& la plus grande eſt* 77, *qui étant ſubſtituée, donne le ſigne* $+$.

ON ſuppoſera $+38 + f = x$	xx	$= +1444 + 76f + ff$
	$-76x$	$= -2888 - 76f$
	$+1248$	$= +1248$
On ôtera la moindre limite 38 de la plus grande 77, & on prendra la moitié en entiers 19 de la difference 39, & on ſuppoſera	*Premiere transformée.*	$-196 * + ff$
$+19 + g = f$	ff	$= +361 + 38g + gg$
	-196	$= -196$
$+19$ donnant au dernier terme de la transformée le ſigne $+$ de la plus grande limite 77, on prendra en entiers la moitié 9 de 19, & on ſuppoſera.	*Seconde transformée.*	$+165 + 38g + gg$
$-9 + h = g$	gg	$= +81 - 18h + hh$
	$+38g$	$= -342 + 38h$
	$+165$	$= +165$

— 9 donnant au dernier terme de la tranformée le ſigne — de la moindre limite, on prendra en entiers la moitié 4 de 9, & on ſuppoſera	*Troiſiéme transformée.*	$-96+20h+hh$
$+4+i=h$	hh $+20h$ -96	$=+16+8i+ii$ $=+80+20i$ $=-96$
Etant arrivé à une transformée dont le dernier terme	4[e] *transformée.*	$0+28i+ii$

eſt zero, la racine qu'on cherche eſt commenſurable, & elle eſt égale à la ſomme des grandeurs connues des équations lineaires qui ont ſervi aux transformations; ainſi la plus grande racine de la propoſée eſt $x=+38+19-9+4=52$. *Ce qu'il faloit trouver.*

Continuation de la méthode quand la racine qu'on cherche eſt incommenſurable.

LORSQU'EN cherchant une racine par cette méthode, on arrive à une transformation où l'on eſt obligé pour continuer, de prendre la moitié de l'unité, la racine qu'on cherche eſt incommenſurable, n'étant pas un nombre entier, puiſqu'on trouveroit une transformée dont le dernier terme ſeroit zero; c'eſt-à-dire, on trouveroit la racine exactement, ſi elle étoit un nombre entier; elle ne peut pas être auſſi une fraction,* car on ſuppoſe la propoſée ſans fractions, & que ſon premier terme n'a pas d'autre coëficient que l'unité. Dans ce cas la ſomme de toutes les quantitez connues des équations lineaires qui ont ſervi aux transformations, eſt la valeur approchée en nombres entiers de la racine qu'on cherche. *34.

On continuera tant qu'on voudra l'approximation en prenant $\frac{1}{2}$, c'eſt-à-dire la moitié de l'unité précedée du ſigne + ou —, ſelon que le dernier terme de la derniere transformée aura le ſigne de la moindre ou de la plus grande limite, c'eſt-à-dire + dans le premier cas, & — dans le ſecond;

& on ſuppoſera + ou $-\frac{1}{2}+$ une nouvelle indéterminée, égale à l'indéterminée de la derniere transformée, & le reſte comme dans l'exemple figuré qui ſuit.

EXEMPLE FIGURÉ.

Pour trouver la plus grande racine de $xx - 20x + 65 = 0$, *dont la moindre limite eſt* 10, *qui étant ſubſtituée à la place de* x, *donne le ſigne* —; *& la plus grande eſt* 21, *qui donne le ſigne* +.

ON ſuppoſera $+10+f=x$	xx $-20x$ $+65$	$=+100+20f+ff$ $=-200-20f$ $=+65$
On ôtera la moindre limite 10 de la plus grande 21, on prendra la moitié en entiers 6 du reſte 11, & on ſuppoſera	*Premiere transformée.*	$-35 * +ff$
$+6+g=f$	ff -35	$=+36+12g+gg$ $=-35$
Le dernier terme de cette transformée ayant le ſigne + de la plus grande limite, le nombre 6 eſt trop grand, il faut en prendre la moitié 3, & ſuppoſer	*Seconde transformée.*	$+1 \quad +12g+gg$
$-3+h=g$	gg $+12g$ $+1$	$=+9 \quad -6h+hh$ $=-36+12h$ $=+1$
Le dernier terme de cette transformée ayant le ſigne — de la moindre limite, on ôtera 3 de 6, & on prendra la moitié du reſte 3 en entiers, qui eſt 2, & on ſuppoſera	*Troiſiéme transformée.*	$-26+6h+hh$
$+2+i=h$	hh $+6h$ -26	$=+4 \quad +4i+ii$ $=+12+6i$ $=-26$

Le dernier terme ayant le ſigne — de la moindre limite, on ôtera 2 du reſte précedent 3, il reſtera 1, dont il faut prendre la moitié $\frac{1}{2}$, & ſuppoſer	*Quatriéme transformée.*	$-10+10i+ii$
$+\frac{1}{2}+k=i$	ii $+10i$ -10	$=+\frac{1}{4}+1k+kk$ $=+5+10k$ $=-10$
Le dernier terme ayant encore le ſigne —, il faut ôter $\frac{1}{2}$ du dernier reſte 1, & prendre la moitié du reſte $\frac{1}{2}$, laquelle eſt $\frac{1}{4}$, & ſuppoſer	*Cinquiéme transformée.*	$-4\frac{3}{4}+11k+kk$
$+\frac{1}{4}+l=k$	kk $+11k$ $-4\frac{3}{4}$	$=+\frac{1}{16}+\frac{1}{2}l+ll$ $=+\frac{11}{4}+11l$ $=-4\frac{3}{4}$
Le dernier terme ayant encore le ſigne —, il faut ôter $\frac{1}{4}$ du dernier reſte $\frac{1}{2}$, il reſtera $\frac{1}{4}$, dont il faut prendre la moitié $\frac{1}{8}$, & ſuppoſer	*Sixiéme transformée.*	$-1\frac{15}{16}+11\frac{1}{2}l+ll$
$+\frac{1}{8}+m=l$	ll $+11\frac{1}{2}l$ $-1\frac{15}{16}$	$=+\frac{1}{64}+\frac{1}{4}m+mm$ $=+\frac{23}{16}+\frac{23}{2}m$ $=-1\frac{15}{16}$
Le dernier terme ayant encore le ſigne — de la moindre limite, la ſomme de tou-	*Septiéme transformée.*	$-\frac{31}{64}+\frac{47}{4}m+mm$

tes les grandeurs connues des équations lineaires qui ont ſervi aux transformations, eſt une valeur approchée moindre que la racine qu'on cherche; ainſi $+10+6-3+2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=15+\frac{7}{8}$, eſt une valeur approchée moindre que la racine qu'on cherche, qui eſt moyenne entre $15\frac{7}{8}$ & 16. On peut continuer l'approximation tant qu'on voudra, en ôtant $\frac{1}{8}$ du dernier reſte $\frac{1}{4}$, & prenant la moitié du reſte $\frac{1}{8}$, laquelle moitié eſt $\frac{1}{16}$, & ſuppoſant $+\frac{1}{16}+n=m$, &c.

Quand zero eſt une des limites de la racine qu'on cherche, il faut prendre la moitié de la plus grande limite, & ſuppoſer cette moitié poſitive plus une indéterminée, égale à l'inconnue de la propoſée, & continuer l'operation comme dans les exemples précedens.

Par exemple ſi l'on cherche la premiere racine de $xx - 20x + 65 = 0$, dont la moindre limite eſt zero, qui étant ſubſtituée à la place de l'inconnue, donne +, & la plus grande limite eſt 10, qui étant ſubſtituée donne —, il faut prendre la moitié de 10 qui eſt 5, & ſuppoſer $+ 5 + f = x$, & faire l'operation comme dans les exemples précedens.

Cette ſeconde méthode eſt démontrée par les raiſonnemens qu'on a faits en l'énonçant.

Troiſiéme méthode par le moyen de la transformation, qui ſert à multiplier les racines d'une équation.

AVERTISSEMENT.

158. CETTE méthode ſert à trouver une valeur approchée d'une racine d'une équation qui en differe moins que de $\frac{1}{10}$, ou $\frac{1}{100}$, ou $\frac{1}{1000}$, ou $\frac{1}{10000}$, & ainſi à l'infini.

On peut l'appliquer immédiatement à la recherche d'une racine dont on a deux limites, l'une moindre & l'autre plus grande que cette racine : mais pour éviter la longueur du calcul, il eſt mieux de trouver par la premiere méthode, avant de ſe ſervir de cette troiſiéme, deux valeurs en entiers approchées de la racine, qui ne different entr'elles que de l'unité, & il faut enſuite ſe ſervir de cette troiſiéme méthode pour trouver des valeurs en fractions décimales qui approchent tant qu'on voudra de la racine.

1°. Il faut mettre un zero devant le coëficient du ſecond terme, c'eſt-à-dire, multiplier ce coëficient par 10, ſi l'on veut une valeur approchée qui ne differe de la racine que de $\frac{1}{10}$; il faut mettre deux zeros, ſi l'on veut une valeur qui ne differe que de $\frac{1}{100}$; il faut mettre trois zeros, ſi l'on veut une valeur qui ne differe que de $\frac{1}{1000}$, & ainſi de ſuite.

Il faut mettre devant le coëficient du troiſiéme terme deux fois autant de zeros qu'on en a mis au ſecond terme; devant celui du quatriéme terme, trois fois autant de zeros;

devant le coëficient du cinquiéme terme, quatre fois autant de zeros qu'on en a mis au ſecond terme, & ainſi de ſuite.

Par exemple ſi l'on a mis deux zeros au ſecond terme, il en faut mettre deux fois deux, c'eſt-à-dire, quatre zeros au troiſiéme; trois fois deux, c'eſt-à-dire ſix zeros au quatriéme terme, & ainſi de ſuite.

2°. Il faut mettre devant chacune des deux limites autant de zeros qu'on en a mis au ſecond terme.

3°. Il faut enſuite par la premiere méthode, trouver deux valeurs approchées de la racine qu'on cherche, qui ne different entr'elles que de l'unité.

4°. Enfin il faut écrire chaque valeur ſur une ligne pour les numerateurs, & écrire au-deſſous de chacune pour dénominateur, l'unité avec autant de zeros qu'on en a mis au ſecond terme. Ces deux fractions ſont les valeurs approchées qu'on cherchoit.

EXEMPLE.

POUR trouver une valeur approchée de la plus petite racine de $xx - 20x + 65 = 0$, qui n'en differe pas de $\frac{1}{1000}$, dont on a par la premiere méthode les deux limites approchées en entiers 4 & 5, qui ne different entr'elles que de l'unité; 1°. On mettra trois zeros au ſecond terme, & ſix au troiſiéme, & l'on aura la transformée $xx - 20000x + 65000000 = 0$, dont les racines ſont celles de la propoſée, multipliées chacune par 1000. 2°. On mettra autant de zeros devant chacune des limites 4 & 5, qu'on en a mis au ſecond terme, & l'on aura 4000, & 5000 pour les limites de la transformée. 3°. On cherchera par la premiere méthode deux valeurs approchées en entiers, qui ne different entr'elles que de l'unité, de la premiere racine de la transformée, dont la moindre limite eſt 4000, qui donne +, & la plus grande 5000, qui donne —, & l'on trouvera que ces valeurs ſont 4094 & 4095. 4°. il faut écrire ces valeurs en fraction, & leur donner 1000 pour dénominateur, & l'on aura $\frac{4094}{1000}$ & $\frac{4095}{1000}$ pour les valeurs approchées de la premiere racine de la propoſée $xx - 20x + 65 = 0$, dont la premiere $\frac{4094}{1000}$ eſt moindre que cette racine, & la ſeconde $\frac{4095}{1000}$ eſt plus grande; & l'une & l'autre n'en different pas de $\frac{1}{1000}$.

Il eſt ſi facile d'appliquer cette méthode à tous les exemples qu'on voudra, qu'il eſt inutile d'en groſſir ce traité.

Démonſtration de cette méthode.

LES racines de la transformée ſont les racines de la propoſée, multipliées chacune par 1000 *; les limites de la premiere racine de la propoſée, qui ſont 4 & 5, étant multipliées par 1000, ſont les limites de la premiere racine de la transformée *; par conſequent les valeurs 4094 & 4095 qu'on trouve en employant la premiere méthode, ſont les valeurs approchées de la premiere racine de la transformée; il eſt donc évident qu'en diviſant ces valeurs par 1000, les fractions qui en naîtront ſeront les valeurs approchées de la premiere racine de la propoſée.

*36. 4e transformée. *149.

Il eſt clair que cette démonſtration eſt generale, & qu'on ne l'a appliquée à un exemple que pour la rendre plus facile & plus courte.

Quatrième méthode par le moyen de la transformation, qui ſert à diminuer & à augmenter les racines des équations, mais d'une maniere un peu differente de la ſeconde méthode.

AVERTISSEMENT.

159. QUOIQU'ON puiſſe ſe ſervir de cette méthode pour approcher à l'infini d'une racine d'une équation, lorſqu'on en connoît deux limites quelconques, l'une moindre & l'autre plus grande que la racine, avec le ſigne que donne chacune de ces limites, étant ſubſtituées dans l'équation à la place de l'inconnue, & même lorſqu'on ne connoît qu'une des deux limites de la racine qu'on cherche, pourvû qu'on ſcache ſi elle eſt moindre ou plus grande que cette racine, & le ſigne qu'elle donne, étant ſubſtituée dans l'équation à la place de l'inconnue; cependant on abregera de beaucoup le calcul, ſi l'on trouve par la premiere méthode les limites qui ne different pas de la racine qu'on cherche de l'unité entiere; c'eſt-à-dire, qui ne different entr'elles que de l'unité.

On appliquera cette méthode à un exemple en l'énonçant, pour la faire mieux concevoir, & l'on fera dans les operations qu'elle preſcrit, les raiſonnemens qui en font la démonſtration, qu'on mettra dans la derniere évidence dans les remarques.

Soit proposé de trouver par cette méthode les racines de l'équation $x^4 - 80x^3 + 1998xx - 14937x + 5000 = 0$, qui sont toutes incommensurables; la premiere & plus petite racine est moindre que l'unité, & elle est plus grande que $\frac{2}{10}$, qui étant substituée à la place de x, donne une somme toute connue qui a $+$, & elle est moindre que $\frac{3}{10}$ qui donne $-$; la seconde est entre 12 qui donne $-$, & 13 qui donne $+$; la 3e racine est entre 32 qui donne $+$, & 33 qui donne $-$; la 4e est entre 34 qui donne $-$, & 35 qui donne $+$.

Pour trouver celle de ces racines qu'on voudra, par exemple la seconde qui est entre 12 qui donne $-$, & 13 qui donne $+$, 1°. on supposera la moindre limite 12 plus une indéterminée f, égale à x, & l'on aura $+12 + f = x$; si on vouloit se servir de la plus grande limite 13, on supposeroit $13 - f = x$. On substituera dans la proposée $12 + f = x$, à la place de x: (En voici l'operation.)

$$\begin{array}{rcl} x^4 & = & +20736 + 6912f + 864ff + 48f^3 + f^4 \\ -80x^3 & = & -138240 - 34560f - 2880ff - 80f^3 \\ +1998xx & = & +287712 + 47952f + 1998ff \\ -14937x & = & -179244 - 14937f \\ +5000 & = & +5000 \end{array}$$

& l'on aura la transformée $0 = -4036 + 5367f - 18ff - 32f^3 + f^4$;

on la supposera representée par $0 = -r + qf - pff - nf^3 + f^4$

Il est évident * que les racines de la transformée sont celles de la proposée, diminuées chacune de la quantité 12, parcequ'elles sont toutes positives. Ainsi la premiere ou plus petite racine de la proposée étant moindre que 12, elle est trop diminuée pour demeurer positive, & elle est devenue négative; & la seconde racine qu'on cherche étant diminuée de 12 dans la transformée, elle est encore positive, & sa grandeur dans la transformée est exactement le reste de la seconde racine de la proposée, dont on a ôté la grandeur 12; c'est-à-dire le reste de la seconde racine de la proposée, après en avoir ôté 12, est la plus petite des racines qui restent positives dans la transformée; d'où l'on voit que pour avoir la valeur approchée de la seconde racine de la proposée, il faut trouver la valeur approchée de la plus

* 38.

petite des racines positives de la transformée, ajouter cette valeur approchée à la quantité 12, & la somme sera la valeur approchée de la seconde racine de la proposée.

Pour trouver cette valeur approchée de la plus petite racine de la transformée, c'est-à-dire la plus petite valeur de f dans la transformée, il y a deux manieres : Et pour faire des formules pour l'une & pour l'autre de ces manieres, il faut se servir de l'équation litterale $0 = -r + qf - pff - nf^3 + f^4$.

Premiere maniere de trouver la valeur approchée de f.

LA premiere maniere est de se servir d'abord des deux derniers termes seuls $+ qf - r = 0$ de la transformée, en négligeant tous les autres dans lesquels les puissances de f vont en diminuant, puisque f est moindre que l'unité, & de supposer ces deux derniers termes égaux à zero; & l'on aura $f = \frac{r}{q}$.

Cette valeur de f est un peu trop petite; car puisque $r = qf - pff - nf^3 + f^4$, il est visible que $f = \frac{r}{q - pf - nff + f^3}$, & que $\frac{r}{q - pf - nff + f^3}$ est plus grande que $\frac{r}{q}$, puisque le dénominateur de la premiere est plus petit que le dénominateur de la seconde; ainsi on corrigera la premiere valeur de $f = \frac{r}{q}$, en mettant cette valeur de f, au lieu de f, dans $f = \frac{r}{q - pf - nff + f^3}$, & l'on aura $f = \frac{r}{q - \frac{pr}{q} - \frac{nrr}{qq} + \frac{r^3}{q^3}}$; c'est la formule dont il faut se servir pour trouver la valeur de f par cette premiere maniere.

Cette formule de la valeur de $f = \frac{r}{q - \frac{pr}{q} - \frac{nrr}{qq} + \frac{r^3}{q^3}}$, qu'on peut aussi exprimer par $f = \frac{q^3 r}{q^4 - pqqr - nqrr + r^3}$, donne une valeur un peu trop petite; car le consequent de la fraction $\frac{r}{q - \frac{pr}{q} - \frac{nrr}{qq} + \frac{r^3}{q^3}}$, est plus grand qu'il ne devroit être, puisque si l'on conçoit la veritable valeur de f, qui surpasse $\frac{r}{q}$, à la place de $\frac{r}{q}$ dans le consequent de la fraction $\frac{r}{q - \frac{pr}{q} - \frac{nrr}{qq} + \frac{r^3}{q^3}}$, il est visible que les grandeurs

négatives $-\frac{pr}{q}-\frac{nrr}{qq}$ du conſequent, ſeroient plus grandes qu'elles ne ſont ; ainſi elles ôteroient une plus grande quantité de la grandeur q, que n'en ôtent les grandeurs négatives $-\frac{pr}{q}-\frac{nrr}{qq}$. La valeur de $f=\frac{r}{q-\frac{pr}{q}-\frac{nrr}{qq}+\frac{r^3}{q^3}}$, eſt donc plus petite qu'elle ne devroit être, puiſque le dénominateur en eſt plus grand qu'il ne devroit être.

Pour avoir la valeur approchée de f par cette formule, qui eſt ce qu'on cherche, on mettra dans cette formule $f=\frac{r}{q-\frac{pr}{q}-\frac{nrr}{qq}+\frac{r^3}{q^3}}$, ou plutôt dans celle-ci, qui eſt toute préparée $f=\frac{q^3r}{q^4-pqqr-nqrr+r^3}$, les grandeurs numeriques de la transformée, à la place des lettres qui les repréſentent, & l'on aura $f=\frac{62394447502306 8}{82488566008668 1}$; ou bien en réduiſant cette fraction en fraction décimale, ce qui eſt plus commode pour le calcul, on aura $f=\frac{q^3r}{q^4-pqqr-nqrr+r^3}=$ 0, 75640^v. La valeur approchée par cette premiere maniere de la ſeconde racine de la propoſée, eſt donc 12, 75640^v.

Seconde maniere de trouver la valeur approchée de f.

LA ſeconde maniere de trouver la valeur approchée de la plus petite des racines poſitives, repréſentée par f, de la transformée, qui eſt repréſentée par $0=-r+qf-pff-nf^3+f^4$, eſt de ſe ſervir des trois derniers termes ſeuls $0=-r+qf-pff$ de cette transformée, en négligeant d'abord les autres $-nf^3+f^4$, comme très-petits par raport aux trois derniers, & de ſuppoſer que ces trois termes ſont une équation du ſecond degré $0=-r+qf-pff$; ou bien en tranſpoſant, pour rendre le terme $-pff$ poſitif, l'on aura $pff-qf+r=0$, qui ſe réduit à $ff-\frac{q}{p}f+\frac{r}{p}=0$; on prendra enſuite par la méthode qui ſert à réſoudre les équations du ſecond degré, la plus petite des deux racines de cette équation, qui eſt $f=\frac{q}{2p}-\sqrt{\frac{qq}{4pp}-\frac{r}{p}}$, qu'on peut auſſi exprimer ainſi $f=\frac{\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}qq-pr}}{p}$; c'eſt la formule dont il faut ſe ſervir d'abord pour trouver par cette

seconde maniere la valeur approchée de f qu'on cherche, en substituant les grandeurs numeriques de la transformée à la place des lettres qui les représentent; & l'on trouvera en faisant le calcul, & se servant des fractions décimales, $f = \frac{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - pr}}{p} = \frac{2683,5^{I} - \sqrt{\frac{28804689}{4} - 72648}}{18} =$ $0,7539^{IV}$; ainsi on a déja $f = \frac{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - pr}}{p} = 0,7539^{IV}$.

Il faut corriger cette valeur qui est trop petite; car disposant ainsi la transformée $pff - qf + r + nf^3 - f^4 = 0$, ou bien $ff - \frac{q}{p}f + \frac{r}{p} + \frac{nf^3}{p} - \frac{f^4}{p} = 0$, & regardant cette équation comme du second degré, dont le premier terme est ff, le second $-\frac{q}{p}f$, & le troisiéme $+\frac{r}{p} + \frac{nf^3}{p} - \frac{f^4}{p}$, on trouve en la resolvant, que la plus petite de ses deux racines est $f = \frac{q}{2p} - \sqrt{\frac{qq}{4pp} - \frac{r}{p} - \frac{nf^3}{p} + \frac{f^4}{p}}$, qui peut aussi s'exprimer ainsi $f = \frac{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - pr - npf^3 + pf^4}}{p}$.

Or il est évident que $\sqrt{\frac{qq}{4pp} - \frac{r}{p}}$, est plus grande que $\sqrt{\frac{qq}{4pp} - \frac{r}{p} - \frac{nf^3}{p} + \frac{f^4}{p}}$; la premiere étant ôtée de $\frac{q}{2p}$, laisse donc un reste $\frac{q}{2p} - \sqrt{\frac{qq}{4pp} - \frac{r}{p}}$, qui est moindre que le reste $\frac{q}{2p} - \sqrt{\frac{qq}{4pp} - \frac{r}{p} - \frac{nf^3}{p} + \frac{f^4}{p}}$, qui est celui que laisse la seconde, étant ôtée de $\frac{q}{2p}$; ainsi la premiere valeur $f = \frac{q}{2p} - \sqrt{\frac{qq}{4pp} - \frac{r}{p}}$, est plus petite qu'il ne faut.

Pour la corriger on supposera $f = \frac{q}{2p} - \sqrt{\frac{qq}{4pp} - \frac{r}{p}} = m$; & on substituera m à la place de f dans le second membre de $f = \frac{q}{2p} - \sqrt{\frac{qq}{4pp} - \frac{r}{p} - \frac{nf^3}{p} + \frac{f^4}{p}}$, & l'on aura la formule corrigée $f = \frac{q}{2p} - \sqrt{\frac{qq}{4pp} - \frac{r}{p} - \frac{n}{p}m^3 + \frac{m^4}{p}}$, qui se peut aussi exprimer de cette maniere pour la commodité du calcul, $f = \frac{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - pr - npm^3 + pm^4}}{p}$.

Pour trouver par cette formule la valeur approchée de f, qui est ce qu'on cherche, on substituera dans cette formule à la place des lettres, les grandeurs numeriques de la transformée que représentent ces lettres; & à la place de m, la grandeur $\frac{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - pr}}{p}$, qui est égale dans notre

exemple à 0, 7539^{iv}, & l'on trouvera en employant les fractions décimales, la valeur approchée qu'on cherche,

$$f = \frac{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - pr - npm^3 + pm^4}}{p} = 0,\ 75641609^{viii}.$$

Cette valeur de f, ou de la plus petite des racines positives de la transformée précedente, est encore un peu plus petite que cette racine ; car il est évident que m étant moindre que la valeur exacte de f dans la transformée, la grandeur négative $-\frac{nm^3}{p}$ est moindre que la grandeur $\frac{nf^3}{p}$, en supposant que f représente sa valeur exacte, par consequent la grandeur négative $-\frac{nm^3}{p}$, étant moindre qu'il ne faut dans $\sqrt{\frac{qq}{4pp} - \frac{r}{p} - \frac{n}{p}m^3 + \frac{m^4}{p}}$, cette grandeur entiere a, pour ainsi parler, une plus grande grandeur positive qu'elle ne devroit avoir ; elle ôte donc plus qu'elle ne devroit ôter de la grandeur $\frac{q}{2p}$, d'où il suit que la quantité totale $\frac{q}{2p} - \sqrt{\frac{qq}{4pp} - \frac{r}{p} - \frac{n}{p}m^3 + \frac{m^4}{p}}$, qu'on suppose égale à f, est cependant un peu plus petite que la valeur exacte de f ; ainsi la valeur approchée de f, qu'on trouve par cette seconde maniere, qui est $f = 0,\ 75641609^{viii}$, est un peu plus petite que la valeur exacte de f.

Joignant cette valeur de f à la moindre limite 12, l'on a 12, 75641609^{viii} pour la valeur approchée de la seconde racine de la proposée.

On peut continuer l'approximation de cette seconde racine à l'infini par cette quatriéme méthode, comme on le va voir. Mais il est bon de remarquer auparavant que si l'on ne pouvoit pas s'assurer, comme on l'a fait, que la valeur approchée de f qu'on a trouvée par ces deux manieres, fût moindre ou plus grande que sa valeur exacte, on le pourroit toujours en substituant cette valeur approchée de f à la place de f dans la transformée ; car si la somme toute connue qui en viendroit, avoit le signe de la moindre limite, ou, ce qui est la même chose, celui du dernier terme de la transformée, il est évident que la valeur approchée seroit moindre que la valeur exacte de f. Si cette somme avoit le signe de la plus grande limite de la racine dont on fait la recherche, ou, ce qui est la même chose, le signe opposé à celui du dernier terme de la transformée, il est

évident que la valeur approchée seroit plus grande que la valeur exacte de f.

Il faut aussi remarquer que si l'on s'étoit servi de la plus grande limite 13, au-lieu de la moindre limite 12, pour trouver la seconde racine de la proposée, & que l'on eût supposé $13 - f = x$ pour la premiere transformée, il faudroit ôter de 13 la valeur approchée de f, au lieu de l'ajouter à 12, comme on l'a fait en se servant de la moindre limite 12.

Continuation de l'approximation de la seconde racine de la proposée, ou continuation de la quatriéme méthode.

20. POUR continuer l'approximation de la seconde racine, on supposera la valeur approchée de f qu'on vient de trouver par l'une ou l'autre des deux manieres précedentes plus une indéterminée g, égale à f; ce qui donnera $0,75640^{v} + g = f$, ou $0,75641609^{viii} + g = f$; on substituera cette valeur de f à sa place dans la transformée précedente, & l'on trouvera une seconde transformée.

Si la valeur approchée de f étoit plus grande que f, on supposeroit pour trouver la seconde transformée, cette valeur de f moins g, égale à f.

Comme il ne s'agit ici que de faire concevoir clairement la méthode, pour rendre le calcul un peu moins long, on ne prendra que le dernier chiffre 7^{I} ou $\frac{7}{10}$ de la valeur de f qu'on a trouvée, pour la valeur approchée de f, & l'on supposera $7^{I} + g = f$; on substituera cette valeur de f à sa place dans la transformée précedente, comme on le voit ici:

$$
\begin{array}{rcl}
f^4 & = & +0,2401^{IV} + 1,372^{III}g + 2,94^{II}gg + 2,8^{I}g^3 + g^4 \\
-32f^3 & = & -10,976^{II} - 47,04^{II}g - 67,2^{I}gg - 32g^3 \\
-18ff & = & -8,82^{II} - 25,2^{I}g - 18gg \\
+5367f & = & +3756,9^{I} + 5367g \\
-4036 & = & -4036
\end{array}
$$

On trouvera la transformée $0 = -298,6559^{IV} + 5296,132^{III}g - 82,26^{II}gg - 29,2^{I}g^3 + g^4$;

on la supposera représentée par $0 = -r + qg - pgg - ng^3 + g^4$.

Il est évident par les raisonnemens qu'on a faits sur la premiere transformée, que la plus petite valeur positive de g, c'est-à dire la plus petite des racines positives de cette

seconde transformée, est exactement ce qui reste de la valeur de la seconde racine de la proposée, après en avoir ôté 12, & encore la valeur approchée de f dans la premiere transformée; ainsi il faut pour continuer l'approximation de la seconde racine de la proposée, trouver la valeur approchée de la plus petite racine g de cette seconde transformée.

Pour la trouver par la premiere maniere, on se servira de la formule $g = \frac{r}{q - \frac{pr}{q} - \frac{nrr}{qq} + \frac{r^3}{q^3}}$, ou plutôt de la formule $g = \frac{q^3 r}{q^4 - pqqr - nqrr + r^3}$, qui est plus propre pour le calcul; & on trouvera en substituant dans cette formule, au lieu des lettres, les grandeurs numeriques de la seconde transformée, qui sont représentées par ces lettres, $g = 0, 056441^{\mathrm{vi}}$; ainsi en ajoutant cette valeur approchée de g à $12, 7^{\mathrm{i}}$ qu'on a déja, la valeur approchée de la seconde racine de la proposée sera $12, 756441^{\mathrm{vi}}$, qui est un peu plus petite que la veritable seconde racine de la proposée.

Pour trouver la valeur de g par la seconde maniere, on se servira d'abord de la formule $g = \frac{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - pr}}{p}$; on substituera dans cette formule à la place des lettres, les grandeurs numeriques de la seconde transformée, représentées par ces lettres, & on trouvera $g = 0, 05644080331^{\mathrm{xi}}$; & supposant ensuite la lettre $m = g = 0, 05644080331^{\mathrm{xi}} = \frac{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - pr}}{p}$, on prendra la formule corrigée $g = \frac{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - pr - npm^3 + pm^4}}{p}$; on substituera dans cette formule les grandeurs numeriques de la transformée, à la place des lettres qui les représentent; on y substituera aussi la valeur de $m = 0, 056440$, &c. à la place de m, & on trouvera $g = 0, 05644179448074402^{\mathrm{xvii}}$; on ajoutera cette valeur approchée de g aux parties $12, 7^{\mathrm{i}}$ de la seconde racine de la proposée, qu'on a déja trouvées, & l'on aura pour la valeur approchée de cette seconde racine $x = 12, 75644179448074402^{\mathrm{xvii}}$. Cette valeur approchée est de très peu plus petite que la veritable.

3°. On peut continuer l'approximation de la ſeconde racine de la propoſée, en ſuppoſant la valeur approchée de g qu'on vient de trouver, plus une nouvelle indéterminée h, égale à g; & ſubſtituant cette valeur de g à ſa place dans la ſeconde transformée, il en viendra une troiſiéme transformée; on trouvera la valeur approchée de la plus petite racine poſitive h de cette troiſiéme transformée, par laquelle on voudra des deux formules précedentes, & ainſi à l'infini.

REMARQUE.

CETTE quatriéme méthode convient avec la ſeconde dans la premiere operation, par laquelle on trouve la premiere transformée, mais elle en eſt differente dans la maniere de trouver les valeurs approchées de la plus petite racine poſitive de chacune des transformées, par le moyen des formules qu'on a expliquées. Le calcul de cette quatriéme méthode eſt long, mais en récompenſe on approche à chaque operation extrêmement de la racine qu'on cherche

Ceux qui veulent ſe la rendre familiere, peuvent l'appliquer à la recherche de la premiere, de la troiſiéme & de la quatriéme racine de la propoſée.

Corollaire de la quatriéme méthode.

160. POUR avoir les formules des équations de chaque degré, qui ſervent à trouver la valeur approchée de la moindre racine poſitive de chacune des transformées, on ſuppoſera que k repréſente l'indéterminée ou l'inconnue de chacune des transformées, & que ces transformées ſont repréſentées par les équations litterales qui ſuivent :

$$0 = \dots q \dots pk \dots nkk \dots k^3$$
$$0 = \dots r \dots qk \dots pkk \dots nk^3 \dots k^4$$
$$0 = \dots s \dots rk \dots qkk \dots pk^3 \dots nk^4 \dots k^5$$
$$0 = \dots t \dots sk \dots rkk \dots qk^3 \dots pk^4 \dots nk^5 \dots k^6.$$

On ne met pas la formule du ſecond degré, dont on trouve facilement les racines approchées, par la méthode qui eſt particuliere aux équations du ſecond degré : On ne met pas les ſignes, mais ſeulement des points entre les termes, pour marquer que les ſignes de ces équations generales pour chaque degré, doivent être déterminées par les ſignes des

transformées qu'on trouve, c'est-à-dire leur être semblables: On ne mettra pas les signes devant les grandeurs des formules suivantes pour la même raison. Enfin on ne met pas les équations qui passent le sixiéme degré, dont on a rarement besoin, chacun peut les ajouter, & leurs formules, ce qui est facile.

Formules de la premiere maniere.

POUR le troisiéme degré $k = \frac{ppq}{p^3 \ldots npq \ldots qq}$.

Pour le quatriéme degré $k = \frac{q^3 r}{q^4 \ldots pqqr \ldots nqrr \ldots r^3}$.

Pour le cinquiéme degré $k = \frac{r^4 s}{r^5 \ldots qr^3 s \ldots prrss \ldots nrs^3 \ldots s^4}$.

Pour le sixiéme degré $k = \frac{s^5 t}{s^6 \ldots rs^4 t \ldots qs^3 tt \ldots psst^3 \ldots nst^4 \ldots t^5}$.

Formules de la seconde maniere.

Pour le troisiéme degré.

Formules par où il faut commencer.	*Formules corrigées.*
$k = \frac{\ldots \frac{1}{2} p \ldots \sqrt{\frac{1}{4} pp \ldots nq}}{n} = m.$	$k = \frac{\ldots \frac{1}{2} p \ldots \sqrt{\frac{1}{4} pp \ldots nq \ldots nm^3}}{n}$.

Pour le quatriéme degré.

$k = \frac{\ldots \frac{1}{2} q \ldots \sqrt{\frac{1}{4} qq \ldots pr}}{p} = m.$	$k = \frac{\ldots \frac{1}{2} q \ldots \sqrt{\frac{1}{4} qq \ldots pr \ldots npm^3 \ldots pm^4}}{p}$.

Pour le cinquiéme degré.

$k = \frac{\ldots \frac{1}{2} r \ldots \sqrt{\frac{1}{4} rr \ldots qs}}{q} = m.$	$k = \frac{\ldots \frac{1}{2} r \ldots \sqrt{\frac{1}{4} rr \ldots qs \ldots pqm^3 \ldots nqm^4 \ldots qm^5}}{q}$.

Pour le sixiéme degré.

$k = \frac{\ldots \frac{1}{2} s \ldots \sqrt{\frac{1}{4} ss \ldots rt}}{r} = m.$	$k = \frac{\ldots \frac{1}{2} s \ldots \sqrt{\frac{1}{4} ss \ldots rt \ldots qrm^3 \ldots prm^4 \ldots nrm^5 \ldots rm^6}}{r}$.

Pour se servir de ces formules, il faut d'abord supposer la plus petite limite de la racine dont on veut trouver la valeur approchée, plus une nouvelle indéterminée f, égale à l'inconnue x de l'équation proposée. (On suppose que la limite ne differe pas de la racine qu'on cherche d'une unité entiere.) Il faut substituer la valeur de x à sa place dans la proposée, & l'on aura la premiere transformée.

Pour trouver la valeur approchée de la moindre des racines positives de cette transformée, on supposera que cette transformée est représentée par l'équation generale qui lui convient; dans le troisiéme degré, par $k^3 \ldots nkk$, &c. & ainsi des autres. On supposera que l'inconnue f de cette transformée est représentée par la lettre k des formules.

Si l'on veut se servir des formules de la premiere maniere, on substituera dans la formule du degré de la proposée, les grandeurs numeriques de la transformée, à la place des lettres qui les représentent; & après la substitution, on aura la valeur approchée qu'on cherche.

Si l'on veut se servir des formules de la seconde maniere, il faut faire deux operations : 1°. Il faut substituer dans la formule du degré qui convient à la transformée, par laquelle on a marqué qu'il faloit commencer, les grandeurs numeriques de la transformée, à la place des lettres qui les représentent; & après la substitution, on aura la valeur qu'on cherche; mais il la faut corriger. On nommera cette valeur non corrigée m; 2°. & on substituera dans la formule corrigée la valeur de m, & les valeurs des autres lettres de la formule à la place de ces lettres; & ce qui viendra de la substitution sera la valeur approchée qu'on cherche.

Pour continuer l'approximation, on supposera la valeur approchée qu'on vient de trouver plus une nouvelle indéterminée g, égale à l'indéterminée f de la premiere transformée. Si la valeur approchée surpassoit la veritable valeur de f, on supposeroit cette valeur moins g, égale à f. On substituera cette valeur de f à sa place dans la premiere transformée, & il en viendra une seconde transformée: on trouvera la valeur approchée de la plus petite racine positive g de cette transformée par les formules, comme on a trouvé la valeur approchée de f, & on continuera l'approximation tant qu'on voudra.

La somme de la limite de la racine qu'on cherche, qui a servi à la premiere operation, & de toutes les valeurs approchées des inconnues des transformées, prises de suite, sera la valeur approchée de la racine qu'on cherche.

L'exemple qu'on en a donné suffit pour faire concevoir l'application des formules.

AVERTISSEMENT.

AVERTISSEMENT.

ON pourroit chercher une racine négative d'une équation proposée par les méthodes précedentes, en employant des limites négatives; mais comme il est facile * de faire en sorte *48. que les racines négatives d'une équation proposée deviennent positives, en changeant les signes des termes pairs, il vaut mieux chercher les racines par les limites positives, cela accoutume à une même méthode, & la rend plus facile.

Remarque sur cette quatriéme méthode d'approximation, qu'il faut se rendre familieres.

I.

161. CETTE méthode fait trouver une racine d'une équation proposée par parties, que l'on découvre les unes après les autres; elle suppose qu'on sçait par une autre voye la premiere partie de la racine, qui en differe très peu : mais elle fait trouver les autres parties par des transformées, dont les racines positives sont les racines positives de la proposée, diminuées chacune de la somme déja trouvée des parties de la racine dont on fait la recherche, & dont les racines négatives sont les négatives de la proposée augmentées chacune de la même somme; & quand la somme déja trouvée des parties de la racine dont on fait la recherche, surpasse cette racine, ou surpasse aussi d'autres racines positives de la proposée, la racine de la proposée dont on fait la recherche, & toutes ces autres racines positives, sont devenues négatives dans la transformée où cela se rencontre; puisqu'elles ont été trop diminuées; & il ne leur reste à chacune dans cette transformée, que l'excès dont la somme déja trouvée des parties de la racine qu'on poursuit, surpasse chacune de ces racines positives de la proposée; & cet excès est négatif.

Ainsi si l'on appelle a la premiere partie de la racine dont on fait la recherche; b, la seconde partie; c, la troisiéme, & ainsi de suite, la premiere partie a est supposée connue d'ailleurs, & elle sert à trouver la seconde partie b, en transformant l'équation proposée, par exemple $x^3 - nxx + px - q = 0$, par la supposition de $a + f = x$, & par la substitution de cette valeur de x à sa place dans la proposée.

On remarquera ſur cette premiere transformée, 1°. que les racines poſitives de la propoſée, & par conſequent celle que l'on cherche, ſont diminuées chacune de la grandeur *a*; ainſi chacune des racines poſitives de la premiere transformée, eſt preciſément l'excès des racines poſitives de la propoſée plus grandes que *a* ſur cette grandeur *a*; & ſi *a* ſurpaſſe quelques racines poſitives de la propoſée, elles deviennent négatives dans la transformée, & l'excès de *a* ſur ces racines poſitives de la propoſée, eſt preciſément leur valeur négative pour ainſi parler, dans la transformée; & les autres racines négatives de la transformée étant augmentées chacune de *a*, leur valeur dans la transformée eſt la ſomme de chacune des racines négatives de la propoſée & de la grandeur *a*.

2°. Par conſequent le terme tout connu, (qu'on nommera
*119. ici le premier,) de la transformée, étant * la ſomme toute connue qui vient de la grandeur *a*, ſubſtituée à la place de *x* dans la propoſée; cette ſomme ou ce premier terme eſt le produit des differences qui ſont entre chacune des racines poſitives de la propoſée & la grandeur *a*, par les racines négatives de la propoſée augmentées chacune de la grandeur *a*.

II.

162. La premiere transformée fait découvrir la ſeconde partie *b* de la racine de la propoſée, dont on fait la recherche, par la premiere maniere de la quatriéme méthode; c'eſt le quotient qu'on trouve en diviſant le premier terme tout connu de la premiere transformée par le coëficient du terme ſuivant, c'eſt-à-dire du terme où *f* eſt lineaire, (qu'on nommera ici le ſecond terme,) ou, ce qui revient au même, cette ſeconde partie *b* eſt une fraction dont le numerateur eſt le premier terme tout connu de la transformée dont on a changé le ſigne, (car pour trouver cette fraction, on a ſuppoſé le premier terme égal au ſecond, ce qui change le ſigne du premier terme; & dégageant *f* dans cette équation, on trouve la fraction dont on vient de parler,) & le dénominateur eſt le coëficient du ſecond terme de la transformée: Mais comme le premier terme n'eſt pas égal au ſeul ſecond terme, mais à tous les autres termes, quand on veut avoir la ſeconde partie *b* de la racine plus approchante de la veri-

table, il faut ajouter au dénominateur de cette fraction le produit du coëficient du troisiéme terme par cette fraction, le produit du coëficient du quatriéme terme par le quarré de cette fraction, & ainsi de suite, en observant d'ajouter ces produits au dénominateur avec les signes qu'ont les coëficiens dans la transformée ; & la fraction qui naît de cette operation est la seconde partie b de la racine qu'on cherche plus approchante qu'elle n'auroit été.

Pour trouver la troisiéme partie c, il faut faire une seconde transformée, en supposant $b + g = f$, & substituer cette valeur de f à sa place dans la transformée précedente ; & l'on aura la seconde transformée, qui servira à faire découvrir la troisiéme partie c de la racine qu'on cherche, de la même maniere que la premiere transformée a servi à faire trouver la seconde partie b.

Cette troisiéme partie de la racine qu'on cherche, servira de même à former une troisiéme transformée, en supposant $c + h = g$, & substituant cette valeur de g à sa place dans la seconde transformée ; & cette troisiéme transformée fera trouver la quatriéme partie d de la racine qu'on cherche, & ainsi de suite à l'infini.

III.

163. On fera sur chacune de ces transformées, par raport à la transformée qui la précede immédiatement, les mêmes remarques qu'on a faites sur la premiere transformée par raport à l'équation proposée dont elle est la transformée immédiate ; & on remarquera de plus, 1°. que si le premier terme d'une transformée se trouvoit égal à zero, l'on auroit la racine exacte de l'équation proposée qu'on cherche, qui seroit égale à la somme de toutes les parties de cette racine qui ont été découvertes, jusqu'à la transformée où cela arrive. Car la derniere partie découverte étant substituée à la place de l'inconnue dans la transformée qui précede celle dont le premier terme est égal à zero, donneroit une somme toute connue égale à zero, puisque cette somme est égale à ce premier terme ; ainsi elle seroit la racine exacte de cette transformée qui précede celle dont le premier terme est égal à zero ; l'on auroit donc precisément ce qui manquoit aux parties déja découvertes de la racine qu'on cherchoit ; par consequent on l'auroit entiere.

2°. Quand le premier terme d'une transformée a un signe different de celui du premier terme de la transformée qui la précede immédiatement, dans ce cas la partie qui a servi à faire la transformée où cela se rencontre, est plus grande que la partie de la racine que l'on cherche; car si cette partie étoit plus petite que la partie que l'on cherche, elle donneroit au premier terme de la transformée le signe du premier terme de la transformée précedente *; si elle étoit égale, elle donneroit zero; & donnant un signe different, elle est plus grande.

*122. Remarques.

D'où l'on voit que si c'est par exemple la troisiéme partie c, qui change le signe de la troisiéme transformée, supposé que c fût positive, l'on trouvera par la méthode même la quatriéme partie d négative; & dans ce cas il faudra supposer $-d+i=h$, pour faire la quatriéme transformée; parceque la racine positive dont on faisoit la recherche, étant devenue négative dans la troisiéme transformée, la troisiéme partie c se trouve plus grande qu'il ne faut; ainsi il faut la diminuer dans la transformée suivante.

IV.

164. On peut raporter immédiatement chaque transformée à l'équation proposée; on raportera ici à l'équation proposée, la troisiéme transformée qui est faite par la supposition de $c+h=g$, & par la substitution de cette valeur de g à sa place dans la seconde transformée; & ce que l'on en dira, pourra facilement s'appliquer aux transformées les plus reculées de l'équation proposée.

Si l'on supposoit la somme de toutes les parties déja découvertes de la racine qu'on cherche, plus une nouvelle inconnue h, égale à l'inconnue de l'équation proposée, par exemple si l'on supposoit $\overline{a+b+c}+h=x$, (on a mis une ligne sur $a+b+c$ pour marquer qu'on regarde cette somme comme une seule grandeur,) & qu'on substituât cette valeur de x à sa place dans l'équation proposée, la transformée qui en viendroit, seroit precisément la troisiéme transformée; c'est-à-dire la transformée que l'on a trouvée en substituant $c+h=g$, à la place de g dans la seconde transformée.

Car les racines positives de la transformée qui viendroit de la substitution de $\overline{a+b+c}+h=x$, à la place de x

dans la proposée, seroient les racines positives de la proposée diminuées chacune de la grandeur $a+b+c$; les négatives de la transformée seroient les négatives de la proposée augmentées chacune de la grandeur $a+b+c$; & s'il se trouvoit que la grandeur $a+b+c$ surpassât quelques racines positives de la proposée, ces racines seroient devenues négatives dans la transformée, & chacune de ces racines négatives seroit l'excès de $a+b+c$ sur chacune des racines positives de la proposée, qui seroient moindres que $a+b+c$. Or en considerant avec attention la suite des transformations, depuis la proposée jusqu'à la troisiéme dont h est l'inconnue, on verra clairement que les racines positives & négatives de la troisiéme transformée, sont precisément les mêmes racines dont on vient de parler. Par consequent la troisiéme transformée est precisément la même transformée qu'on trouveroit en substituant immédiatement dans l'équation proposée $\overline{a+b+c}+h$, à la place de x.

D'où il suit aussi que si l'on substituoit avec des signes contraires la somme de toutes les parties qu'on a déja découvertes de la racine qu'on cherche plus l'inconnue x, à la place de l'inconnue h, dans la troisiéme transformée, l'équation qui en viendroit, seroit exactement l'équation proposée; par exemple si l'on suppose $-\overline{a-b-c}+x=h$, & qu'on substitue cette valeur de h à sa place dans la troisiéme transformée, l'équation qui en naîtra, sera l'équation proposée.

V.

165. Si la grandeur a qu'on prend pour la premiere partie de la racine qu'on cherche, étoit la limite en dessus, c'est-à-dire, si a surpassoit la racine qu'on cherche, il faudroit supposer, pour faire la premiere transformée, $a-f=x$, & substituer cette valeur de x à sa place dans la proposée: Et l'on feroit sur cette transformée & sur les suivantes, des remarques semblables à celles qu'on a faites en supposant que la premiere partie a de la racine qu'on cherche, est moindre que cette racine. Mais il est mieux de prendre la premiere partie a plus petite que la racine, pour s'accoutumer à une même méthode.

Ou bien, pour suivre la même méthode, on supposera $a+f=x$, quoique a surpasse la racine qu'on cherche;

on ſubſtituera $a+f$ dans la propoſée à la place de x, & le premier terme tout connu de la transformée qui en viendra, aura un ſigne oppoſé à celui du premier terme tout connu de la propoſée ; ce qui fera trouver la ſeconde partie b négative ; & pour faire la ſeconde transformée, on ſuppoſera $-b+g=f$.

AVERTISSEMENT.

ON n'a fait ces remarques que ſur la premiere maniere qu'on a donnée dans la quatriéme méthode de trouver par le moyen de chaque transformée, la partie de la racine qu'elle doit faire découvrir, quoiqu'elles puiſſent auſſi convenir à la ſeconde maniere ; parceque cette ſeconde maniere renfermant le ſigne radical $\surd$, & obligeant à l'extraction des racines, le calcul en eſt plus embaraſſant, & on peut moins facilement s'en ſervir dans l'approximation des racines des équations litterales.

Il faut ſe rendre ces remarques & la quatriéme méthode bien familiaires, & la premiere maniere qu'on a donnée dans la quatriéme méthode, de trouver par chaque transformée la partie de la racine qu'elle doit faire découvrir, afin de concevoir clairement la méthode d'approximation des racines des équations litterales qu'on doit donner dans le 7ᵉ Livre, qui n'aura pas beſoin de démonſtration, n'etant qu'une application de cette quatriéme méthode.

La quatriéme remarque donne lieu à une autre pratique de la quatriéme méthode, qu'on appellera une cinquiéme méthode d'approximation, pour faire mieux diſtinguer ces deux manieres de pratiquer la quatriéme méthode.

Cinquiéme méthode pour trouver les valeurs approchées tant près qu'on voudra des racines des équations ; ou autre pratique de la quatriéme méthode.

166. 1°. ON partagera en deux parties l'inconnue de l'équation propoſée dont on veut trouver les racines ; par exemple ſi on veut chercher la premiere racine de l'équation $xx-20x+65=0$, qui eſt entre 4 & 5, on ſuppoſera $E+y=x$, E repréſentera la partie de la racine que l'on connoît déja ; & à meſure que l'on découvrira les parties de la racine qu'on cherche, on ſuppoſera que E repréſente toutes ces parties

déja découvertes; y repréſentera ce qui reſte à découvrir de la racine qu'on cherche.

On ſubſtituera $E+y$ à la place de x dans la propoſée, & l'on aura l'équation

$$\begin{array}{l} EE + 2Ey + yy = 0, \\ - 20E - 20y \\ + 65 \end{array}$$

qui repréſentera toutes les transformées qui doivent ſervir à découvrir les parties de la racine qu'on cherche, les unes après les autres à l'infini : on l'appellera la transformée indéterminée. On ſuppoſe la premiere partie 4 de la racine, connue d'ailleurs. Pour trouver la ſeconde partie :

2°. On ſuppoſera que E repréſente 4, & on ſubſtituera 4 à la place de E dans la transformée indéterminée, & l'on aura $+1-12y+yy=0$; pour trouver la valeur de y, on fera une équation du premier & du ſecond terme, qui donnera $y=\frac{1}{12}$. C'eſt la ſeconde partie de la racine que l'on cherche; ou, ce qui eſt la même choſe, on diviſera le premier terme par le coëficient du ſecond; & changeant le ſigne du quotient, l'on aura la ſeconde partie de la racine.

Si on vouloit une ſeconde partie plus approchée, on feroit ce raiſonnement, comme dans la quatriéme méthode. Le premier terme 1 n'eſt pas ſeulement égal au ſecond $12y$, mais $-1=-12y+yy$, ainſi $y=\frac{1}{12-y}$; & mettant la valeur de $y=\frac{1}{12}$ deja découverte, à la place de y dans le ſecond membre, on auroit $y=\frac{12}{143}$, qui eſt une valeur un peu plus approchée. Mais pour éviter la longueur du calcul, on prendra ici $y=\frac{1}{12}$, pour la ſeconde partie de la racine.

3°. Pour avoir la troiſiéme partie de la racine, on ſuppoſera que E dans la transformée indéterminée repréſente la ſomme $4\frac{1}{12}$ des parties de la racine déja découvertes, & que y repréſente ce qui en reſte à découvrir : On ſubſtituera dans cette transformée $4\frac{1}{12}=\frac{49}{12}$ à la place de E, & l'on aura $+\frac{1}{144}-\frac{142}{12}y+yy=0$. On diviſera le premier terme $+\frac{1}{144}$ par le coëficient $-\frac{142}{12}$ du ſecond terme, & changeant le ſigne du quotient, on aura $+\frac{1}{1704}$ pour la troiſiéme partie de la racine qu'on cherche.

4°. Pour trouver la quatriéme partie de la racine, on ſuppoſera dans la transformée indéterminée, que E repréſente la ſomme des parties de la racine déja découvertes, $4+\frac{1}{12}$

$+ \frac{1}{1704} = + \frac{6959}{1704}$; on substituera cette valeur de E à sa place dans la transformée indéterminée ; & prenant ensuite le quotient du premier terme de l'équation qui en viendra, divisé par le coëficient du second terme, & changeant le signe de ce quotient, ce sera la quatriéme partie qu'on cherche.

On peut continuer cette approximation à l'infini. Cet exemple, qui n'est pas composé, suffit pour faire concevoir clairement cette méthode, qui est démontrée par la quatriéme méthode, & par les remarques, & sur-tout la 4e. Il est évident que la partie de la racine représentée par E, ne fait qu'augmenter, pendant que celle qui est représentée par y, ne fait que diminuer.

Pour se rendre cette méthode familiere, on peut continuer l'approximation précedente ; & chercher la seconde racine de la proposée, qui surpasse 15, & qui est moindre que 16. On peut aussi chercher, par la même méthode, les racines de l'équation $x^3 - 2700x + 32400 = 0$, dont la plus petite est entre 12 & 13 ; la 2e, entre 44 & 45 ; & la 3e, entre 57 & 58.

On va faire ici l'application de cette cinquiéme méthode à l'approximation des racines des puissances numeriques imparfaites.

Usage de la cinquiéme méthode d'approximation des racines des équations, pour trouver les valeurs approchées tant près qu'on voudra des racines des puissances numeriques imparfaites.

167. ON suppose qu'on a trouvé par la méthode de l'extraction des racines de l'arithmetique, la racine de la plus grande puissance parfaite contenue dans la puissance numerique imparfaite ; ce sera la premiere partie de la racine qu'on cherche, qui ne differe pas de la racine veritable, qui est incommensurable, d'une unité entiere ; il faut trouver les autres parties de cette racine, & en continuer l'approximation à l'infini, ou autant près qu'on voudra de la veritable racine, qu'on ne peut pas exprimer par nombres.

1°. On supposera que la racine de la plus grande puissance parfaite contenue dans la puissance numerique imparfaite dont on cherche la racine, est représentée par E, & l'excès de la puissance numerique imparfaite sur la plus grande puissance parfaite qui y est contenue, est représentée par D: ces

ces deux nombres sont supposez connus. Ainsi $EE + D$ sera l'expression de toutes les secondes puissances numeriques imparfaites; $E^3 + D$, celle de toutes les troisiémes puissances; $E^4 + D$, de toutes les quatriémes; $E^5 + D$, de toutes les cinquiémes; & ainsi de suite.

2°. On supposera que $E + x$ représentent les deux parties de la racine qu'on cherche; sçavoir E, celle qui est connue; & x, celle qui est inconnue & que l'on cherche; ce qui donnera les équations suivantes: $E + x = \sqrt{EE + D}$, pour les secondes puissances: $E + x = \sqrt[3]{E^3 + D}$, pour les troisiémes: $E + x = \sqrt[4]{E^4 + D}$, pour les quatriémes; & ainsi de suite.

3°. On ôtera les incommensurables de ces équations, & l'on aura $-D + 2Ex + xx = 0$, pour les secondes puissances; $-D + 3EEx + 3Exx + x^3 = 0$, pour les troisiémes; $-D + 4E^3x + 6EExx + 4Ex^3 + x^4 = 0$, pour les quatriémes; $-D + 5E^4x + 10E^3xx + 10EEx^3 + 5Ex^4 + x^5 = 0$, pour les cinquiémes; $-D + 6E^5x + 15E^4xx + 20E^3x^3 + 15EEx^4 + 6Ex^5 + x^6 = 0$, pour les sixiémes; & ainsi des autres suivantes.

Ces équations seront les transformées indéterminées comme dans la cinquiéme méthode, chacune pour son degré. E représentera d'abord la premiere partie de la racine qu'on cherche; & substituant cette premiere partie à la place de E, on trouvera la seconde partie comme dans la 5e méthode; puis substituant la somme des deux premieres parties à la place de E, on trouvera la troisiéme; après substituant la somme des trois premieres parties à la place de E, on trouvera la quatriéme partie; & ainsi à l'infini.

168. Le premier terme D est toujours entierement connu quand on commence l'operation, puisque c'est le reste connu de la puissance numerique imparfaite, qui demeure après avoir ôté de cette puissance imparfaite la plus grande puissance parfaite qui y est contenue.

Quand on a trouvé la seconde partie de la racine par la substitution de la premiere partie, qu'on suppose connue, à la place de E, pour avoir la seconde valeur de D, il faut substituer cette seconde partie de la racine qu'on vient de trouver, à la place de x, & laisser la premiere partie substituée à la place de E; & la somme toute connue qui vient

* 119. de cette ſubſtitution, eſt le ſecond D*, qui doit ſervir pour trouver la troiſiéme partie.

Quand on aura trouvé cette troiſiéme partie par la ſubſtitution de la ſomme des deux parties déja découvertes à la place de E dans l'équation transformée indéterminée, où l'on a laiſſé la valeur du D précedent, il faudra ſubſtituer cette troiſieme partie à la place de x, & la ſomme toute connue qui viendra de cette ſubſtitution, ſera le troiſiéme D, ou la troiſiéme valeur de D, qui doit ſervir pour trouver la quatriéme partie.

Quand on aura découvert cette quatriéme partie par la ſubſtitution de la ſomme des trois premieres parties déja connues à la place de E, il faudra ſubſtituer cette quatriéme partie qu'on vient de découvrir à la place de x, & la ſomme toute connue qui naîtra de cette ſubſtitution, ſera le 4e D, ou la 4e valeur de D, qui doit ſervir à faire découvrir la 5e partie; & ainſi à l'infini.

169. Ou bien pour avoir la valeur de D, qui ſert à trouver chaque partie, par exemple la quatriéme, il n'y a qu'à élever à la même puiſſance dont on cherche la racine, la ſomme de toutes les parties déja trouvées, par exemple des trois premieres, & ôter la puiſſance de cette ſomme de la puiſſance numerique imparfaite propoſée; le reſte ſera la valeur de D qu'on cherche.

On peut faire comme dans la quatriéme méthode, des formules generales dans chaque degré, pour trouver les parties de la racine qu'on cherche, les unes après les autres, la premiere partie étant ſuppoſée connue.

Formules generales pour l'approximation des racines des puiſſances numeriques imparfaites.

170. POUR les racines des ſecondes puiſſances . $x = \frac{D}{2E + \frac{D}{2E}}$.

Pour les racines des troiſiémes puiſſances . . . $x = \frac{D}{3EE + \frac{D}{E} + \frac{DD}{9E^4}}$.

Pour les racines des quatriémes puiſſances . . . . $x = \frac{D}{4E^3 + \frac{3D}{2E} + \frac{DD}{4E^5} + \frac{D^3}{64E^9}}$.

Pour les racines des cinquiémes puiſſances. . . $x = \frac{D}{5E^4 + \frac{2D}{E} + \frac{2DD}{5E^6} + \frac{D^3}{25E^{11}} + \frac{D^4}{725E^{16}}}$.

On peut facilement trouver, comme dans la 4ᵉ methode, les formules pour les puiſſances ſuivantes à l'infini, ſi l'on en a beſoin.

Pour trouver par le moyen de ces formules la racine cubique, par exemple de 12 : 1°. le plus grand cube contenu dans 12, eſt 8, dont la racine cubique eſt 2 ; ainſi $2 = E$; $12 = 8 + 4 = E^3 + D$, & le premier $D = 4$. L'équation indéterminée du troiſiéme degré, qui repréſente toutes les transformées qui feront trouver les parties de la racine qui ſuivent la premiere qui eſt 2, eſt $-D + 3EEx + 3Exx + x^3 = 0$: La formule qui ſert à trouver ces parties repréſentées par x, déduite de cette équation, eſt $x = \frac{D}{3EE + \frac{D}{E} + \frac{DD}{9E^4}}$.

Ces choſes ſuppoſées :

2°. Pour trouver la ſeconde partie de la racine, on ſubſtituera dans cette formule 4 à la place de D, & 2 à la place de E ; & l'on aura la ſeconde partie $= \frac{4}{12 + 2 + \frac{1}{9}} = \frac{36}{127}$.

Pour avoir la ſeconde valeur de D, qui ſervira à trouver la troiſiéme partie de la racine, on ſubſtituera dans l'équation $-D + 3EEx + 3Exx + x^3 = 0$, 4 à la place de D ; 2 à la place de E ; & $\frac{36}{127}$ à la place de x ; & l'on aura $-4 + 12 \times \frac{36}{127} + 6 \times \overline{\frac{36}{127}}|^2 + \overline{\frac{36}{127}}|^3 = -\frac{1151716}{2048383}$, pour la ſeconde valeur de D, qu'on trouveroit auſſi en élevant la ſomme des deux parties déja trouvées $2 + \frac{36}{127}$ à la 3ᵉ puiſſance, & retranchant cette 3ᵉ puiſſance de la propoſée 12, le reſte feroit la ſeconde valeur de D.

3°. Pour trouver la troiſiéme partie de la racine qu'on cherche, il faut ſubſtituer dans la formule $x = \frac{D}{3EE + \frac{D}{E} + \frac{DD}{9E^4}}$, à la place de D, ſa valeur qu'on vient de trouver, & à la place de E, la ſomme $2 + \frac{36}{127}$ des parties de la racine déja découvertes, &c.

On peut continuer l'approximation à l'infini : ces operations ſuffiſent pour faire clairement concevoir la méthode.

171. Si L'on veut des formules où il faut extraire la racine quarrée, on les formera comme dans la quatriéme methode; elles sont inutiles pour tirer les racines des quarrez imparfaits. Voici la maniere de les former pour trouver les valeurs approchées des racines troisiémes des troisiémes puissances imparfaites, dont l'équation indéterminée est $-D+3EEx+3Exx+x^3=0$. Il faut faire une équation des trois premiers termes, & l'on aura $-D+3EEx+3Exx=0$, ou bien $xx+Ex=\frac{D}{3E}$, d'où l'on tire $x=-\frac{1}{2}E+\sqrt{\frac{1}{4}EE+\frac{D}{3E}}$. C'est la formule par où il faut commencer pour trouver chaque partie de la racine qu'on cherche, la premiere partie étant supposée connue: Et pour rendre cette partie de la racine encore plus approchante, on supposera cette premiere valeur de chaque partie $=m$, & ensuite on considerera l'équation indéterminée entiere $-D+3EEx+3Exx+x^3=0$, comme étant du second degré, l'ordonnant ainsi $3Exx+3EEx=D-x^3$, ou plutôt $xx+Ex=\frac{D}{3E}-\frac{x^3}{3E}$, d'où l'on tirera $x=-\frac{1}{2}E+\sqrt{\frac{1}{4}EE+\frac{D}{3E}-\frac{x^3}{3E}}$; & mettant dans le 2e membre la valeur de x déja trouvée, qu'on a supposée $=m$, on aura $x=-\frac{1}{2}E+\sqrt{\frac{1}{4}EE+\frac{D}{3E}-\frac{m^3}{3E}}$. C'est la formule corrigée, qui à chaque operation fera trouver une partie très-approchante de la racine qu'on cherche.

On trouvera de la même maniere que pour découvrir les parties de la racine d'une quatriéme puissance imparfaite, il faut commencer, en cherchant chaque partie, par la formule $x=-\frac{1}{3}E+\sqrt{\frac{1}{9}EE+\frac{D}{6EE}}$; & cette partie étant découverte par cette formule, on la supposera $=m$, & on l'approchera encore plus par cette formule corrigée $x=-\frac{1}{3}E+\sqrt{\frac{1}{9}EE+\frac{D}{6EE}-\frac{2m^3}{3E}-\frac{m^4}{6EE}}$.

Pour la cinquiéme puissance, on commencera par la formule $x=-\frac{1}{4}E+\sqrt{\frac{1}{16}EE+\frac{D}{10E^3}}$; & après avoir trouvé la valeur de la partie qu'on cherche par cette formule, on la supposera $=m$, & on se servira ensuite de la formule corrigée $x=-\frac{1}{4}E+\sqrt{\frac{1}{16}EE+\frac{D}{10E^3}-\frac{m^3}{E}-\frac{m^4}{2EE}-\frac{m^5}{10E^3}}$.

Il est facile de trouver les formules pour l'approximation des racines des puissances numeriques imparfaites plus élevées, si l'on en a besoin.

Pour se servir de ces formules dans l'approximation des racines des puissances imparfaites, par exemple pour approcher de la racine cubique de 12 = 8 + 4 : 1°. on substituera dans la formule par où il faut commencer, la premiere partie de la racine qui est 2, à la place de *E*, & 4 à la place de *D*, & l'on aura la seconde partie de la racine qu'on cherche. Pour l'approcher d'avantage, on la supposera cette seconde partie représentée par *m*, & on la substituera avec les précedentes valeurs de *E* & de *D* dans la formule corrigée, & l'on aura la seconde partie de la racine très-approchée.

Pour trouver la troisiéme partie de la racine, on cherchera la seconde valeur de *D*, comme aux articles 168, 169; on substituera cette valeur de *D* à sa place dans la formule par où il faut commencer, & la somme des deux parties de la racine déja découvertes, à la place de *E*; & on aura la troisiéme partie de la racine. Pour la corriger, c'est à-dire pour la rendre plus approchante, on la regardera comme représentée par *m*, & on la substituera avec les valeurs précedentes de *D* & de *E* dans la formule corrigée; & l'on aura la troisiéme partie de la racine très-approchante. On réïterera l'operation tant qu'on voudra : mais le calcul en étant plus penible que celui qu'il faut employer dans l'usage des premieres formules, on peut se contenter de ces premieres formules; & il suffit ici d'avoir fait concevoir clairement la formation & l'usage des unes & des autres.

SECTION IV.

Où l'on enseigne à résoudre toutes les équations numeriques.

PROBLÊME IV.

72. *RESOUDRE toute équation numérique de quelque degré qu'elle puisse être, lorsqu'elle n'a qu'une inconnue.*

C'EST-à-dire trouver les racines commensurables d'une équation numerique, lorsqu'elle en a de commensurables; trouver les valeurs approchées des racines incommen-

ſurables, & en continuer l'approximation à l'infini ; déterminer ſi elle a des racines imaginaires ; & ſi la propoſée a de ces racines, en déterminer le nombre.

On ſuppoſe que l'équation propoſée n'a point de fractions ni d'incommenſurables ; que ſon premier terme n'a pas d'autre coëficient que l'unité ; qu'elle a tous ſes termes, & qu'ils ont alternativement les ſignes + & —.

MÉTHODE.

148. 1°. IL faut trouver par le premier Problême toutes les équations des limites de l'équation propoſée.

2°. La racine de l'équation lineaire des limites ſera la limite moyenne des deux racines de l'équation des limites du ſecond degré ; zero & ſon plus grand coëficient négatif rendu poſitif & augmenté de l'unité, en ſeront les limites extrêmes. Par le moyen de la limite zero & de la limite moyenne, on trouvera la premiere & plus petite racine de l'équation des limites du ſecond degré, par les méthodes du troiſiéme Problême ſi elle eſt commenſurable, ou ſa valeur approchée ſi elle eſt incommenſurable. On trouvera de même en ſe ſervant de la limite moyenne & de la plus grande limite extrême, la ſeconde racine de la même équation, ou ſa valeur approchée.

Les racines de l'équation des limites du ſecond degré, ou leurs valeurs approchées, ſeront priſes pour les limites moyennes des racines de l'équation des limites du 3e degré ; zero & ſon plus grand coëficient négatif augmenté de l'unité, en ſeront les limites extrêmes. On trouvera par le moyen de ces limites les racines de cette équation ou leurs valeurs approchées, qu'on prendra pour les limites moyennes des racines de l'équation des limites du quatriéme degré, dont zero & le plus grand coëficient négatif augmenté de l'unité ſeront les limites extrêmes. On trouvera par le moyen de ces limites les racines de cette équation du quatriéme degré, ou leurs valeurs approchées, qui ſeront les limites moyennes des racines de l'équation des limites du cinquiéme degré ; zero & le plus grand coëficient négatif de cette équation du cinquiéme degré augmenté de l'unité, ſeront les limites extrêmes, & par le moyen de ces limites on trouvera les racines de cette équation ou leurs valeurs approchées.

Continuant ces operations jusqu'à l'équation proposée, de quelque degré qu'elle soit, on en trouvera toutes les racines lorsqu'elles sont commensurables, ou leurs valeurs approchées.

3°. Si l'on trouve qu'une des limites, c'est-à-dire une des racines d'une équation des limites, étant substituée dans l'équation du degré immédiatement plus élevé, & dans toutes celles qui précedent, à la place de l'inconnue, donne zero; c'est-à-dire, si toutes ces équations ont une racine commune, il y a des racines égales dans la proposée: on en a marqué dans le premier Problême la maniere d'en déterminer le nombre.

4°. Lorsque la racine d'une équation des limites étant substituée à la place de x dans l'équation immédiatement plus élevée d'un degré, ne donne ni zero, ni une somme toute connue qui ait le signe + ou — que doit donner cette racine prise pour limite moyenne, il y a des racines imaginaires dans la proposée; & comme les racines imaginaires sont toujours deux à deux, il y en a deux fois autant que cela arrive de fois.

Application de la méthode aux exemples.

EXEMPLE I.

POUR trouver les racines de 1°. on en trovera par le premier Problême les équations des limites, comme on les voit ici:

$$x^4 - 80x^3 + 1998xx - 14937x + 5000 = 0$$
$$\begin{matrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 0: \end{matrix}$$

1re *équation des limites.*

$$4x^4 - 240x^3 + 3996xx - 14937x = 0$$
ou $4x^3 - 240xx + 3996x - 14937 = 0$
$$\begin{matrix} 3 & 2 & 1 & 0. \end{matrix}$$

2e *équation des limites.*

$$12x^3 - 480xx + 3996x = 0$$
ou $12xx - 480x + 3996 = 0$,

ou bien encore en divisant chaque terme par 12, qui s'en trouve un diviseur exact:

$$xx - 40x + 333 = 0$$
$$\begin{matrix} 2 & 1 & 0. \end{matrix}$$

3e *équation des limites.*

$$2xx - 40x = 0$$
ou $x - 20 = 0$.

2°. On prendra la racine 20 de l'équation lineaire $x - 20 = 0$, pour la limite moyenne des deux racines de la seconde équation des limites $xx - 40x + 333 = 0$; & l'on prendra zero & le plus grand coëficient négatif augmenté de l'unité pour les limites extrêmes; & les limites des racines seront 0, 20, 41.

*156. On cherchera par la premiere méthode du 3e Problême, * la premiere & plus petite racine de $xx - 40x + 333 = 0$, en se servant des limites 0 & 20; & l'on trouvera que cette racine est incommensurable, & qu'elle est entre 11 qui donne + 14, & 12 qui donne − 3. On prendra pour la valeur approchée de cette premiere racine 11 ou 12.

On trouvera de même en se servant des limites 20 & 41, que la seconde racine est incommensurable, & qu'elle est entre 28 qui donne, étant substituée à la place de x, la somme toute connue − 3, & 29 qui donne + 14. On prendra pour la valeur approchée de cette seconde racine 28 ou 29.

Ainsi 0, 12, 28, & le plus grand coëficient négatif de la premiere équation des limites $4x^3 - 240xx + 3996x - 14937 = 0$, seront les limites de cette équation. Pour avoir ce plus grand coëficient négatif, il faut diviser tous les termes par le coëficient 4 du premier terme, afin d'avoir l'équation $x^3 - 60xx + 999x - 3734\frac{1}{4} = 0$, dont le premier terme n'a pas d'autre coëficient que l'unité; & ses limites seront 0, 12, 28, 3736.

On trouvera par la premiere méthode du troisiéme Problême, en se servant des limites 0 & 12, que la premiere & plus petite racine est entre 5 qui donne le signe −, & 6 qui donne le signe +. On prendra pour la valeur approchée de cette racine 5 ou 6.

On trouvera de même en se servant des limites 12 & 28, que la seconde racine est entre 21 qui donne +, & 22 qui donne −. On prendra pour la valeur approchée de cette seconde racine 21 ou 22.

On trouvera en se servant des limites 28 & 3736, que la troisiéme racine est entre 34 qui donne $- 24\frac{1}{4}$, & 35 qui donne $+ 605\frac{3}{4}$. On prendra pour la valeur approchée de cette racine 34 ou 35.

Ainsi les limites des racines de la proposée sont 0, 6, 21 34, 14938.

On

On trouvera par la premiere méthode du troisiéme Problême, en se servant des deux limites o & 6, que la premiere & plus petite racine de la proposée, est entre zero & l'unité; & si on se sert ensuite de la troisiéme méthode, on trouvera qu'elle est entre $\frac{2}{10}$ & $\frac{3}{10}$; car $\frac{2}{10}$ donne +, & $\frac{3}{10}$ donne —.

On trouvera de même, en se servant des deux limites 6 & 21, que la seconde racine de la proposée est entre 12 qui donne —, & 13 qui donne +.

On trouvera, en se servant des deux limites 21 & 34, que la troisiéme racine de la proposée est entre 32 qui donne +, & 33 qui donne —.

Enfin on trouvera en se servant des deux limites 34 & 14938, que la quatriéme & plus grande racine de la proposée est entre 34 qui donne —, & 35 qui donne +.

Ainsi les quatre racines de la proposée sont incommensurables; la premiere ou plus petite surpasse $\frac{2}{10}$, & est moindre que $\frac{3}{10}$ qui sont ses valeurs approchées.

Les valeurs approchées en entiers de la seconde, sont la moindre 12 & la plus grande 13.

Les valeurs approchées en entiers de la troisiéme, sont la moindre 32 & la plus grande 33.

Les valeurs approchées en entiers de la quatriéme, sont la moindre 34 & la plus grande 35.

Si l'on veut aprés cela approcher à l'infini de chacune de ces racines, il faut se servir de la troisiéme méthode du troisiéme Problême; * & si l'on ne craint pas la longueur du *158.
calcul, il faut se servir de la quatriéme méthode, * par le *159.
moyen de laquelle on trouve à chaque operation des valeurs extrêmement approchées des racines qu'on cherche, & qu'on ne sçauroit trouver exactement par les nombres; puisqu'elles sont incommensurables.

Remarques pour la pratique de ce Problême.

I.

IL faut toujours avoir en vûe le signe que doit donner chaque limite: Que la moindre limite & toutes les grandeurs moindres que la plus petite racine d'une équation, doivent donner le signe du dernier terme de cette équation.

Que la seconde limite & toutes les grandeurs moindres que la seconde racine, mais plus grande que la premiere;

doivent donner le ſigne contraire à celui du dernier terme.

Que la troiſiéme limite & toutes les grandeurs moindres que la troiſiéme racine, mais plus grandes que la ſeconde, doivent donner le ſigne du dernier terme.

Que la quatriéme limite & toutes les grandeurs moindres que la quatriéme racine, mais plus grandes que la troiſiéme, doivent donner le ſigne contraire à celui du dernier terme.

Et ainſi de ſuite juſqu'à la derniere & plus grande limite, qui doit toujours donner le ſigne +; & toutes les grandeurs qui ſurpaſſent la plus grande & derniere racine, doivent donner le même ſigne +.

Qu'entre les grandeurs qui ſont moyennes entre les deux mêmes racines, & qui donnent le même ſigne, celles qui donnent de moindres reſtes que les autres, approchent plus de la racine qu'on cherche.

II.

Quand on cherche les racines d'une équation des limites, ou de la propoſée, dont on a les limites; il faut toujours commencer par la premiere méthode du troiſiéme Problê-
*156. me, * & la continuer juſqu'à ce qu'on ait trouvé les racines exactes, lorſqu'elles ſont commenſurables; ou, quand elles ſont incommenſurables, juſqu'à ce qu'on ait trouvé leurs valeurs approchées en entiers, qui ne different entre elles que de l'unité, dont l'une ſoit moindre & l'autre plus grande que la racine qu'on cherche.

S'il faut enſuite trouver des valeurs en fractions qui approchent de plus en plus à l'infini, on ſe ſervira de la troiſiéme
*158. méthode du troiſiéme Problême; * & ſi l'on veut bien pren-
*159. dre la peine du calcul, on ſe ſervira de la quatriéme méthode, * par laquelle on trouve à chaque operation des valeurs qui approchent bien de plus près de la racine qu'on cherche.

III.

Lorſque les racines d'une équation des limites ſont commenſurables, on les appellera les limites exactes, & l'on eſt aſſuré qu'étant ſubſtituées à la place de l'inconnue dans l'équation dont elles ſont les limites, elles donneront les ſignes qu'elles doivent donner, ſans même en faire la ſubſtitution, ſi les racines de cette équation ſont inégales; & que celles des limites qui ſont égales à quelques-unes des racines, donneront zero, quand il y a des racines égales; & qu'enfin

celles de ces limites exactes qui ne donneront ni zero, ni le ſigne qu'elles doivent donner, feront connoître qu'il y a des racines imaginaires dans l'équation dont elles ſont les limites, & dans la propoſée.

Mais quand les racines d'une équation des limites ne ſont pas commenſurables, l'on n'eſt pas aſſuré que leurs valeurs approchées en nombres entiers, qu'on appellera ici les limites approchées en entiers, donnent toujours les ſignes qu'elles doivent donner. Comme cependant il arrive ordinairement que les limites approchées en nombres entiers, donnent les ſignes que doivent donner les limites exactes, parce qu'ordinairement les racines des équations dont elles ſont les limites, different entr'elles de pluſieurs unitez; quand on a trouvé ces limites approchées par la premiere méthode, il faut les ſubſtituer à la place de l'inconnue dans l'équation dont elles ſont les limites, pour voir ſi elles donnent les ſignes qu'elles doivent donner; & ſi l'on trouve qu'elles les donnent, il faut s'en ſervir pour trouver les racines, comme l'on a fait dans l'exemple précedent.

Si les limites approchées en nombres entiers, ne donnent pas les ſignes des limites exactes, ce qui arrive lorſque les racines de l'équation dont elles ſont les limites, ſont incommenſurables, & ne different entr'elles que par des grandeurs moindres que l'unité, il faut alors continuer l'approximation des limites par la 3e ou 4e méthode.

Ou bien il faut d'abord multiplier les racines de la propoſée par 10, ou par 100, ou 1000, &c. en mettant un ou pluſieurs zeros au ſecond terme, deux fois autant au troiſiéme terme, trois fois autant au quatriéme terme, & ainſi de ſuite; & après cela les racines differeront entr'elles de pluſieurs unitez, & les limites approchées en nombres entiers qu'on trouvera, donneront les ſignes que doivent donner les limites exactes, lorſque les racines de la propoſée ſeront réelles & differentes entr'elles: & ſi elles ne les donnoient pas, ce ſeroit une marque qu'il y auroit dans la propoſée des racines égales incommenſurables, ou des racines imaginaires. On en fera une remarque à la fin des exemples.

Mais quand on a ajouté des zeros au ſecond terme de la propoſée & aux autres termes, il faut diviſer les valeurs approchées des racines de la propoſée, quand on les aura

trouvées, par l'unité précedée d'autant de zeros qu'on en a mis au ſecond terme de la propoſée, & ces fractions ſeront les valeurs approchées des racines de la propoſée.

Il faut donc remarquer qu'on trouvera toujours les limites approchées en nombres entiers, du moins en ajoutant des zeros au ſecond terme & aux autres termes de la propoſée, lorſque ſans cela on ne peut pas les trouver en entiers; ou des limites approchées en fractions, en continuant l'approximation par la troiſiéme ou quatriéme méthode, leſquelles limites donneront les ſignes que doivent donner les limites exactes, lorſque les racines de l'équation ſont toutes réelles & inégales.

Ainſi ſi l'on ne pouvoit pas trouver ces limites, ce ſeroit une marque aſſurée que les racines de la propoſée ne ſeroient pas toutes inégales, & qu'il y en auroit d'égales, mais incommenſurables, ou bien qu'il y auroit des racines imaginaires.

I V.

On peut ſouvent diminuer le calcul de la méthode de ce quatriéme Problême, en faiſant quelques tentatives, ſurtout en deux choſes.

La premiere eſt, quand la plus grande limite, qui eſt le plus grand coëficient négatif rendu poſitif & augmenté de l'unité, ſurpaſſe conſiderablement la limite pénultiéme, comme dans le premier exemple, où la plus grande limite 14938, ſurpaſſe conſiderablement la pénultiéme limite 34; au lieu de ſe ſervir de la plus grande limite, on peut faire quelques tentatives ſur des grandeurs plus approchantes de la limite pénultiéme, comme dans le premier exemple on peut eſſayer ſi la ſubſtitution de 40 à la place de l'inconnue, ne donnera point le ſigne + de la plus grande limite; & comme l'on trouve que 40 donne le ſigne +, on eſt aſſuré que 40 ſurpaſſe la plus grande racine de la propoſée; & on ſe ſervira des limites 34 & 40, pour la trouver par la premiere méthode, au lieu des limites 34 & 14938.

La ſeconde eſt, qu'avant de réſoudre les premieres & les plus compoſées équations des limites, c'eſt-à-dire avant d'en chercher toutes les racines, on peut faire des tentatives, pour voir ſi les racines exactes ou approchées des dernieres & plus ſimples équations des limites, ne peuvent point ſervir immédiatement de limites aux racines de la propoſée, en

ſubſtituant ces racines des dernieres équations des limites, à la place de l'inconnue, immédiatement dans l'équation propoſée ; on trouvera le plus ſouvent qu'elles donnent les ſignes que doivent donner les limites des racines de la propoſée, & on les prendra dans ce cas pour ces limites des racines de la propoſée.

Par exemple, lorſqu'on a trouvé que les racines approchées de l'équation des limites du ſecond degré dans le premier exemple, ſont la plus petite 11 ou 12, la plus grande 28 ou 29, on ſubſtituera la premiere de ces racines 11 ou 12, à la place de l'inconnue dans la propoſée ; & trouvant une ſomme toute connue qui a le ſigne —, qui eſt celui que doit donner la ſeconde limite des racines de la propoſée, on prendra 11 ou 12 pour la ſeconde limite, & l'on aura pour les deux limites de la premiere & plus petite racine de la propoſée, 0 & 12.

On ſubſtituera de même 28 ou 29, & trouvant que 28 ou 29 donne le ſigne +, qui eſt celui que doit donner la troiſiéme limite, on prendra 12 & 28 pour les deux limites dont il faut ſe ſervir pour chercher la ſeconde racine de la propoſée.

D'où l'on voit que pour avoir toutes les limites de la propoſée, il ne faudra plus chercher que la grandeur qui ſurpaſſe 28, & qui donne le ſigne —, c'eſt-à-dire la limite qui ſurpaſſe la troiſiéme racine de la propoſée, & qui eſt moindre que la quatriéme ; ainſi il ne faudra chercher dans l'équation des limites du troiſiéme degré, que la plus grande racine ſeule, dont les limites ſont 28 & 3736, & le calcul ſe trouve bien abregé par ces tentatives.

Un peu de pratique fera trouver beaucoup d'autres abregez.

EXEMPLE II.

POUR trouver les racines de l'équation $x^6 - 7xx + 6 = 0$, qui n'eſt que du troiſiéme degré, par leſquelles on aura les valeurs de x lineaire dans cette équation ; 1°. il faut la transformer en une autre équation qui ait tous ſes termes avec les ſignes alternatifs + & — ; ce qui ſe fera en ſuppoſant $8 - xx = z$; d'où l'on aura $xx = 8 - z$; & ſubſtituant

$8 - z$ à la place de x, on aura la transformée que voici, qu'on regardera comme la proposée.

2°. Il faut en trouver les équations des limites, comme on les voit ici :

$$z^3 - 24zz + 185z - 462 = 0.$$
$$3 \quad 2 \quad 1 \quad 0$$

$$3z^3 - 48zz + 185z = 0;$$

divisant par $3z$, on aura la premiere équation des limites,

$$zz - 16z + 61\tfrac{2}{3} = 0.$$
$$2 \quad 1 \quad 0.$$

$$2zz - 16z = 0;$$

divisant par $2z$, on aura la derniere équation des limites,

$$z - 8 = 0.$$

3°. Il faut prendre la racine 8 de l'équation lineaire des limites $z - 8 = 0$, pour la limite moyenne entre les deux racines de la premiere équation des limites, & les trois limites des deux racines de cette premiere équation des limites seront 0, 8, 17.

En cherchant la premiere, c'est-à-dire, la plus petite racine de l'équation $zz - 16z + 61\frac{2}{3} = 0$, par le moyen de ses deux limites 0 & 8, on trouve qu'elle surpasse 6, & qu'elle est moindre que 7.

Pour abreger, on pourra, avant de chercher la seconde racine de la premiere équation des limites, tenter si la substitution de l'une ou l'autre des limites 6 ou 7, à la place de z dans la proposée, ne donneroit point le signe + que doit donner la seconde limite des racines de la proposée, & en servir elle-même, en cas qu'elle le donne. Mais trouvant que la substitution de 6 au lieu de z dans la proposée donne zero, on a par cette simple operation 6 pour la premiere racine de la proposée $z^3 - 24zz +$ &c.

Pour abreger encore le calcul, on divisera la proposée $z^3 - 24zz +$ &c. par l'équation lineaire $z - 6 = 0$, qui contient sa premiere racine ; & l'on aura le quotient $zz - 18z + 77 = 0$, qui contient les deux autres racines de la proposée.

On pourra enfin, pour abreger, résoudre cette équation qui contient les deux autres racines de la proposée, par la

méthode qui convient au second degré, & l'on trouvera que ses racines sont 7 & 11.

Pour achever la résolution, on substituera successivement les trois racines 6, 7 & 11 de la transformée $z^3 - 24zz +$ &c. dans l'équation $8 - xx = z$, ou $xx = 8 - z$, qui a servi à la transformation; & l'on trouvera les trois valeurs de xx dans $x^6 - 7xx + 6 = 0$, qui sont $xx = 1$, $xx = 2$, $xx = -3$.

D'où l'on tirera les six valeurs de x lineaire, dans la proposée $x^6 - 7xx + 6 = 0$, qui sont $x = +\sqrt{1}$, $x = -\sqrt{1}$; $x = +\sqrt{2}$, $x = -\sqrt{2}$; $x = +\sqrt{-3}$, $x = -\sqrt{-3}$. D'où l'on voit que x a quatre valeurs réelles, & deux valeurs imaginaires dans la proposée $x^6 - 7xx + 6 = 0$; & la proposée est entierement résolue.

EXEMPLE III.

POUR trouver les valeurs approchées des trois racines de l'équation irréductible du 3e degré $x^3 - 2700x + 32400 = 0$, dont les deux plus petites racines sont positives, & dont la plus grande est négative & égale à la somme des deux autres, puisque le second terme est évanoui; 1°. Il faut la transformer en une autre qui ait tous ses termes, & dont toutes les racines soient positives; ce qu'on fera en supposant le plus grand coëficient négatif rendu positif & augmenté de l'unité moins une nouvelle inconnue z, égal à l'inconnue x; ce qui donnera $2701 - z = x$; & en substituant cette valeur de x à sa place dans la proposée, on aura la transformée suivante, qui a les conditions propres à y appliquer la méthode du quatriéme Problême.

$$z^3 - 8103zz + 21883503z - 19697617801 = 0.$$
$$3 \quad 2 \quad 1 \quad 0$$
$$3z^3 - 16206zz + 21883503z = 0.$$

divisant par $3z$, l'on a la premiere équation des limites,

2°. Il faut trouver les équations des limites des racines de la transformée, comme on le voit ici:

$$zz - 5402z + 7294501 = 0.$$
$$2 \quad 1 \quad 0.$$
$$2zz - 5402z = 0.$$

divisant par $2z$, l'on a la seconde équation des limites,

$$z - 2701 = 0.$$

La racine de la 2e équation des limites étant $z = 2701$, les

limites des racines de la premiere équation des limites seront 0, 2701, 5403. On trouvera par le moyen de ces limites, ou si l'on veut par la méthode des équations du second degré, que les racines de la premiere équation des limites sont exactement 2671 & 2731.

Ainsi les limites des racines de la transformée seront 0, 2671, 2731, 1969761 7802.

On trouvera par le moyen des deux premieres limites 0, 2671, que la premiere & plus petite racine de la transformée est entre 2656, qui étant substituée à la place de z, donne le signe —, & 2657 qui donne +.

On trouvera par le moyen de la seconde & troisiéme limite 2671, 2731, que la seconde racine de la transformée est entre 2688 qui donne +, & 2689 qui donne —.

Il est inutile, comme on le va voir, de se donner la peine de chercher la valeur approchée entre deux limites qui ne different que de l'unité, de la troisiéme racine de la transformée; comme aussi de trouver des valeurs plus approchées de la premiere & de la seconde racine de la transformée.

3°. Il faut substituer dans l'équation simple $2701 - z = x$, qui a servi à trouver la transformée, à la place de z, les valeurs approchées en entiers de la premiere & seconde racines de la transformée; & l'on trouvera la premiere & plus petite valeur de x dans la proposée entre 12, qui y étant substituée à la place de x, donne +, & 13 qui donne —.

On trouvera de même la seconde valeur de x dans la proposée entre 44 qui donne —, & 45 qui donne +.

On trouvera ensuite des valeurs approchées en fractions de la premiere & seconde racines de la proposée tant près qu'on voudra, en employant la troisiéme ou la quatriéme méthode du troisiéme Problême.

Et comme l'on sçait que la troisiéme & plus grande racine de la proposée est égale à la somme des deux autres, il n'y aura qu'à prendre la somme des valeurs approchées de la premiere & seconde racines, & la rendre négative, & ce sera la valeur approchée de la troisiéme racine de la proposée.

Ou bien si l'on veut chercher la troisiéme racine de la proposée en particulier, on la rendra positive en changeant le signe du quatriéme terme de la proposée, & l'on aura $x^3 - 2700x - 32400 = 0$.

On

On prendra la ſomme des deux moindres limites en nombres entiers des deux plus petites racines, leſquelles limites ſont 12 & 44, & cette ſomme 56 ſera la moindre limite de la troiſiéme racine de la propoſée, qui étant ſubſtituée à la place de x, donnera le ſigne —.

On prendra de même la ſomme des deux plus grandes limites 13 & 45 des deux premieres racines de la propoſée, & cette ſomme 58 ſera la plus grande limite de la troiſiéme racine de la propoſée, qui étant ſubſtituée donnera +.

On trouvera en employant la premiere méthode du troiſiéme Problême avec ces deux limites 56 & 58, que la troiſiéme racine de la propoſée eſt entre 57 qui donne —, & 58 qui donne +; & en employant la 3ᵉ ou la 4ᵉ méthode du troiſiéme Problême, on trouvera la valeur approchée en fractions tant près qu'on voudra de la troiſiéme racine de la propoſée.

EXEMPLE IV. OÙ IL Y A DES RACINES EGALES.

POUR trouver les racines de l'équation ſuivante du quatriéme degré; 1°. on en trouvera les équations des limites comme on les voit ici . . . .

$$x^4 - 24x^3 + 192xx - 640x + 768 = 0.$$
$$4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0$$

$$4x^4 - 72x^3 + 384xx - 640x = 0;$$

diviſant par $4x$, on aura la premiere équation des limites,

$$x^3 - 18xx + 96x - 160 = 0.$$
$$3 \quad 2 \quad 1 \quad 0.$$

$$3x^3 - 36xx + 96x = 0;$$

diviſant par $3x$, on aura la ſeconde équation des limites,

$$xx - 12x + 32 = 0.$$
$$2 \quad 1 \quad 0.$$

$$2xx - 12x = 0;$$

diviſant par $2x$, on aura la troiſiéme équation des limites,

$$x - 6 = 0.$$

2°. La racine de la derniere équation des limites étant 6, les limites des racines de la ſeconde ſeront 0, 6, 13.

On trouvera par le moyen des limites 0, 6, que la premiere racine de la ſeconde équation des limites eſt 4; & par le moyen des limites 6 & 13, que la ſeconde eſt 8; ainſi les limites des racines de la premiere équation des limites ſeront 0, 4, 8, 161.

Mais on trouvera en cherchant la premiere racine de la premiere

équation des limites entre o & 4, que 4 eſt une racine exacte.

Ainſi il y a dans la premiere équation des limites deux racines égales à 4, & il y a dans la propoſée trois racines égales à 4, car on trouve zero en y ſubſtituant 4.

Le plus court eſt quand on trouve ainſi des racines égales exactes, de diviſer la propoſée par l'équation qui eſt le produit des trois équations lineaires des trois racines égales à 4, lequel produit eſt $x^3 - 12xx + 48x - 64 = 0$; & le quotient $x - 12 = 0$, contiendra les racines inégales, qui ſont ici la ſeule $x = 12$.

Si l'on vouloit employer la méthode de ce 4e Problême à trouver la racine inégale de la propoſée, il faudroit trouver la troiſiéme racine de la premiere équation des limites, en ſe ſervant de la limite 8 & du plus grand coëficient négatif augmenté de l'unité, qui eſt 161 pour la ſeconde limite, & on trouveroit que cette racine eſt 10. On ſe ſerviroit enſuite de cette racine 10 pour premiere limite, & du plus grand coëficient négatif de la propoſée augmenté de l'unité, qui eſt 641, pour ſeconde limite; & l'on trouveroit par le moyen de ces deux limites, que la quatriéme racine de la propoſée eſt 12.

On peut remarquer qu'on a dit qu'il falloit chercher la racine inégale de la premiere équation des limites, entre les limites 8 & 161, parceque 8 ſurpaſſe la racine égale 4; mais ſi la racine égale avoit ſurpaſſé 8, il auroit fallu chercher la racine inégale entre o & 8. De même ſi la racine égale eût ſurpaſſé la limite 10, que la premiere équation des limites donne pour limite de la racine inégale de la propoſée, il auroit fallu chercher la racine inégale de la propoſée entre zero & la limite 10.

EXEMPLE V. où les racines sont imaginaires.

POUR réſoudre l'équation $x^4 - 12x^3 + 68xx - 192x + 288 = 0$.

1°. On trouvera toutes les équations des limites, comme on les voit ici:

$$\begin{array}{l} x^4 - 12x^3 + 68xx - 192x + 288 = 0. \\ 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0. \\ \hline 4x^4 - 36x^3 + 136x - 192x = 0; \end{array}$$

diviſant par 4x, on aura la premiere équation des limites,

$$\begin{array}{l} x^3 - 9xx + 34x - 48 = 0. \\ 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0. \\ \hline 3x^3 - 18xx + 34x = 0; \end{array}$$

2°. La racine de la derniere équation des limites étant 3, les limites des racines de la ſeconde équation

des limites ſeront o, 3, 7.

Mais on trouve que la limite 3 étant ſubſtituée dans la ſeconde équation des limites à la place de x, donne le ſigne + au lieu du ſigne — qu'elle devroit donner; ainſi l'on eſt aſſuré que les deux racines de la ſeconde équation des limites ſont imaginaires, & que par conſéquent il y a deux racines imaginaires dans la premiere équation des limites, & dans la propoſée.

divisant par $3x$, on aura la ſeconde équation des limites,

$$xx - 6x + 11\tfrac{1}{3} = 0.$$
$$2 \quad 1 \quad 0.$$
$$2xx - 6x = 0;$$

diviſant par $2x$, on aura la derniere équation des limites,

$$x - 3 = 0.$$

La ſeconde équation des limites ne donnant aucunes limites pour les racines de la premiere équation des limites, on n'aura pour les limites de la racine réelle de la premiere équation des limites, que o & 49.

On trouvera par le moyen de ces deux limites, que 3 eſt la racine réelle de la premiere équation des limites.

Ainſi on aura pour les limites des deux racines de la propoſée qui reſtent à trouver, o, 3, 193.

Mais l'on trouve que la limite 3, qui eſt une limite exacte, donne le ſigne + au lieu du ſigne — qu'elle devroit donner; (car la limite o & la limite 193 donnent chacune le ſigne +) cela fait voir qu'il y a encore deux racines imaginaires dans la propoſée.

La propoſée eſt réſolue, car ſçachant que ces quatre racines ſont imaginaires, on eſt aſſuré que le Problême exprimé par cette équation, eſt impoſſible, ou renferme contradiction.

EXEMPLE VI. QUI APPARTIENT A UN CAS QU'IL FAUT REMARQUER PAR RAPORT A CETTE METHODE.

POUR réſoudre l'équation

1°. Il faut trouver les équations des limites, comme on les voit ici:

2°. La racine de la derniere équation des limites étant 4, on aura pour les limites des racines de la ſeconde équation des limites o, 4, 9.

$$x^4 - 16x^3 + 72xx - 64x + 16 = 0.$$
$$4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0.$$
$$4x^4 - 48x^3 + 144xx - 64x = 0;$$

diviſant par $4x$, on aura la premiere équation des limites,

$$x^3 - 12xx + 36x - 16 = 0.$$
$$3 \quad 2 \quad 1 \quad 0.$$
$$3x^3 - 24xx + 36x = 0;$$

On trouvera par le moyen des limites o & 4, que la premiere & plus petite racine de la seconde équation des limites est 2.

On trouvera de même par le moyen des limites 4 & 9, que la seconde racine est 6.

divisant par $3x$, on aura la seconde équation des limites,

$$xx - 8x + 12 = 0.$$
$$2 \quad 1 \quad 0.$$

$$2xx - 8x = 0;$$

divisant par $2x$, on aura la troisiéme ou derniere équation des limites,

$$x - 4 = 0.$$

Ainsi les limites des racines de la premiere équation des limites sont o, 2, 6, 17.

On trouvera par le moyen des limites o, 2, que la premiere & plus petite racine de la premiere équation des limites est incommensurable, & qu'elle est entre zero & l'unité; & par l'approximation de la troisiéme méthode du troisiéme Problême, qu'elle est entre $\frac{5}{10}$, qui étant substituée à la place de x donne —, & $\frac{6}{10}$ qui donne +.

On trouvera par le moyen des limites 2 & 6, que la seconde racine de la premiere équation des limites est exactement 4.

On trouvera enfin par le moyen des limites 6 & 17, que la troisiéme & plus grande racine de la premiere équation des limites est incommensurable, & qu'elle est entre 7 qui donne —, & 8 qui donne +.

Ainsi les limites des racines de la proposée sont o, $\frac{5}{10}$ ou $\frac{6}{10}$, 4, 7 ou 8, & 65.

On cherchera donc la premiere & plus petite racine de la proposée entre les limites o & $\frac{5}{10}$ ou $\frac{6}{10}$.

La seconde entre les limites $\frac{5}{10}$ ou $\frac{6}{10}$ & 4.

La troisiéme entre les limites 4 & 7 ou 8.

La quatriéme entre les limites 7 ou 8 & 65.

Mais en cherchant la premiere racine de la proposée par le moyen des limites o & $\frac{5}{10}$ ou $\frac{6}{10}$, on ne trouve point que la seconde limite $\frac{5}{10}$ ou $\frac{6}{10}$, donne le signe — qu'elle doit donner.

De même en cherchant la seconde racine entre les limites $\frac{5}{10}$ ou $\frac{6}{10}$ & 4, on ne trouve point que la premiere limite, ni aucune grandeur entre la premiere limite & la seconde 4, donne le signe — qu'elle doit donner.

On trouvera le même inconvenient en cherchant la troisiéme & la quatriéme racine de la proposée.

3°. Dans ce cas il faut approcher les limites en fractions, & se servant de la troisiéme méthode du troisiéme Problême, mettre plusieurs zeros au second terme de la premiere équation des limites, en mettre deux fois autant au troisiéme terme qu'on en a mis au second terme, en mettre trois fois autant au quatriéme terme, & quatre fois autant au cinquiéme, &c. trouver ensuite les limites approchées de la premiere & troisiéme racines de la premiere équation des limites, de maniere que les deux limites pour la premiere racine, ne different que d'une unité, & de même les deux limites pour la troisiéme racine, &c.

Il faut mettre ces limites pour numerateurs, & l'unité précedée d'autant de zeros qu'on en a mis au second terme, pour chaque dénominateur; & ensuite chercher avec ces limites approchées les racines de la proposée.

Mais comme en cherchant la premiere racine entre les deux nouvelles limites qui sont des fractions dont les dénominateurs sont fort grands, on trouve toujours que la seconde limite approchée ne donne point le signe — qu'elle doit donner, cela porte à conclure que l'on ne sçauroit trouver de seconde limite qui donne le signe — qu'elle doit donner, & qu'ainsi il faut ou que la premiere racine de la premiere équation des limites qui est incommensurable, soit égale à la premiere racine de la proposée; & que si on la pouvoit trouver exactement, elle donneroit zero, étant substituée à la place de x dans la proposée; que ce n'est que parcequ'elle est incommensurable qu'on ne peut pas trouver sa valeur exacte, qui étant substituée dans la proposée donne zero; & que dans ce cas les deux premieres racines de la proposée sont égales: Ou bien il faut que les deux premieres racines de la proposée soient imaginaires, parceque dans ce cas la seconde limite de la premiere racine de la proposée, quoiqu'approchée à l'infini, ne donnera jamais le signe qu'elle devroit donner, si les deux premieres racines de la proposée étoient réelles & inégales.

Et comme en cherchant la troisiéme & quatriéme racines de la proposée, la limite 4e qui devroit donner le signe —, donne aussi le signe +, quoiqu'on l'approche tant qu'on voudra, cela portera de même à conclure que la troisiéme & la quatriéme racines de la proposée sont égales ou imaginaires.

4°. Au lieu de la méthode de l'article troisiéme, on peut ſe ſervir de celle-ci, qui revient à la même choſe.

On mettra pluſieurs zeros au ſecond terme de la propoſée, plus on en mettra, & plus on ſera aſſuré que la propoſée appartient au cas pour lequel eſt ce ſixiéme exemple. On mettra le même nombre de zeros au ſecond terme de la premiere équation des limites. On mettra deux fois autant de zeros au troiſiéme terme de la propoſée, & de la premiere équation des limites, qu'on en a mis au ſecond terme. On en mettra trois fois autant au quatriéme, &c. On en met dans notre exemple ſeulement deux pour abreger le calcul, & l'on aura les transformées,

$$x^4 - 1600x^3 + 720000xx - 64000000x + 1600000000 = 0.$$

$$x^3 - 1200xx + 360000x \quad - 16000000 = 0.$$

Comme l'on a déja, par le premier & le ſecond article de ce ſixiéme exemple, les racines approchées de la premiere équation des limites, qui ſont $\frac{5}{10}$ ou $\frac{6}{10}$, la ſeconde exactement 4, la troiſiéme 7 ou 8 ; on mettra devant chacune deux zeros, & elles ſeront les racines approchées de la premiere équation des limites de la transformée. Ces racines approchées ſont la premiere 50 ou 60, la ſeconde exactement 400, la troiſiéme 700 ou 800.

On cherchera, par la premiere méthode du troiſiéme Problême, deux valeurs approchées de la premiere racine de la transformée de l'équation des limites, qui ne different que de l'unité, & l'on trouvera 53 qui donne —, & 54 qui donne +.

On cherchera de même deux valeurs approchées de la troiſiéme racine, & l'on trouvera 744 qui donne —, & 745 qui donne +.

Ainſi les limites des racines de la transformée de l'équation propoſée, ſeront 0, 53 ou 54, 400, 744 ou 745, & 64000001.

Mais en cherchant la premiere racine de la transformée de la propoſée, avec les limites zero & 53 ou 54, on ne trouve pas que la ſeconde limite 53 ou 54 donne le ſigne — qu'elle devroit donner : Comme l'on ſuppoſe qu'on a mis beaucoup de zeros au ſecond terme des transformées, cela porte à conclure que les deux premieres racines de la trans-

formée de la proposée, & par conséquent les deux permieres racines de la proposée, sont égales ou imaginaires.

La même chose arrivant en cherchant la troisiéme racine, on en conclut de même que les deux dernieres racines de la proposée sont égales ou imaginaires.

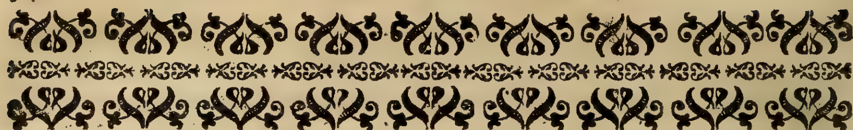
5°. On pourroit, au lieu de se servir de la méthode du troisiéme article de cet exemple, c'est-à-dire, au lieu de se servir de la troisiéme méthode du troisiéme Problême, employer la quatriéme méthode du troisiéme Problême, pour trouver les valeurs extrêmement approchées des racines de la premiere équation des limites.

Remarque sur le cas de ce sixiéme exemple.

ON ne peut pas, dans le cas de ce sixiéme exemple, s'assurer par cette méthode d'approximation du quatriéme Problême, si les racines de la proposée, pour lesquelles on ne trouve pas des limites approchées qui donnent les signes qu'elles doivent donner, sont des racines égales & incommensurables, ou si elles sont imaginaires. Il faut avoir recours, quand la proposée ne surpasse pas le quatriéme degré, aux marques certaines qu'on a données dans le cinquiéme Livre, pour distinguer les racines qui sont imaginaires, de celles qui sont égales, dans le quatriéme, troisiéme & second degré.

On peut encore se servir de la méthode generale des équations qui ont des racines égales, qu'on a donnée à la fin du quatriéme Livre, c'est-à-dire, chercher le plus grand diviseur commun de la proposée & de la premiere équation des limites; & trouvant que $xx - 8x + 4 = 0$, est un diviseur qui leur est commun, on est assuré que les deux racines de ce diviseur commun, qui sont $x = 4 + 2\sqrt{3}$, $x = 4 - 2\sqrt{3}$, sont communes à la premiere équation des limites & à la proposée; & par conséquent que les deux premieres racines de la proposée sont $x = 4 - 2\sqrt{3}$, $x = 4 - 2\sqrt{3}$, & les deux dernieres sont $x = 4 + 2\sqrt{3}$, $x = 4 + 2\sqrt{3}$.

On peut aussi se servir de la méthode du cinquiéme Corollaire du dixiéme Theorême, pour distinguer dans le cas de ce sixiéme exemple, s'il y a des racines égales.



ANALYSE COMPOSÉE,

OU

ANALYSE QUI ENSEIGNE A RESOUDRE les Problêmes qui ſe réduiſent à des équations compoſées.

LIVRE VII.

De l'approximation des racines des équations litterales.

SECTION I.

De l'approximation des racines des équations litterales déterminées.

PROBLÊME I.

173. *TROUVER les racines d'une équation litterale qui n'a qu'une inconnue, ou bien les valeurs approchées des racines, & en continuer l'approximation à l'infini.*

MÉTHODE GENERALE POUR LES ÉQUATIONS DE TOUS LES DEGREZ.

LES lettres connues des coëficiens des termes de l'équation, & celles du dernier terme, marquant des grandeurs connues, il faut ſuppoſer que l'une de ces lettres eſt l'unité, ou un nombre pris à diſcretion, comme 10, 20, 30, 100, 1000, &c.

Le raport de chaque autre lettre connue à celle qu'on vient de ſuppoſer égale à un nombre, étant connu, il faut trouver la valeur en nombres de toutes les autres lettres connues

3°. Il faut ſuppoſer chaque terme de cette équation changée égal à zero, & l'on aura par cette ſuppoſition toutes les équations particulieres dont on a beſoin pour déterminer les valeurs des indéterminées.

Par la 1re $a^3 - y^3 = 0$, on trouvera $a = y$; par la 2e $3aabn + ayn = 0$, on aura, en ſubſtituant la valeur de $a = y$ à la place de a, $b = -\frac{1}{3}$; par la 3e $3aac + 3abb + a + by = 0$, on trouvera, en ſubſtituant les valeurs de a & de b, déja découvertes, à leur place, $c = -\frac{1}{3y}$; en ſubſtituant dans la 4e $3aad + 6abc + b^3 + b + cy - 2 = 0$, les valeurs de a, b, c, on aura $d = +\frac{55}{81yy}$; on trouvera de même, en ſubſtituant les valeurs de a, b, c, d, dans la 5e $3aae + 3acc + 6abd + 3bbc + c + dy = 0$, $e = +\frac{64}{243y^3}$.

4°. Il faut ſubſtituer ces valeurs de a, b, c, d, e, dans $x = a + bn + cn^2 + dn^3 + en^4 +$, &c. & l'on aura $x = y - \frac{1}{3}n - \frac{1n^2}{3y} + \frac{55n^3}{81yy} + \frac{64n^4}{243y^3} +$, &c. C'eſt la valeur approchée de x dans la propoſée, quand n eſt moindre que y.

Il eſt évident qu'on peut trouver tant de termes qu'on voudra de cette valeur, & l'augmenter à l'infini.

Démonſtration de la méthode.

178. LA grandeur qui étant ſubſtituée dans une équation à la place de l'inconnue x, rend tous les termes de l'équation égaux à zero; ou, ce qui revient au même, qui fait que tous les termes ſe détruiſent, eſt une racine de l'équation; c'eſt-à-dire, cette grandeur eſt la valeur de l'inconnue x. * Or il eſt évident que la ſuite que l'on trouve par la méthode pour la valeur de l'inconnue x, étant conçue infinie, c'eſt-à-dire, contenant tous ſes termes à l'infini, il eſt, dis-je, évident que cette ſuite infinie étant conçue ſubſtituée à la place de x dans l'équation, tous les termes de l'équation ſeront égaux à zero; puiſque ce n'eſt que par cette ſuppoſition qu'on trouve la valeur déterminée de chaque terme de cette ſuite. Par conſéquent la ſuite infinie qu'on trouve par cette méthode, eſt la valeur de l'inconnue x de l'équation. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* 33.

REMARQUES.

I.

179. IL eſt évident par cette démonſtration, que plus on prendra de termes dans la ſuite que fait trouver la méthode

pour la valeur de x, & plus cette valeur sera approchée, c'est-à-dire, moins elle differera de la moindre valeur de x, que l'on ne peut pas découvrir entiere, étant infinie. D'où l'on voit que les termes de cette suite doivent aller en diminuant, & que plus ils iront en diminuant, & moins il faudra de termes pour la valeur approchée qu'on cherche, tous ceux qu'on neglige ne faisant pas une grandeur sensible.

Or plus la grandeur qui distingue les termes de la suite sera petite, & plus les termes iront en diminuant; car cette grandeur se trouvant dans le numerateur de chaque terme, & les autres quantitez plus grandes qu'elles, dans le dénominateur, tous les termes, excepté les premiers, seront des fractions qui iront en diminuant, parceque les puissances de ces grandeurs qui vont en augmentant, font que ces grandeurs deviennent plus petites, étant des fractions.

C'est pour cela qu'on a marqué qu'il falloit prendre pour la grandeur qui distingue les termes la seconde inconnue y de l'équation proposée, quand elle est plus petite que les grandeurs connues de cette équation; & que quand elle est plus grande, il falloit prendre parmi les grandeurs connues de la proposée celle qui est la plus petite, pour la grandeur qui doit distinguer les termes de la suite qu'on cherche.

II.

180. On peut même préparer l'équation proposée de façon qu'on y puisse prendre une grandeur très petite par raport aux autres, pour distinguer les termes de la suite qu'on cherche. Cette préparation peut se faire de deux manieres: 1°. sur les grandeurs connues de la proposée; 2°. sur la seconde inconnue.

La préparation se fait sur les grandeurs connues par le moyen des proportions, observant de faire en sorte que la valeur des coëficiens connus demeure toujours la même dans ces changemens, & qu'il n'y ait que changement d'expression, & non pas changement de valeur. Par exemple on pourra supposer $pq = nn$, en prenant la grandeur p tant petite qu'on voudra, & faisant $p . n :: n . q$, ce qui donnera $pq = nn$; & mettant cette valeur de nn dans la proposée, elle sera changée en

$$\begin{aligned}-2npq + pqx + x^3 &= 0\\ -y^3 + nyx\end{aligned}$$

qui ne differe de la proposée que par l'expression; & l'on pourra prendre

la grandeur p pour diſtinguer les termes de la ſuite qui ſera la valeur de x. Ceci ſuffit pour indiquer les moyens de faire ces ſortes de préparations ſur les grandeurs connues de la propoſée, qui peuvent ſe faire de pluſieurs façons differentes; parmi leſquelles on choiſira les plus commodes pour le calcul, & pour faire en ſorte que les termes de la ſuite qui eſt la valeur de x, aillent en diminuant le plus qu'il ſera poſſible.

La préparation ſur la ſeconde inconnue y, ſe fait par le moyen des transformations; par exemple, on peut ſuppoſer dans la propoſée du premier exemple $\frac{n}{y} = z$, ou telle autre transformation de y qu'on jugera la plus propre pour rendre y moindre que les grandeurs connues; & ſubſtituer la valeur de y priſe dans l'équation $\frac{n}{y} = z$, ou telle autre qu'on jugera plus propre, dans la propoſée à la place de y; enſuite on prendra l'inconnue nouvelle z pour diſtinguer les termes de la ſuite qui eſt la valeur de x; & quand on aura trouvé cette ſuite, on ſubſtituera dans tous les termes à la place de l'inconnue z, la valeur de z priſe dans l'équation qui a ſervi à faire la transformation. On peut auſſi diminuer les dimenſions de y, par exemple s'il y avoit $\frac{y^3x}{n}$ au lieu de nyx, on pourroit ſuppoſer $y^3 = nnz$, &c. Par le moyen de ces préparations, on peut trouver pluſieurs differentes ſuites pour la valeur de x, & choiſir celle qui eſt la plus commode pour la réſolution du Problême; comme auſſi celle dont les termes vont le plus en diminuant, & dont par conſequent il faut moins de termes pour avoir une valeur très-approchante de la veritable.

III.

181. Quand l'équation qui fait trouver le premier terme de la ſuite eſt compoſée, & contient pluſieurs racines poſitives & réelles, on peut trouver autant de valeurs de x, que cette équation contient de racines poſitives; & l'on peut chercher celle de ces valeurs de x qu'on voudra, ou qu'on jugera la plus propre à réſoudre le Problême; ou bien on pourra les chercher toutes, & l'on aura le même nombre de réſolutions du Problême. Si cette équation compoſée qui n'a qu'une inconnue, n'avoit aucune racine commenſurable, on trouveroit les valeurs approchées de ſes racines incommenſurables par le premier Problême, * ou par le Problême *173.

de la derniere Section de ce Livre, & ces valeurs approchées seroient prises pour les premiers termes des suites qu'on cherche.

Comme cette méthode est de grand usage dans la Géometrie composée, on va l'appliquer à beaucoup d'exemples, & quand on l'aura ainsi rendue familiere, on donnera la méthode de distinguer les exposans des puissances de la grandeur qui doit distinguer les termes de la suite, dans le premier & le second terme, les autres en étant une suite, puisqu'ils doivent être en progression arithmetique.

I V.

182. Quoiqu'on ait dit que quand la seconde inconnue y pouvoit être plus grande qu'une des grandeurs connues de l'équation proposée, il falloit prendre la grandeur connue la plus petite pour distinguer les termes de la suite qui doit être la valeur approchée de x, cela n'empêche pas qu'on ne puisse dire que dans ce cas là même on peut prendre la seconde inconnue y pour distinguer les termes de la suite qu'on cherche : mais comme dans ce cas la seconde inconnue y doit être au dénominateur, ou, ce qui est la même chose, les exposans des puissances de y dans les termes de la suite, doivent être négatifs, & que d'ordinaire on est moins accoutumé au calcul de ces puissances, dont l'exposant est négatif, on a crû qu'il seroit plus commode de ne faire faire attention au Lecteur qu'à la grandeur qui distingue les termes dont les puissances ont des exposans positifs. Cependant pour faire voir que l'un revient à l'autre, on va résoudre le même exemple en prenant la seconde inconnue y pour distinguer les termes de la suite qu'on cherche, qui doit être la valeur de x.

Troisiéme maniere de résoudre le premier Exemple.

183. POUR trouver la valeur approchée de x dans l'équation

$$\begin{matrix} x^3 + nyx - y^3 = 0 \\ + nnx - n^3 \end{matrix}$$

lorsque y peut être plus grande que n, en se servant pourtant de y & des puissances de y pour distinguer les termes de la suite qu'on cherche.

1°. Il faut supposer $x = ay + by^0 + cy^{-1} + dy^{-2} + ey^{-3} +$, &c. les grandeurs a, b, c, &c. sont indéterminées.

2°. Il faut élever cette valeur de x à la troisiéme puissance, & substituer les valeurs de x & de x^3, dans la proposée, à la place de x & de x^3, & l'on aura l'équation changée qui suit:

$$\begin{array}{llllll}
x^3 = & a^3y^3 + 3a^2byy & + 3ab^2y + & b^3y^0 & + 3b^2cy^{-1} + \&c. \\
 & & + 3a^2cy + & 6abcy^0 & + 6abdy^{-1} \\
 & & & + 3a^2dy^0 & + 3ac^2y^{-1} \\
 & & & & + 3a^2ey^{-1} \\
+ nyx = & + nayy & + nby & + ncy^0 & + ndy^{-1} + \&c. \\
+ nnx = & & + nnay & + nnby^0 & + nncy^{-1} + \&c. \\
- y^3 = & - y^3 & & & \\
- 2n^3 = & & & - 2n^3y^0 &
\end{array}$$

3°. Il faut supposer chaque terme de cette équation changée égal à zero, & l'on trouvera par les équations particulieres que donne cette supposition, $a = 1$, $b = -\frac{1}{3}n$, $c = -\frac{1}{3}nn$, $d = +\frac{55}{81}n^3$, $e = +\frac{64}{243}n^4$. On peut dégager autant d'autres termes qu'on voudra, & continuer l'approximation à l'infini.

4°. Il faut substituer ces valeurs de a, b, c, d, e, dans $x = ay + by^0 + cy^{-1} + dy^{-2} + ey^{-3} + \&c.$ & l'on aura $x = y - \frac{1}{3}ny^0 - \frac{1}{3}nny^{-1} + \frac{55}{81}n^3y^{-2} + \frac{64}{243}n^4y^{-3}$ &c. c'est la valeur de x que l'on cherchoit.

Il faut entendre la même chose dans les cas semblables, où l'on se servira dans la suite de cette troisiéme maniere.

EXEMPLE II.

184. TROUVER par cette méthode la suite infinie qui exprime la racine quarrée de la grandeur $rr - xx$, c'est-à-dire, trouver la suite égale à $\sqrt{rr - xx} = \overline{rr - xx}^{\frac{1}{2}}$.

Il faut supposer $z = \overline{rr - xx}^{\frac{1}{2}}$, par consequent $zz = rr - xx$, & $zz + xx - rr = 0$.

La question se réduit à trouver la suite infinie qui exprime la valeur de l'inconnue z dans cette équation, par les puissances de x. Pour la trouver,

1°. Il faut supposer $z = a + bxx + cx^4 + dx^6 + ex^8 + fx^{10}$ &c. a, b, c, d, &c. sont des grandeurs indéterminées.

2°. Quarrant chaque membre on aura

$$\begin{array}{llll}
zz = aa + 2abxx & + bbx^4 & + 2adx^6 & \&c. \\
 & + 2acx^4 & + 2bcx^6 &
\end{array}$$

Substituant cette valeur de zz dans l'équation $zz + xx - rr = 0$, on aura l'équation changée suivante.

$$0 = \left\{ \begin{array}{lllll} zz = & aa & + 2abxx & + bbx^4 & + 2adx^6 \\ & & & + 2acx^4 & + 2bcx^6 \quad \&c. \\ + xx = & & + xx & & \\ - rr = & - rr & & & \end{array} \right.$$

Il faut supposer chaque terme de cette équation changée égal à zero, ce qui donnera autant d'équations particulieres qu'on en a besoin pour déterminer les coëficiens indéterminez a, b, c, &c.

3°. Par la premiere $aa = rr$, on aura $a = r$; par la seconde $2ab = -1$, en substituant la valeur de a à sa place dans $2ab$, on trouvera $b = \frac{-1}{2r}$. En substituant les valeurs de a & de b dans la troisiéme $2ac = -bb$, on trouvera $c = \frac{-1}{2 \times 4r^3}$. En substituant les valeur de a, b, c, dans la quatriéme $2ad = -2bc$, on trouvera $d = \frac{-1}{16r^5}$.

4°. Il faut substituer ces valeurs de a, b, c, d, à la place de a, b, c, d, dans $z = a + bxx + cx^4 + dx^6$ &c. & l'on aura $z = \sqrt{rr - xx} = \overline{rr - xx}^{\frac{1}{2}} = r - \frac{1}{2r}xx - \frac{1}{8r^3}x^4 - \frac{1}{16r^5}x^6$ &c. C'est la suite que l'on cherchoit qui exprime la racine quarrée de $rr - xx$; on peut en trouver autant de termes qu'on voudra.

On trouvera de la même maniere la racine 3e, 4e, &c. de la somme ou de la difference de deux grandeurs.

Mais il faut remarquer que si l'on cherche la racine quarrée, ou 3e, ou 4e, &c. de $rr + xx$, il faut prendre celle des deux grandeurs r ou x qui est la plus petite, pour en faire la grandeur qui doit distinguer les termes de la suite qu'on cherche, qui est la valeur de z, c'est-à-dire, la racine de la grandeur complexe proposée.

EXEMPLE III.

185. TROUVER la racine quarrée d'une suite infinie $a + by + cyy + dy^3 + ey^4 + fy^5$, &c. c'est-à-dire, trouver une suite infinie qui soit la valeur de $\sqrt{a + by + cyy + dy^3 + ey^4 \&c.}$ $= \overline{a + by + cyy + dy^3 + ey^4 \&c.}^{\frac{1}{2}}$

Il faut supposer $x = \overline{a + by + cyy + dy^3 + cy^4 \&c.}^{\frac{1}{2}}$ Par consequent $xx = a + by + cyy + dy^3 + ey^4$ &c. & $0 = -xx + a + by + cyy + dy^3 + ey^4$ &c.

La question se réduit à trouver la suite infinie qui exprime la valeur de x dans cette équation, dont les termes soient distinguez par les puissances de y. Pour la trouver,

1°. Il faut supposer $x = g + hy + iyy + ky^3 + ly^4 + py^5$, &c. les grandeurs g, h, i, &c. sont indéterminées.

2°. En quarrant chaque membre, on aura

$$\begin{aligned} xx = gg + 2ghy + hhyy &+ 2gky^3 + 2gly^4 \text{ \&c.} \\ + 2giyy &+ 2hiy^3 + 2hky^4 \\ &+ iiy^4 \end{aligned}$$

Substituant cette valeur de xx à la place de xx dans l'équation proposée $o = -xx + a + by + cyy$ &c. on aura l'équation changée qui suit.

$$o = \left\{ \begin{aligned} -xx &= -gg - 2ghy - 2giyy - 2gky^3 - 2gly^4 \text{ \&c.} \\ &\qquad\qquad - hhyy - 2hiy^3 - 2hky^4 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - iiy^4 \\ a + by + cyy \text{ \&c.} &= + a + by + cyy + dy^3 + ey^4 \text{ \&c.} \end{aligned} \right.$$

3°. Il faut supposer chaque terme de cette équation changée égal à zero; ce qui donnera les équations particulieres dont on a besoin pour déterminer les coëficiens indéterminez g, h, i, &c.

Par la premiere $gg = a$, on aura $g = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$. En substituant dans la seconde $2gh = b$, la valeur de g, on aura $h = \frac{b}{2a^{\frac{1}{2}}}$ En substituant dans la troisiéme $2gi = c - hh$, les valeurs de g & de h, on aura $i = -\frac{bb}{8a^{\frac{3}{2}}} + \frac{c}{2a^{\frac{1}{2}}}$.

En substituant dans la quatriéme $2gk = -2hi + d$, les valeurs de g, h, i, on aura $k = \frac{b^3}{16a^{\frac{5}{2}}} - \frac{bc}{4a^{\frac{3}{2}}} + \frac{d}{2a^{\frac{1}{2}}}$.

On trouvera de même les valeurs des autres coëficiens; ceci suffit pour faire concevoir la méthode.

4°. Il faut substituer ces valeurs de g, h, i, k, à leur place dans l'équation $x = g + hy + iyy + ky^3$ &c. & l'on aura

$$\begin{aligned} x = a^{\frac{1}{2}} + \frac{b}{2a^{\frac{1}{2}}}y - \frac{bb}{8a^{\frac{3}{2}}}yy &+ \frac{b^3}{16a^{\frac{5}{2}}}y^3 \\ + \frac{c}{2a^{\frac{1}{2}}}yy &- \frac{bc}{4a^{\frac{3}{2}}}y^3 \text{ \&c.} \\ &+ \frac{d}{2a^{\frac{1}{2}}}y^3 \end{aligned}$$

C'est la valeur de x que l'on cherchoit, c'est-à-dire, cette suite est égale à $\sqrt{a + by + cyy + dy^3}$, &c.

On trouvera de la même maniere la racine 3e, 4e, 5e, &c. de la même suite.

EXEMPLE IV.

186. TROUVER la racine quarrée de la suite infinie $ay + byy + cy^3 + dy^4 + ey^5$ &c. c'est-à-dire, trouver la suite infinie qui est la valeur de $\sqrt{ay + byy + cy^3 + dy^4 + ey^5 \text{ \&c.}}$ $= \overline{ay + byy + cy^3 + dy^4 + ey^5 \text{ \&c.}}^{\frac{1}{2}}$

Il faut supposer $x = \overline{ay + byy + cy^3 + dy^4 \text{ \&c.}}^{\frac{1}{2}}$ Ainsi quarrant chaque membre, on aura l'équation $xx = ay + byy + cy^3 + dy^4 + ey^5$ &c. & $0 = -xx + ay + byy + cy^3 + dy^4$ &c.

La question se réduit à trouver la valeur de x dans cette équation, qui soit exprimée par une suite infinie dont les termes n'ayent que les puissances de y. Pour la trouver,

1°. Il faut supposer $x = gy + hyy + iy^3 + ly^4 + py^5$ &c. les coëficiens g, h, i, &c. sont indéterminez.

2°. En quarrant chaque membre, on aura

$$\begin{array}{llll} xx = gygy + 2ghy^3 + 2giy^4 + 2gly^5 + 2gpy^6 & & & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + hhy^4 + 2hiy^5 + 2hly^6 & \text{\&c.} & & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 2iiy^6 & & & \end{array}$$

On peut mettre un des y de chaque terme parmi les coëficiens, afin que les puissances y, yy, y^3, y^4, &c. servent à distinguer les termes; & l'on aura

$$\begin{array}{l} xx = gygy + 2gyhyy + 2gyiy^3 + 2gyly^4 + 2gypy^5 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + yhhy^3 + 2yhiy^4 + 2yhly^5 \text{ \&c.} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + yiiy^5 \end{array}$$

Il faut substituer cette valeur de xx à la place de xx dans l'équation proposée $0 = -xx + ay + byy + cy^3$ &c. & l'on aura l'équation qui suit.

$$0 = \left\{ \begin{array}{l} -xx = -gygy - 2gyhyy - 2gyiy^3 - 2gyly^4 - 2gypy^5 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - yhhy^3 - 2yhiy^4 - 2yhly^5 \text{ \&c.} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - yiiy^5 \\ + ay + byy + cy^3 \text{ \&c.} = + ay + byy + cy^3 + dy^4 + ey^5 \text{ \&c.} \end{array} \right.$$

3°. Il faut supposer chaque terme égal à zero, ce qui donnera les équations particulieres dont on a besoin pour déterminer les coëficiens indéterminez g, h, i, &c.

Par

Par la premiere $gyg = a$, on aura $g \times y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$, & $g = a^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}}$; Et $gy = a^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$. En substituant cette valeur de gy dans la 2^e^ $2gyh = b$, on trouvera $h = + \frac{1b}{2a^{\frac{1}{2}}} y^{-\frac{1}{2}}$.

En substituant les valeurs de gy & de h dans la 3^e^ $2gyi = c - yhh$, on trouvera $i = - \frac{bb}{8a^{\frac{3}{2}}} y^{-\frac{1}{2}} + \frac{c}{2a^{\frac{1}{2}}} y^{-\frac{1}{2}}$.

Substituant les valeurs de gy, de h & de i dans la 4^e^ $2gyl = -2yhi + d$, on trouvera $l = + \frac{b^3}{16a^{\frac{5}{2}}} y^{-\frac{1}{2}} - \frac{bc}{4a^{\frac{3}{2}}} y^{-\frac{1}{2}} + \frac{d}{2a^{\frac{1}{2}}} y^{-\frac{1}{2}}$. Substituant les valeurs de gy, h, i, l, dans la cinquiéme $2gyp = -2yhl - yii + e$, on trouvera $p = - \frac{5b^4}{128a^{\frac{7}{2}}} y^{-\frac{1}{2}} + \frac{3bbc}{16a^{\frac{5}{2}}} y^{-\frac{1}{2}} - \frac{bd}{4a^{\frac{3}{2}}} y^{-\frac{1}{2}} - \frac{cc}{8a^{\frac{3}{2}}} y^{-\frac{1}{2}} + \frac{e}{2a^{\frac{1}{2}}} y^{-\frac{1}{2}}$.

4°. Il faut substituer ces valeurs de gy, h, i, l, p, dans l'équation $x = gy + hyy + iy^3$ &c. & l'on aura $x = \sqrt{ay + byy + cy^3 + dy^4 + ey^5} \text{ \&c.} =$

$$a^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} + \frac{b}{2 \times a^{\frac{1}{2}}} y^{\frac{3}{2}} - \frac{bb}{8 \times a^{\frac{3}{2}}} y^{\frac{5}{2}} + \frac{b^3}{16 \times a^{\frac{5}{2}}} y^{\frac{7}{2}} - \frac{5b^4}{128 \times a^{\frac{7}{2}}} y^{\frac{9}{2}} \text{ \&c.}$$
$$+ \frac{c}{2 \times a^{\frac{1}{2}}} y^{\frac{5}{2}} - \frac{bc}{4 \times a^{\frac{3}{2}}} y^{\frac{7}{2}} + \frac{3bbc}{16 \times a^{\frac{5}{2}}} y^{\frac{9}{2}}$$
$$+ \frac{d}{2 \times a^{\frac{1}{2}}} y^{\frac{7}{2}} - \frac{bd}{4 \times a^{\frac{3}{2}}} y^{\frac{9}{2}}$$
$$- \frac{cc}{8 \times a^{\frac{3}{2}}} y^{\frac{9}{2}}$$
$$+ \frac{e}{2 \times a^{\frac{1}{2}}} y^{\frac{9}{2}}$$

C'est la racine quarrée de la suite $ay + byy + cy^3$ &c. que l'on cherchoit.

On trouvera de la même maniere les racines 3e, 4e, 5e, 6e, &c. de la même suite.

AVERTISSEMENT.

ON peut trouver une formule generale, par le moyen de laquelle on aura tout d'un coup, par la simple substitution, les racines qu'on voudra de la somme ou de la difference de deux grandeurs; les racines qu'on voudra de la somme de trois, de quatre, de cinq, de six grandeurs, &c. & enfin les racines qu'on voudra d'une suite infinie de grandeurs. On pourra aussi par le moyen de la même formule, élever la somme de deux, trois, quatre grandeurs, &c. & une suite infinie de grandeurs à une puissance quelconque; ce qui abregera de beaucoup le calcul de cette méthode, dans la résolution des équations ausquelles on pourra l'appliquer.

On fera ici une digression, où l'on mettra tous les principes qui servent à trouver & à démontrer cette formule generale, à cause de sa grande utilité, sans rien supposer que le seul calcul de l'Algebre.

SECTION III.

Qui contient les principes qui servent à démontrer les suites des differens ordres, & les usages de ces suites pour trouver une formule generale pour la formation des puissances, & pour l'extraction des racines quelconques.

DEFINITION I.

187. L'ON a nommé dans la Section précedente *une suite*, la somme de tous les termes qui vont à l'infini, qui est la valeur approchée de la racine d'une équation; & une suite en general est la somme d'un nombre de grandeurs jointes ensemble par les signes + ou —, ou par tous les deux, lequel nombre de grandeurs va à l'infini. Il y a de ces suites dont tous les termes ont quelque raport les uns aux autres: il y en a d'autres où cela ne se rencontre pas.

Les suites que l'on va expliquer ici, sont plusieurs suites de la premiere sorte, & qui de plus sont dépendantes les

unes des autres : la premiere eſt ſuppoſée avoir une certaine proprieté qu'on expliquera ; la ſeconde eſt formée par l'addition faite par ordre des termes de la premiere ; la troiſiéme, par l'addition faite par ordre des termes de la ſeconde ; la quatriéme, par l'addition faite par ordre des termes de la troiſiéme ; & ainſi de ſuite à l'infini.

Comme ces ſuites contiennent les proprietez generales des ſuites des nombres, qu'on appelle de *differens ordres*, ſçavoir du premier ordre, du ſecond ordre, du troiſiéme ordre, &c. & qu'on fera l'application des proprietez de ces ſuites generales aux ſuites des nombres de differens ordres ; on peut auſſi les nommer *les ſuites des differens ordres.*

Les ſuites generales des differens ordres.

1re.	2e.	3e.	4e.	5e.	6e.	7e.
a	g	m	v	&c.		
b	h	p	x			
c	i	q	y			
d	k	r	z			
f	l	t	ζ			

Demandes ou ſuppoſitions ſur ces ſuites.

I.

188. LES grandeurs repréſentées en general par les lettres de chaque colonne, font ce qu'on appelle une ſuite, par exemple $a, b, c, d, f,$ ſont les grandeurs de la premiere ſuite ; $g, h, i, k, l,$ ſont les grandeurs de la ſeconde ſuite ; & ainſi des autres : on peut concevoir que chaque colonne va à l'infini.

La proprieté de la premiere ſuite eſt que la ſomme d'autant de termes qu'on voudra prendre dans cette ſuite depuis le premier a compris, eſt au produit du nombre des termes de cette ſomme, par le terme qui ſuit immédiatement le

dernier terme de cette même ſomme, comme l'unité eſt à une grandeur donnée e, qu'on appellera l'expoſant de cette ſuite ; par exemple, $a+b+c+d \,.\, 4f :: 1 \,.\, e$; d'où il ſuit que $a+b+c+d=\frac{4f}{e}$.

Ainſi la proprieté de cette premiere ſuite peut auſſi s'exprimer de cette maniere : La ſomme d'autant de termes qu'on voudra depuis le premier a compris, eſt égale au produit du terme f qui ſuit immédiatement le dernier terme d de cette ſomme, par le nombre des termes 4 de la même ſomme, diviſé par la grandeur déterminée e, qui eſt l'expoſant de la premiere ſuite $a+b+c+d=\frac{4f}{e}$, de même $a+b+c=\frac{3d}{e}$, $a+b=\frac{2c}{e}$, $a=\frac{1b}{e}$.

II.

189. Dans chaque autre ſuite, c'eſt-à-dire dans la 2e, la 3e, la 4e, &c. le premier terme eſt toujours égal au premier terme de la ſuite qui la précede immédiatement ; le ſecond terme eſt égal à la ſomme des deux premiers termes de la ſuite qui la précede immédiatement ; le troiſiéme terme eſt égal à la ſomme des trois premiers termes de la ſuite qui la précede ; & ainſi de ſuite.

Dans la ſeconde ſuite $g=a$, $h=a+b$, $i=a+b+c$, $k=a+b+c+d$ &c.

Dans la troiſiéme $m=g$, $p=g+h$, $q=g+h+i$ &c. il en eſt de même des autres ſuites ſuivantes, dont il faut concevoir que le nombre en va à l'infini.

Premiere propoſition ſur les ſuites, qui en contient la proprieté.

190. DANS chaque ſuite la ſomme d'autant de termes qu'on voudra, depuis le premier compris, eſt égal au produit du nombre des termes de cette ſomme, par le terme qui ſuit le dernier terme de la même ſomme, diviſé par une grandeur donnée qu'on appellera *l'expoſant de cette ſuite*, lequel expoſant eſt toujours l'expoſant e de la premiere ſuite, augmenté de l'unité dans la ſeconde ſuite, augmenté de deux unitez dans la troiſiéme, de trois unitez dans la quatriéme ; & ainſi de ſuite.

Soit la ſomme de tant de termes qu'on voudra de chaque ſuite $= s$.

Le nombre des termes de la ſomme ſoit $= n$; & comme on n'en prend que quatre pour ſervir d'exemple, $4 = n$.

Le terme qui ſuit le dernier de la ſeconde ſuite eſt l, celui de la troiſiéme eſt t, de la quatriéme ζ, &c.

Ainſi la proprieté de la ſeconde ſuite eſt $s = l \times \frac{n}{e+1}$.

La proprieté de la troiſiéme ſuite eſt $s = t \times \frac{n}{e+2}$.

La proprieté de la quatriéme ſuite eſt $s = \zeta \times \frac{n}{e+3}$.

Et ainſi des autres ſuivantes à l'infini.

Démonſtration de la ſeconde ſuite.

Il faut démontrer que $g + h + i + k = s = l \times \frac{n}{e+1}$:

Par la 1re ſuppoſ. $d + c + b + a = f \times \frac{n}{e} = k$ par la 2e ſup.

Par la 1re ſuppoſ. $c + b + a = d \times \frac{n-1}{e} = i$ par la 2e ſup.

Par la 1re ſuppoſ. $b + a = c \times \frac{n-2}{e} = h$ par la 2e ſup.

Par la 1re ſuppoſ. $+ a = b \times \frac{n-3}{e} = g$ par la 2e ſup.

il eſt évident que $o = a \times \frac{n-n}{e} = o$.

Donc $\frac{nf}{e} + \frac{nd}{e} - \frac{1d}{e} + \frac{nc}{e} - \frac{2c}{e} + \frac{nb}{e} - \frac{3b}{e} + \frac{na}{e} - \frac{na}{e} = k + i + h + g + o$; ou, ce qui eſt la même choſe, $\frac{n}{e} \times \overline{f + d + c + b + a} - \frac{1d}{e} - \frac{2c}{e} - \frac{3b}{e} - \frac{na}{e} = k + i + h + g + o$.

Mais, 1°, puiſque par la ſeconde ſuppoſition $f + d + c + b + a = l$, l'on aura $\frac{n}{e} \times \overline{f + d + c + b + a} = \frac{n}{e} \times l$.

2°. n étant égale à 4 dans notre exemple, on peut diſpoſer les produits négatifs $-\frac{1d}{e} - \frac{2c}{e} - \frac{3b}{e} - \frac{na}{e}$ de la maniere ſuivante,

$$-\frac{1d}{e} - \frac{2c}{e} - \frac{3b}{e} - \frac{na}{e} = \frac{\begin{array}{r} -d-c-b-a \\ -c-b-a \\ -b-a \\ -a \end{array}}{e}$$

Ainſi l'on aura par la ſeconde ſuppoſition

$$-\frac{1d}{e} - \frac{2c}{e} - \frac{3b}{e} - \frac{na}{e} = \frac{\begin{array}{r} -d-c-b-a \\ -c-b-a \\ -b-a \\ -a \end{array}}{e} = \frac{\begin{array}{r} -k \\ -i \\ -h \\ -g \end{array}}{e}$$

Donc $-\frac{1d}{e} - \frac{2c}{e} - \frac{3b}{e} - \frac{na}{e} = \frac{-k-i-h-g}{e}$.

Mettant à present dans l'égalité $\frac{n}{e} \times \overline{f+d+c+b+a} - \frac{1d}{e} - \frac{2c}{e} - \frac{3b}{e} - \frac{na}{e} = k+i+h+g+o$, $\frac{n}{e} \times l$ à la place de $\frac{n}{e} \times \overline{f+d+c+b+a}$, & $\frac{-k-i-h-g}{e}$ à la place de $-\frac{1d}{e} - \frac{2c}{e} - \frac{3b}{e} - \frac{na}{e}$, on aura $\frac{n}{e} \times l \; \frac{-k-i-h-g}{e} = k+i+h+g+o$; multipliant le tout par e, & transposant, on aura $nl = e \times \overline{k+i+h+g} + 1 \times \overline{k+i+h+g}$; divisant chaque membre par $e+1$, on aura $\frac{n}{e+1} \times l = k+i+h+g$. Ce qu'il falloit démontrer.

Démonstration pour la troisiéme suite.

IL faut démontrer que $s = m+p+q+r = t \times \frac{n}{e+2}$.

Par la démonstr. préced. $k+i+h+g = \frac{n}{e+1} \times l = r$ par la 2e sup.

$$i+h+g = \frac{n-1}{e+1} \times k = q$$

$$h+g = \frac{n-2}{e+1} \times i = p$$

$$+g = \frac{n-3}{e+1} \times h = m$$

il est évident que $o = \frac{n-n}{e+1} \times g = o$.

Donc $\frac{n}{e+1} \times \overline{l+k+i+h+g} - \frac{1k}{e+1} - \frac{2i}{e+1} - \frac{3h}{e+1} - \frac{ng}{e+1} = r+q+p+m$.

Mais, 1°, $\frac{n}{e+1} \times \overline{l+k+i+h+g} = \frac{nt}{e+1}$, puisque $t = l+k+i+h+g$ par la seconde supposition.

2°. $\frac{-1k-2i-3h-ng}{e+1} = -k-i-h-g = -r$ par la 2e sup.

$$-i-h-g = -q$$

$$-h-g = -p$$

$$-g = -m$$

$$\overline{}\qquad\overline{}$$

$$e+1 \qquad e+1$$

Donc en mettant $\frac{nt}{e+1}$ à la place de $\frac{n}{e+1} \times \overline{l+k+i+h+g}$, & $-\frac{r-q-p-m}{e+1}$ à la place de $-\frac{1k-2i-3h-ng}{e+1}$ dans l'égalité $\frac{n}{e+1} \times \overline{l+k+i+h+g} - \frac{1k-2i-3h-ng}{e+1} = r+q+p+m$, l'on aura $\frac{nt}{e+1} - \frac{r-q-p-m}{e+1} = r+q+p+m$; multipliant le tout par $e+1$, & transposant, on aura $nt = \overline{e+1} \times \overline{r+q+p+m} + 1 \times \overline{r+q+p+m}$; divisant chaque membre par $e+1+1 = e+2$, on trouvera $t \times \frac{n}{e+2} = r+q+p+m$. Ce qu'il falloit démontrer.

Il est évident que la même démonstration peut s'appliquer par ordre à la suite 4e, à la 5e, 6e, &c.

COROLLAIRE I.

191. ON nommera E l'expoſant de chaque ſuite, c'eſt-à-dire, on ſuppoſera que E repréſente e pour la premiere ſuite, $e+1$ pour la ſeconde, $e+2$ pour la troiſiéme, &c. on appellera n le nombre des termes; D le dernier terme; δ le terme qui ſuit le dernier terme; s la ſomme des termes.

$s = \delta \times \frac{n}{E}$ ſera la formule qui ſervira à trouver la ſomme des termes de chaque ſuite. Il n'y aura qu'à ſubſtituer à la place de δ, le terme qui ſuit le dernier terme; à la place de n, le nombre des termes, & à la place de E, l'expoſant de la ſuite, & l'on aura la ſomme des termes de la ſuite.

Pour avoir une ſeconde formule par le moyen du dernier terme D de chaque ſuite, on remarquera que le nombre des termes qui précedent le dernier eſt $n-1$, par conſequent la ſomme des termes moins le dernier, ſera $s - D = D \times \frac{n-1}{E}$. Ajoutant $+D$ à chaque membre, on aura $s = D \times \frac{n-1+E}{E}$. Ainſi $s = D \times \frac{n-1+E}{E}$ ſera la formule qui ſervira à trouver la ſomme des termes de chaque ſuite, lorſqu'on connoîtra le nombre des termes, le dernier terme, & l'expoſant de la ſuite. Il n'y aura qu'à les ſubſtituer à la place des lettres qui les repréſentent dans cette formule.

COROLLAIRE II.

192. EN ſuppoſant que le dernier terme f de la premiere ſuite eſt donné, que le nombre des termes de chacune des ſuites eſt le même qui eſt auſſi donné, & repréſenté par n, & que l'expoſant de la premiere ſuite eſt e, qui eſt auſſi donné; on peut trouver par le moyen de la formule $s = D \times \frac{n-1+E}{E}$, les ſommes de chaque ſuite les unes après les autres, c'eſt-à-dire la valeur de chaque rang perpendiculaire, & en même temps la valeur du dernier rang parallele, ou la ſomme égale à $f+l+t+\zeta$, &c. La même méthode ſervira à trouver tel autre rang parallele que l'on voudra.

1°. Pour avoir la ſomme des termes de la premiere ſuite, il faut ſubſtituer dans la formule $s = D \times \frac{n-1+E}{E}$, f à la place de D; l'expoſant de la premiere ſuite e, à la place de E; & l'on aura pour la ſomme de la premiere ſuite $s = f \times \frac{n-1+e}{e} = l$ par la ſeconde ſuppoſition.

2°. Pour la seconde suite, il faut substituer la somme de la premiere suite $f \times \frac{n-1+e}{e}$, qui est égale au dernier terme l de la seconde suite par la seconde supposition, à la place de D dans la formule $s = D \times \frac{n-1+E}{E}$, & l'exposant $e+1$ de la seconde suite, à la place de E; & l'on aura pour la somme de la seconde suite $s = f \times \frac{n-1+e}{e} \times \frac{n+e}{e+1} = t$ par la seconde supposition.

3°. Pour la troisiéme suite, il faut substituer dans la formule $s = D \times \frac{n-1+E}{E}$, le dernier terme de la troisiéme suite, $t = f \times \frac{n-1+e}{e} \times \frac{n+e}{e+1}$, à la place de D; & l'exposant $e+2$ de la troisiéme suite, à la place de E; & l'on aura pour la somme de la 3e suite $s = f \times \frac{n-1+e}{e} \times \frac{n+e}{e+1} \times \frac{n+1+e}{e+2} = \zeta$.

D'où il est évident qu'en continuant à l'infini la suite $f \times \frac{n-1+e}{e} \times \frac{n+e}{e+1} \times \frac{n+1+e}{e+2} \times \frac{n+2+e}{e+3} \times \frac{n+3+e}{e+4}$ &c. les produits de ses termes pris de suite, donneront tout à la fois & les sommes de chaque suite, & les valeurs des termes du dernier rang parallele f, l, t, ζ, &c.

Comme le nombre des termes est représénté en general par n, en substituant au lieu de n tel nombre de termes qu'on voudra, & à la place de f le dernier terme de la premiere suite qui répond à ce nombre, l'on aura par le moyen de cette suite les sommes de tant de termes qu'on voudra de chaque suite, & les valeurs des termes de tel rang parallele qu'on voudra.

Seconde disposition des suites.

SUITES.

1re.	2e.	3e.	4e.	5e.	6e.
a	g	o	o	o	o
b	h	m	o	o	o
c	i	p	s	o	o
d	k	q	t	x	o
f	l	r	v	y	z

Troisiéme

Troisiéme supposition.

193. LES mêmes suites peuvent être disposées comme on les voit ici. Le premier terme de la troisiéme suite est à côté du second terme de la seconde; le second terme de la troisiéme suite est à côté du troisiéme terme de la seconde, &c. le premier terme de la quatriéme suite est à côté du second terme de la troisiéme; le second terme de la quatriéme suite est à côté du troisiéme terme de la troisiéme suite, &c. & ainsi des suites 5e, 6e, &c.

Le nombre des termes de la premiere & de la seconde suite est égal; dans la troisiéme il est moindre d'une unité; dans la quatriéme, il est moindre de deux unitez; dans la cinquiéme, de trois unitez; & ainsi de suite.

Nommant n le nombre des termes de la premiere & de la seconde suite, $n - 1$ est le nombre des termes de la troisiéme; $n - 2$ est le nombre des termes de la quatriéme; $n - 3$ de la cinquiéme, &c.

On nommera, comme ci-dessus, le dernier terme de chaque suite D; le terme qui suit le dernier δ; l'exposant de chaque suite E; & le dernier terme de la premiere suite f, qu'on suppose donné, avec son exposant e.

Seconde proposition sur les suites, qui enseigne à trouver les valeurs des termes f, l, r, v, y, z, &c. *du dernier rang parallele, ou de tel autre rang parallele qu'on voudra.*

194. ON se servira de la formule $s = D \times \frac{n-1+E}{E}$ pour trouver la valeur du dernier terme de la seconde suite, & de la formule $s = \delta \times \frac{n}{E}$ pour trouver les derniers termes de la 3e, 4e, 5e, suites, &c.

1°. Pour la seconde suite, le nombre des termes est n; le dernier terme l qu'on cherche, est égal à la somme des termes de la premiere suite. On aura la somme des termes de la premiere suite, en substituant dans $s = D \times \frac{n-1+E}{E}$, f à la place de D, & e à la place de E; ainsi $l = f \times \frac{n-1+e}{e}$.

2°. Pour la troisiéme suite, le nombre des termes est $n - 1$; le dernier terme r est égal à la somme des termes de la seconde suite, moins le dernier terme qui en est exclu. Ainsi il faut trouver la somme des termes de la 2e suite; le nombre des termes étant $n - 1$, le terme qui suit le dernier étant $l = f \times \frac{n-1+e}{e}$, & l'exposant de la 2e suite étant $e + 1$.

Il eſt évident qu'il ne faut pour cela que ſubſtituer dans la formule $s = \delta \times \frac{n}{E}$, $f \times \frac{n-1+e}{e}$, à la place de δ; $n-1$ à la place de n, & $e+1$ à la place de E; & l'on aura $r = f \times \frac{n-1+e}{e} \times \frac{n-1}{e+1}$.

3°. Dans la quatriéme ſuite, le nombre des termes eſt $n-2$; le dernier terme eſt égal à la ſomme des termes de la troiſiéme ſuite, moins le dernier terme r qui en eſt exclu, & qui eſt égal à $f \times \frac{n-1+e}{e} \times \frac{n-1}{e+1}$.

Pour trouver le dernier terme v égal à la ſomme $m+p+q$, il eſt évident qu'il ne faut que ſubſtituer dans $s = \delta \times \frac{n}{E}$, $f \times \frac{n-1+e}{e} \times \frac{n-1}{e+1}$ à la place de δ; $n-2$ à la place de n; & l'expoſant $e+2$ de la troiſiéme ſuite, à la place de E; & l'on aura $v = f \times \frac{n-1+e}{e} \times \frac{n-1}{e+1} \times \frac{n-2}{e+2}$.

D'où il eſt évident qu'en continuant à l'infini la ſuite $f \times \frac{n-1+e}{e} \times \frac{n-1}{e+1} \times \frac{n-2}{e+2} \times \frac{n-3}{e+3} \times \frac{n-4}{e+4}$, &c. les produits de ſes termes pris de ſuite, donneront par ordre les uns après les autres, les valeurs des termes du dernier rang parallele de la ſeconde diſpoſition des ſuites f, l, r, v, y, z, &c.

Mais n repréſentant en general tel nombre de termes qu'on voudra, en ſubſtituant dans cette ſuite le nombre qu'on voudra à la place de n, & le dernier terme de la premiere ſuite qui répond à ce nombre de termes, à la place de f, l'on aura par cette ſuite les valeurs des termes de tel rang parallele qu'on voudra.

Application de ce qu'on vient de démontrer des ſuites en general, aux ſuites des nombres des differens ordres.

NOMBRES DES DIFFERENS ORDRES.

Unitez ou 1re ſuite.	*1. ordre, 2e ſuite.*	*2e ordre, 3e ſuite.*	*3e ordre, 4e ſuite.*	*4e ordre, 5e ſuite.*	*5e ordre, 6e ſuite.*	*6e ordre, 7e ſuite.*
1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7
1	3	6	10	15	21	28
1	4	10	20	35	56	84
1	5	15	35	70	126	210

Quatrième ſuppoſition.

195. LA premiere colonne contient les unitez, ainſi chaque terme n'eſt que l'unité, & la ſomme des termes eſt égale au nombre des termes; par exemple, la ſomme de cinq unitez eſt égale au nombre des termes 5. Et de plus, la ſomme d'autant de termes, c'eſt-à-dire, d'autant d'unitez qu'on voudra, par exemple 4, qui eſt la ſomme de quatre termes, eſt au produit du nombre des termes de cette ſomme par le terme qui ſuit le dernier qui eſt 1, lequel produit eſt 4, comme l'unité eſt à l'unité, c'eſt-à-dire, à une grandeur donnée; ainſi 1 eſt l'expoſant de la ſuite des unitez. Ou bien, ce qui eſt la même choſe, la ſomme d'autant de termes qu'on voudra; par exemple, la ſomme 4 de quatre termes eſt égale au produit du nombre des termes de cette ſomme, lequel nombre eſt 4, par le terme 1 qui ſuit le dernier, diviſé par l'expoſant 1 de la ſuite des unitez, car $4 = \frac{4 \times 1}{1}$.

Ainſi nommant n le nombre des termes, s leur ſomme, l'on aura $s . n \times 1 :: 1 . 1$; ou bien $s = \frac{n}{1}$.

Les nombres du premier ordre ſont formez par l'addition faite de ſuite des unitez, & ce ſont les nombres naturels; le premier 1 eſt égal au premier 1 de la ſuite des unitez; le ſecond 2 eſt égal à la ſomme des deux premiers termes de la ſuite des unitez $2 = 1 + 1$; le troiſiéme 3 eſt égal à la ſuite des trois premiers termes de la ſuite des unitez $3 = 1 + 1 + 1$, & ainſi de ſuite.

Les nombres du ſecond ordre ſont formez de la même maniere par l'addition faite de ſuite des nombres du premier ordre.

Les nombres du troiſiéme ordre ſont formez par l'addition faite de ſuite des nombres du ſecond ordre; & ainſi des autres ordres.

COROLLAIRE I.

196. IL eſt évident que les proprietez qu'on a démontrées des ſuites en general, conviennent à ces ſuites des nombres des differens ordres. Ainſi, 1°. l'expoſant des unitez étant 1, l'expoſant du premier ordre eſt $1 + 1 = 2$; celui du ſecond eſt $2 + 1 = 3$; celui du troiſiéme eſt $3 + 1 = 4$; & ainſi des autres.

2°. En nommant le nombre des termes de chaque ſuite n,

leur ſomme s, le dernier terme D, celui qui ſuit le dernier terme δ, l'expoſant de chaque ſuite E, l'on aura ces deux formules pour trouver la ſomme des termes dans chaque ſuite, $s = \delta \times \frac{n}{E}$, $s = D \times \frac{n-1+E}{E}$.

En ſubſtituant dans laquelle on voudra de ces deux formules le dernier terme 1 de la premiere ſuite, ou le terme 1 qui ſuit le dernier, à la place de δ ou de D, & l'expoſant 1 à la place de E, l'on aura pour la ſomme de la ſuite des unitez $s = 1 \times \frac{n}{1} = 5$, qui eſt le dernier terme de la ſeconde par la quatriéme ſuppoſition.

En ſubſtituant dans la ſeconde formule $s = D \times \frac{n-1+E}{E}$, le dernier terme du premier ordre, marqué en general par $1 \times \frac{n}{1}$, à la place de D, & l'expoſant 2 du premier ordre à la place de E, on aura pour la ſomme des termes du premier ordre $s = 1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}$ égale, par la quatriéme ſuppoſition, au dernier terme 15 du ſecond ordre.

En ſubſtituant dans la même formule $s = D \times \frac{n-1+E}{E}$, le dernier terme $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}$ du ſecond ordre qu'on vient de trouver à la place de D, & l'expoſant 3 du ſecond ordre à la place de E, on aura pour la ſomme des termes du ſecond ordre $s = 1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$ égale au dernier terme 35 du troiſiéme ordre par la quatriéme ſuppoſition.

En ſubſtituant de même dans $s = D \times \frac{n-1+E}{E}$, le dernier terme $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$ du troiſiéme ordre qu'on vient de trouver, à la place de D, & l'expoſant 4 du troiſiéme ordre à la place de E, on aura pour la ſomme du troiſiéme ordre $s = 1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \times \frac{n+3}{4}$ égale, par la quatriéme ſuppoſition, au dernier terme 70 du quatriéme ordre.

D'où il eſt évident qu'en continuant à l'infini la ſuite $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \times \frac{n+3}{4} \times \frac{n+4}{5} \times \frac{n+5}{6}$, &c. les produits des grandeurs qui la compoſent, pris de ſuite depuis la premiere 1, donneront en même temps par ordre les ſommes des ſuites, & les termes du dernier rang parallele.

Et comme n repréſente en general le nombre de termes qu'on voudra, en ſubſtituant dans cette ſuite le nombre de termes qu'on voudra à la place de n, l'on aura les valeurs des ſommes de tant de termes qu'on voudra de chaque ſuite, & les valeurs des termes de quel rang parallele on voudra.

Seconde diſpoſition des nombres des differens ordres.

Unitez ou 1re ſuite.	*1. ordre, 2e ſuite.*	*2e ordre, 3e ſuite.*	*3e ordre, 4e ſuite.*	*4e ordre, 5e ſuite.*	*5e ordre, 6e ſuite.*
1	1	0	0	0	0
1	2	1	0	0	0
1	3	3	1	0	0
1	4	6	4	1	0
1	5	10	10	5	1

197. Cette diſpoſition eſt la même que la ſeconde diſpoſition des ſuites generales; ainſi la troiſiéme ſuppoſition & la ſeconde propoſition, doivent être appliquées à cette ſeconde diſpoſition.

COROLLAIRE II.

198. PAR conſequent on peut trouver par le moyen des formules $s = \mathcal{A} \times \frac{n}{E}$, & $s = D \times \frac{n-1+E}{E}$, les valeurs des termes du dernier rang parallele, ou de tel autre rang parallele qu'on voudra.

1°. Le terme de chaque rang de la ſuite des unitez étant toujours 1, pour avoir le dernier terme de la ſeconde ſuite ou du premier ordre qui eſt toujours égal à la ſomme des termes de la premiere ſuite ou des unitez, il faut ſubſtituer dans $s = D \times \frac{n-1+E}{E}$, 1 à la place de D, l'expoſant de la premiere ſuite 1 à la place de E; & l'on aura pour la ſomme des unitez, ou, ce qui eſt la même choſe, pour la valeur du dernier terme du premier ordre, $s = 1 \times \frac{n}{1}$.

2°. Dans le ſecond ordre ou dans la troiſiéme ſuite, le nombre des termes eſt moindre d'une unité que celui de la ſuite précedente, ainſi c'eſt $n - 1$. Le dernier terme de la troiſiéme ſuite eſt égal à la ſomme des termes de la ſeconde moins le dernier terme de la ſeconde qui eſt exclu de cette ſomme : on vient de trouver que le dernier terme de la ſeconde eſt $1 \times \frac{n}{1}$. Ainſi pour avoir le dernier terme de la troiſiéme ſuite, il faut trouver la ſomme de la ſeconde ſuite

dont on connoît le nombre des termes $n-1$, le terme $1\times\frac{n}{1}$ qui suit le dernier terme, & l'exposant qui est 2. Il n'y a qu'à substituer dans la formule $s = \delta \times \frac{n}{E}$, $1\times\frac{n}{1}$ à la place de δ, $n-1$ à la place de n, & 2 à la place de E; & l'on aura pour la valeur du dernier terme de la troisiéme suite $1\times\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}$.

3°. Dans le troisiéme ordre on trouvera, par un semblable raisonnement, que le dernier terme du troisiéme ordre est égal à la somme du second ordre moins son dernier terme qui est $1\times\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}$; que le nombre des termes est $n-2$; & que l'exposant du troisiéme ordre est 3. Ainsi en substituant dans $s = \delta \times \frac{n}{E}$, $1\times\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}$ à la place de δ, $n-2$ à la place de n, & 3 à la place de E, on trouvera que le dernier terme de la quatriéme suite ou du troisiéme ordre est $1\times\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}$.

Formule generale, qu'il faut bien remarquer pour la suite.

199. D'OU il est évident qu'en continuant à l'infini la suite $1\times\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}\times\frac{n-3}{4}\times\frac{n-4}{5}\times\frac{n-5}{6}\times\frac{n-6}{7}$, &c. les produits de toutes les grandeurs qui la composent pris de suite depuis la premiere 1, donneront par ordre tous les termes du rang parallele, par exemple du dernier 1, 5, 10, 10, 5, 1, en substituant le nombre des termes 5 à la place de n.

Et comme le nombre des termes marqué en general par n, représente tel nombre des termes qu'on voudra, il est évident qu'en mettant à la place de n tel nombre qu'on voudra, on aura de suite les valeurs des termes de tel rang parallele des suites qu'on voudra; & que cette suite est une formule generale pour les trouver tous.

AVERTISSEMENT.

ON peut concevoir d'autres dispositions des suites generales des differens ordres, & des suites des nombres de differens ordres, que celle qu'on a mise la seconde; & même on peut concevoir d'autres suites qui naîtroient de ces suites par la multiplication faite par ordre de chaque terme d'une suite par lui-même, ou par le terme qui le précede ou qui le suit immédiatement dans la même suite, ou qui s'en pour-

roient former de beaucoup d'autres manieres, qui peuvent avoir plusieurs usages : mais comme l'on n'a besoin ici que de ce qu'on a démontré de ces suites dans leur premiere & dans leur seconde disposition, il est inutile de prolonger cette digression de ces autres suites.

100. *Application de la formule generale* $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} \times \frac{n-4}{5} \times \frac{n-5}{6}$, &c. *à la formation des puissances de la somme ou de la difference de deux grandeurs représentées par* a + b, *ou* a — b.

Table de la formation ordinaire des puissances de la somme ou de la difference de deux grandeurs représentées par $a+b$, ou $a-b$.

$1a$	$+1b$					
$1aa$	$+2ab$	$+1bb$	2e puissance.			
$1a^3$	$+3aab$	$+3abb$	$+1b^3$	3e puissance.		
$1a^4$	$+4a^3b$	$+6aabb$	$+4ab^3$	$+1b^4$	4e puissance.	
$1a^5$	$+5a^4b$	$+10a^3bb$	$+10aab^3$	$+5ab^4$	$+1b^5$	5e puissance.

Il n'y a qu'à mettre pour les puissances de $a-b$, le signe — devant tous les termes pairs dans lesquels les dimensions de b sont en nombre impair, c'est-à-dire devant les seconds, les quatriémes, les sixiémes termes, &c.

REMARQUE.

101. SI l'on se rend familiere la formation ordinaire des puissances de deux grandeurs $a+b$, ou $a-b$, on verra clairement, 1°. que les puissances de a sont seules sans b dans le premier terme ; que la puissance de a diminue par ordre dans chaque terme qui suit le premier, d'un degré ; & que b est toujours lineaire dans le second terme, & augmente par ordre dans chaque terme suivant, d'un degré.

Ainsi supposant que l'exposant de chaque puissance à laquelle on peut élever $a+b$, ou $a-b$, est représenté en general par n, les produits des lettres a & b dans chaque terme seront par ordre a^n, $a^{n-1}b$, $a^{n-2}bb$, $a^{n-3}b^3$, $a^{n-4}b^4$, &c.

2°. On verra clairement que les nombres qui ſont les coëficiens des termes de chaque puiſſance, par exemple 1, 2, 1, de la ſeconde; 1, 3, 3, 1, de la troiſiéme; 1, 4, 6, 4, 1, de la quatriéme; 1, 5, 10, 10, 5, 1, de la cinquiéme, &c. ſont exactement les termes de chaque rang perallele de la ſeconde diſpoſition des ſuites des nombres des differens ordres, & que l'expoſant du degré de chaque puiſſance, par exemple, l'expoſant 2 de la ſeconde, l'expoſant 3 de la troiſiéme, &c. eſt exactement le nombre des termes qui déſigne le rang parallele qu'il faut prendre pour avoir les coëficiens de la ſeconde puiſſance, de la troiſiéme, de la quatriéme, &c.

COROLLAIRE.

202. PAR conſequent n repréſentant ce nombre des termes dans la formule $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$, &c. qui ſert à trouver les termes de chaque rang parallele, n repréſente auſſi le degré de la puiſſance, puiſque le degré de la puiſſance eſt égal au nombre des termes.

Ainſi pour élever $a+b$ à quelque puiſſance que ce puiſſe être, repréſentée en general par n, le coëficient du premier terme de la puiſſance $\overline{a+b}^n$ ſera égal à 1, le ſecond à $1 \times \frac{n}{1}$, le troiſiéme à $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}$; le quatriéme, $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$; le cinquiéme, $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4}$; & ainſi de ſuite: ce qui donne la formule generale ſuivante.

Formule generale pour élever la ſomme ou la difference de deux grandeurs a+b, *ou* a−b *à une puiſſance quelconque.*

203. $\overline{a+b}^n = 1a^n + 1 \times \frac{n}{1} a^{n-1}b + 1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} a^{n-2}bb + 1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} a^{n-3}b^3 + 1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} a^{n-4}b^4 + 1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} \times \frac{n-4}{5} a^{n-5}b^5$; & ainſi à l'infini.

Il n'y a qu'à mettre le ſigne − devant tous les termes pairs, le ſecond, le quatriéme, le ſixiéme, &c. & l'on aura la formule de $\overline{a-b}^n$.

On peut négliger l'unité par où commence chaque coëficient, l'unité n'apportant aucun changement dans les produits.

On élevera par le moyen de cette formule generale, la ſomme ou la difference de deux grandeurs à telle puiſſance qu'on voudra, par exemple, à la ſeconde puiſſance dont l'expoſant

l'exposant est 2, à la troisiéme dont l'exposant est 3, &c. en substituant dans la formule l'exposant de cette puissance à la place de n, & la premiere grandeur à la place de a, & la seconde à la place de b; & l'on aura la puissance que l'on cherche.

204. Quoique la formule soit infinie, elle donne pourtant la puissance finie de la somme ou de la difference de deux grandeurs; parceque tous les termes infinis de la formule qui suivent ceux qui ont servi à trouver la puissance que l'on cherchoit, deviennent égaux à zero, chacun contenant parmi ses coëficiens une grandeur égale à zero. Par exemple, quand on éleve par la formule, $a+b$ à la troisiéme puissance, après avoir trouvé par les quatre premiers termes de la formule, la puissance de $a^3+3aab+3abb+b^3$, le cinquiéme terme & les autres suivans, contiennent tous parmi leurs coëficiens la grandeur $n-3=0$, qui rend tous ces termes égaux à zero; puisqu'une grandeur étant multipliée par zero, le produit est zero.

COROLLAIRE.

205. SI l'on se rend familiere la formation des puissances de trois grandeurs $a+b+c$; de quatre grandeurs $a+b+c+d$; de cinq grandeurs, $a+b+c+d+e$, & ainsi à l'infini, on verra clairement que dans chaque puissance, par exemple dans la quatriéme, la quatriéme puissance des deux premiers termes, qui est $a^4+4a^3b+6aabb+4ab^3+b^4$, peut servir de formule particuliere pour trouver tous les termes de la quatriéme puissance de $a+b+c$, de $a+b+c+d$, de $a+b+c+d+e$, &c.

Car après avoir trouvé la quatriéme puissance des deux premiers termes $a+b$, il n'y a qu'à supposer que les deux premiers termes $a+b$ sont représentez par a, & le troisiéme c par b; & supposant que a^4 dans la formule particuliere $a^4+4a^3b+6aabb+4ab^3+b^4$, représente la quatriéme puissance de $a+b$ déja trouvée, le second terme $4a^3b$ marquera qu'il faut prendre quatre fois la troisiéme puissance de $a+b$ représentée par a^3, & la multiplier par c représentée par b; le troisiéme $6aabb$ marquera qu'il faut prendre six fois la seconde puissance de $a+b$ représentée

par aa, & la multiplier par la ſeconde puiſſance de c repréſentée par bb; & ainſi de ſuite.

Après avoir ainſi trouvé la quatriéme puiſſance de $a+b+c$, il faut ſuppoſer $a+b+c$ repréſentée par a, & la 4e grandeur d repréſentée par b; & que la quatriéme puiſſance de $a+b+c$ eſt repréſentée dans la formule particuliere par a^4, le ſecond terme $4a^3b$ marquera qu'il faut prendre quatre fois la troiſiéme puiſſance de $a+b+c$ repréſentée par a^3, & la multiplier par d repréſentée par b. Le troiſiéme terme $6aabb$ marquera qu'il faut prendre ſix fois la ſeconde puiſſance de $a+b+c$ repréſentée par aa, & la multiplier par la ſeconde puiſſance de d repréſentée par bb; & ainſi à l'infini.

Il en eſt de même de toutes les autres puiſſances.

Or comme chaque puiſſance particuliere de deux grandeurs $a+b$ ſert de formule particuliere pour trouver la même puiſſance de trois grandeurs, de quatre, de cinq, de ſix, & ainſi à l'infini, de même la formule generale $a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} a^{n-2}b^2$, &c. de toutes les puiſſances de deux grandeurs $a+b$, ſert à trouver la formule generale de toutes les puiſſances de tant de grandeurs qu'on voudra, & d'une ſuite infinie de grandeurs. Et comme il ſuffit de ſe rendre bien familieres les formations particulieres des puiſſances de deux grandeurs, pour trouver par ces puiſſances de deux grandeurs les mêmes puiſſances de trois, de quatre, & d'une ſuite infinie de grandeurs, il ſuffit de même de ſe rendre bien familiere la formation generale de toutes les puiſſances de deux grandeurs, pour trouver ſoi-même la formule generale des puiſſances de trois, de quatre, de cinq grandeurs, & d'une ſuite infinie de grandeurs. Ainſi il ſuffit de mettre ici cette formule generale comme un Corollaire de la formule generale des puiſſances de deux grandeurs, & il eſt inutile d'ajouter un long diſcours pour faire concevoir la formation de cette formule generale.

(Voyez la Table, dont voici le lieu. Art. 206.)

Les formules generales de la Table ſervent à élever une ſuite donnée de grandeurs à telle puiſſance qu'on voudra, en ſubſtituant dans les formules l'expoſant de cette puiſſance à la place de n; la premiere grandeur de la ſuite donnée à

Table pour la page 410, Article 206 de l'Analyse démontrée,

Qui contient les Formules generales pour élever une suite de grandeurs à une puissance quelconque dont l'exposant est representé par la lettre n, *& pour extraire la racine quelconque de la même suite de grandeurs.*

Premiere Formule pour élever la somme de deux grandeurs à une puissance quelconque, & pour en extraire la racine quelconque.

$$\overline{a+b}^{\,n} = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}a^{n-2}bb + \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}a^{n-3}b^3 + \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}\times\frac{n-3}{4}a^{n-4}b^4 + \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}\times\frac{n-3}{4}\times\frac{n-4}{5}a^{n-5}b^5 + \&c.$$

Seconde Formule pour élever une suite de grandeurs $a + by + cyy + dy^3 + \&c.$ à une puissance quelconque, & pour en extraire la racine quelconque.

$$\overline{a+by+cyy+dy^3+ey^4+fy^5\ \&c.}^{\,n} = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}by + \left.\begin{matrix} \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}a^{n-2}bb \\ +\frac{n}{1}a^{n-1}c \end{matrix}\right\}\times yy + \left.\begin{matrix} \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}a^{n-3}b^3 \\ +\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{1}a^{n-2}bc \\ +\frac{n}{1}a^{n-1}d \end{matrix}\right\}\times y^3 + \left.\begin{matrix} \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}\times\frac{n-3}{4}a^{n-4}b^4 \\ +\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{1}\times\frac{n-2}{2}a^{n-3}bbc \\ +\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}a^{n-2}cc \\ +\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{1}a^{n-2}bd \\ +\frac{n}{1}a^{n-1}e \end{matrix}\right\}\times y^4 + \&c.$$

Troisiéme Formule pour élever une suite de grandeurs $ay + byy + cy^3 + dy^4 + \&c.$ à une puissance quelconque, & pour en extraire la racine quelconque.

$$\overline{ay+byy+cy^3+dy^4+ey^5+fy^6+gy^7+hy^8+\&c.}^{\,n} = a^n y^n + \frac{n}{1}a^{n-1}by^{n+1} + \left.\begin{matrix} \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}a^{n-2}bb \\ +\frac{n}{1}a^{n-1}c \end{matrix}\right\}\times y^{n+2} + \left.\begin{matrix} \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}a^{n-3}b^3 \\ +\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{1}a^{n-2}bc \\ +\frac{n}{1}a^{n-1}d \end{matrix}\right\}\times y^{n+3} + \left.\begin{matrix} \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}\times\frac{n-3}{4}a^{n-4}b^4 \\ +\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{1}\times\frac{n-2}{2}a^{n-3}bbc \\ +\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}a^{n-2}cc \\ +\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{1}a^{n-2}bd \\ +\frac{n}{1}a^{n-1}e \end{matrix}\right\}\times y^{n+4}$$

$$+\left.\begin{matrix} \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}\times\frac{n-3}{4}\times\frac{n-4}{5}a^{n-5}b^5 \\ +\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{1}\times\frac{n-2}{2}\times\frac{n-3}{3}a^{n-4}b^3c \\ +\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{1}a^{n-3}bcc \\ +\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{1}\times\frac{n-2}{2}a^{n-3}bbd \\ +\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{1}a^{n-2}cd \\ +\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{1}a^{n-2}be \\ +\frac{n}{1}a^{n-1}f \end{matrix}\right\}\times y^{n+5} + \left.\begin{matrix} \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}\times\frac{n-3}{4}\times\frac{n-4}{5}\times\frac{n-5}{6}a^{n-6}b^6 \\ +\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{1}\times\frac{n-2}{2}\times\frac{n-3}{3}\times\frac{n-4}{4}a^{n-5}b^4c \\ +\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{1}\times\frac{n-3}{2}a^{n-4}bbcc \\ +\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}a^{n-3}c^3 \\ +\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{1}\times\frac{n-2}{2}\times\frac{n-3}{3}a^{n-4}b^3d \\ +\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}a^{n-2}dd \\ +\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{1}\times\frac{n-2}{1}a^{n-3}bcd \\ +\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{1}\times\frac{n-2}{2}a^{n-3}bbe \\ +\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{1}a^{n-2}ce \\ +\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{1}a^{n-2}bf \\ +\frac{n}{1}a^{n-1}g \end{matrix}\right\}\times y^{n+6}$$

$$+\left.\begin{matrix} \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}\times\frac{n-3}{4}\times\frac{n-4}{5}\times\frac{n-5}{6}\times\frac{n-6}{7}a^{n-7}b^7 \\ +\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{1}\times\frac{n-2}{2}\times\frac{n-3}{3}\times\frac{n-4}{4}\times\frac{n-5}{5}a^{n-6}b^5c \\ +\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{1}\times\frac{n-3}{2}\times\frac{n-4}{3}a^{n-5}b^3cc \\ +\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}\times\frac{n-3}{1}a^{n-4}bc^3 \\ +\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{1}\times\frac{n-2}{2}\times\frac{n-3}{3}\times\frac{n-4}{4}a^{n-5}b^4d \\ +\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{1}a^{n-3}bdd \\ +\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{1}\times\frac{n-2}{1}\times\frac{n-3}{2}a^{n-4}bbcd \\ +\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{1}\times\frac{n-2}{2}a^{n-3}ccd \\ +\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{1}\times\frac{n-2}{2}\times\frac{n-3}{3}a^{n-4}b^3e \\ +\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{1}\times\frac{n-2}{1}a^{n-3}bce \\ +\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{1}a^{n-2}de \\ +\frac{\ }{1}\times\frac{n-1}{1}\times\frac{n-2}{2}a^{n-3}bbf \\ +\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{1}a^{n-2}cf \\ +\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{1}a^{n-2}bg \\ +\frac{n}{1}a^{n-1}h \end{matrix}\right\}\times y^{n+7} + \&c.$$

la place de a; la seconde à la place de b, &c. l'inconnue donnée à la place de l'inconnue y, &c.

AVERTISSEMENT.

CES formules generales peuvent servir à élever deux grandeurs, ou une suite infinie de grandeurs, non seulement à une puissance quelconque, dont l'exposant est un nombre entier positif, comme on l'a démontré jusqu'ici, mais encore à une puissance quelconque, dont l'exposant est un nombre entier négatif, & à une puissance quelconque, dont l'exposant est un nombre rompu, soit positif, soit négatif. On va donner une démonstration particuliere pour le cas où l'exposant est un nombre entier négatif, & ensuite on le démontrera par la premiere méthode du second Problême, pour les cas où l'exposant de la puissance est un nombre rompu, positif ou négatif; & on mettra ces derniers cas pour servir de 5e, 6e & de 7e exemples du Problême.

207. Il faut remarquer, comme on l'enseigne dans l'Algebre, que $\frac{1}{a^3}$ se marque ainsi a^{-3}; $\frac{1}{\overline{a+b}^3}$ se marque ainsi $\overline{a+b}^{-3}$; $\frac{\overline{a+b}^3}{\overline{a+c}^4}$ se marque ainsi $\overline{a+b}^3 \times \overline{a+c}^{-4}$; & en general $\frac{1}{\overline{a+b}^n}$ se marque ainsi $\overline{a+b}^{-n}$.

D'où l'on voit qu'un exposant négatif marque que la puissance de la grandeur dont il est l'exposant, est dans le dénominateur d'une fraction.

Il faut aussi remarquer que les incommensurables se marquent comme les puissances, & leurs exposans sont des nombres rompus. Par exemple $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{aa} = a^{\frac{2}{3}}$; $\sqrt[n]{ay} = a^{\frac{1}{n}}y^{\frac{1}{n}}$; $a\sqrt[n]{ay} = a^{\frac{1}{n}+1}y^{\frac{1}{n}}$; $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$; $\frac{1}{\sqrt[n]{a}} = a^{-\frac{1}{n}}$; $\frac{a^m}{\sqrt[n]{a}} = a^{m-\frac{1}{n}}$; $a^m\sqrt[n]{a} = a^{m+\frac{1}{n}}$; & ainsi des autres.

Troisiéme proposition, qui contient les principes ou Problêmes qui servent à démontrer que les formules generales qui précedent s'étendent aux puissances de deux grandeurs, ou d'une suite infinie de grandeurs, dont l'exposant est un nombre entier négatif.

208. POUR trouver la suite infinie, qui est la valeur de $\frac{1}{\overline{a+b}^2}$

$= \overline{a+b}^{-2}$, de $\frac{1}{\overline{a+b}^{3}} = \overline{a+b}^{-3}$, de $\frac{1}{\overline{a+b}^{4}} = \overline{a+b}^{-4}$, &c. il faut faire les operations ſuivantes.

1°. Il faut partager $\overline{a+b}^{2} = aa + 2ab + bb$ en deux grandeurs, dont la premiere eſt $aa + ab$, la ſeconde $ab + bb$.

Il faut de même partager $\overline{a+b}^{3} = a^3 + 3aab + 3abb + b^3$ en $a^3 + 2aab + abb$, & $+ aab + 2abb + b^3$.

Et de même $\overline{a+b}^{4} = a^4 + 4a^3b + 6aabb + 4ab^3 + b^4$ en $a^4 + 3a^3b + 3aabb + ab^3$; & $+ a^3b + 3aabb + 3ab^3 + b^4$; & ainſi des autres puiſſances ſuivantes.

Pour faire ce partage, il faut que la ſeconde partie ou grandeur étant le numerateur d'une fraction, & la premiere le dénominateur, cette fraction ſoit égale à $\frac{b}{a}$; ce qui eſt poſſible dans toutes les puiſſances de $a + b$ ou de $a - b$.

Il faut enſuite diviſer l'unité par $aa + 2ab + bb$ dans la ſeconde puiſſance, par $a^3 + 3aab + 3abb + b^4$ dans la troiſiéme, & ainſi des autres, en prenant pour premiere partie du diviſeur la premiere grandeur, & pour la ſeconde partie du diviſeur la ſeconde grandeur qu'on a déterminées ci-deſſus.

Cette diviſion donnera des quotiens qui auront des termes à l'infini, & tous ces termes ſeront des fractions.

2°. Il faut faire ſur chacune de ces fractions ce qu'on a fait dans la premiere operation, c'eſt-à-dire, diviſer le numerateur par le dénominateur, prenant le ſeul premier terme du dénominateur pour premiere partie du diviſeur, & tous les autres termes du dénominateur pour la ſeconde partie du diviſeur.

Tous les quotiens qu'on trouvera à l'infini de ces ſecondes diviſions, contiendront des termes qui étant ordonnez de ſuite les uns ſous les autres, donneront des ſuites dont on trouvera les ſommes par le moyen des ſuites qu'on a démontrées ci-deſſus.

3°. En trouvant les ſommes de chaque colonne de ces ſuites, par les méthodes des ſuites précedentes, on aura la ſuite infinie qui exprime la puiſſance que l'on cherche.

Ceci s'éclaircira par les operations ſuivantes.

Pour la seconde puissance.

POUR trouver la suite égale à $\frac{1}{\overline{a+b}^2} = \overline{a+b}^{-2} = \frac{1}{aa+2ab+bb}$, 1°, il faut partager le dénominateur ou diviseur $aa+2ab+bb$ en deux parties, dont la premiere est $aa+ab$, la seconde $ab+bb$, de maniere que $\frac{ab+bb}{aa+ab} = \frac{b}{a}$. Il faut diviser 1 par $aa+ab, +ab+bb$, en prenant $aa+ab$ pour la premiere partie du diviseur, & $ab+bb$ pour la seconde.

Grandeur à diviser.

$$1 \left\{ \begin{array}{l} aa+ab, +ab+bb, \text{ diviseur.} \\ \hline \text{quotient.} \\ \frac{1}{aa+ab} - \frac{b}{a^3+aab} + \frac{bb}{a^4+a^3b} - \frac{b^3}{a^5+a^4b} + \frac{b^4}{a^6+a^5b} \text{ \&c.} \end{array} \right.$$

1er reste, $- \cancel{1} \frac{b}{a}$

2e reste, $+ \cancel{1} \frac{bb}{aa}$

3e reste, $- \cancel{1} \frac{b^3}{a^3}$

4e reste, $+ \cancel{1} \frac{b^4}{a^4}$

x Signifie que la grandeur que cette marque précede, est effacée.

En divisant 1 par $aa+ab$, on trouvera le quotient $\frac{1}{aa+ab}$, ensuite il faut multiplier ce quotient par la seconde partie du diviseur, & l'on aura $\frac{ab+bb}{aa+ab} = \frac{b}{a}$; & comme il faut soustraire ce produit de la grandeur à diviser, il faut écrire le premier reste $\frac{b}{a}$ au nombre à diviser avec le signe $-$.

Il faut ensuite diviser ce reste $-\frac{b}{a}$ par la premiere partie du diviseur $aa+ab$, & l'on aura le quotient $-\frac{b}{a^3+aab}$, c'est le second terme du quotient.

Il faut multiplier par ce quotient la seconde partie du diviseur $ab+bb$, & l'on aura $-\frac{abb-b^3}{a^3+aab} = -\frac{bb}{aa}$, qu'il faut ôter de la grandeur à diviser, & l'on aura le 2e reste $+\frac{bb}{aa}$.

En continuant la division, on trouvera un quotient qui aura une infinité de termes, qui sont ceux que l'on voit ici marquez au quotient.

2°. Il faut prendre par ordre chaque terme du quotient, & trouver par la division du numerateur par le dénominateur, la suite infinie qui en est le quotient, c'est-à-dire, qui est la valeur de la fraction qui forme ce terme. On appellera cela réduire chaque terme en la suite infinie qui en est

la valeur. On trouvera, en faisant ces divisions, que le

1er terme $\frac{1}{aa + ab}$ se réduit en $\frac{1}{aa} - \frac{b}{a^3} + \frac{bb}{a^4} - \frac{b^3}{a^5} + \frac{b^4}{a^6} - \frac{b^5}{a^7}$ &c.

le 2e $- \frac{b}{a^3 + aab}$ en $- \frac{b}{a^3} + \frac{bb}{a^4} - \frac{b^3}{a^5} + \frac{b^4}{a^6} - \frac{b^5}{a^7}$ &c.

le 3e $+ \frac{bb}{a^4 + a^3b}$ en $+ \frac{bb}{a^4} - \frac{b^3}{a^5} + \frac{b^4}{a^6} - \frac{b^5}{a^7}$ &c.

le 4e $- \frac{b^3}{a^5 + a^4b}$ en $- \frac{b^3}{a^5} + \frac{b^4}{a^6} - \frac{b^5}{a^7}$ &c.

le 5e $+ \frac{b^4}{a^6 + a^5b}$ en $+ \frac{b^4}{a^6} - \frac{b^5}{a^7}$ &c.

le 6e $- \frac{b^5}{a^7 + a^6b}$ en $- \frac{b^5}{a^7}$ &c.

Ce qu'on peut continuer à l'infini.

En prenant la somme de chaque rang perpendiculaire, on aura $\frac{1}{\overline{a+b}^2} = \overline{a+b}^{-2} = \frac{1}{aa} - \frac{2b}{a^3} + \frac{3bb}{a^4} - \frac{4b^3}{a^5} + \frac{5b^4}{a^6} - \frac{6b^5}{a^7}$ &c. ou, ce qui est la même chose, $1a^{-2} - 2a^{-3}b + 3a^{-4}bb - 4a^{-5}b^3 + 5a^{-6}b^4 - 6a^{-7}b^5$ &c.

Pour la troisiéme puissance.

POUR trouver la suite qui est égale à $\frac{1}{\overline{a+b}^3} = \overline{a+b}^{-3} = \frac{1}{a^3 + 3aab + 3abb + b^3}$, 1°. après avoir partagé $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$ en deux parties $a^3 + 2aab + abb$, $+ aab + 2abb + b^3$, qui sont telles que $\frac{aab + 2abb + b^3}{a^3 + 2aab + abb} = \frac{b}{a}$, il faut diviser l'unité par le diviseur $a^3 + 2aab + abb$, $+ aab + 2abb + b^3$, en prenant la premiere de ces deux parties pour la premiere partie du diviseur, & la seconde partie pour la seconde partie du diviseur, & l'on trouvera que le quotient est la suite $\frac{1}{a^3 + 2aab + abb} - \frac{b}{a^4 + 2a^3b + aabb} + \frac{bb}{a^5 + 2a^4b + a^3bb} - \frac{b^3}{a^6 + 2a^5b + a^4bb} + \frac{b^4}{a^7 + 2a^6b + a^5bb} - \frac{b^5}{a^8 + 2a^7b + a^6bb} - \frac{b^6}{a^9 + 2a^8b + a^7bb}$ &c.

2°. On réduira par ordre chacun des termes de cette suite, en la suite infinie qui lui est égale, ce qui se fait en divisant le numerateur de chacun par son dénominateur, en prenant la puissance de a seule, comme a^3 dans le premier terme, a^4 dans le second, &c. pour la premiere partie du diviseur,

& le reste du dénominateur pour la seconde partie du diviseur ; & l'on trouvera que

$\frac{1}{a^3+2aab+abb}$ se réduit en $\frac{1}{a^3}-\frac{2b}{a^4}+\frac{3bb}{a^5}-\frac{4b^3}{a^6}+\frac{5b^4}{a^7}-\frac{6b^5}{a^8}+\frac{7b^6}{a^9}$ &c.

$-\frac{b}{a^4+2a^3b+aabb}$ en $-\frac{b}{a^4}+\frac{2bb}{a^5}-\frac{3b^3}{a^6}+\frac{4b^4}{a^7}-\frac{5b^5}{a^8}+\frac{6b^6}{a^9}$ &c.

$+\frac{bb}{a^5+2a^4b+a^3bb}$ en $+\frac{bb}{a^5}-\frac{2b^3}{a^6}+\frac{3b^4}{a^7}-\frac{4b^5}{a^8}+\frac{5b^6}{a^9}$ &c.

$-\frac{b^3}{a^6+2a^5b+a^4bb}$ en $-\frac{b^3}{a^6}+\frac{2b^4}{a^7}-\frac{3b^5}{a^8}+\frac{4b^6}{a^9}$ &c.

$+\frac{b^4}{a^7+2a^6b+a^5bb}$ en $+\frac{b^4}{a^7}-\frac{2b^5}{a^8}+\frac{3b^6}{a^9}$ &c.

$-\frac{b^5}{a^8+2a^7b+a^6bb}$ en $-\frac{b^5}{a^8}+\frac{2b^6}{a^9}$ &c.

$+\frac{b^6}{a^9+2a^8b+a^7bb}$ en $+\frac{b^6}{a^9}$ &c.

On peut continuer cette suite à l'infini.

En prenant les sommes de chaque rang perpendiculaire, on aura $\frac{1}{\overline{a+b}^3}=\overline{a+b}^{-3}=\frac{1}{a^3}-\frac{3b}{a^4}+\frac{6bb}{a^5}-\frac{10b^3}{a^6}$ $+\frac{15b^4}{a^7}-\frac{21b^5}{a^8}+\frac{28b^6}{a^9}$ &c. ou, ce qui est la même chose, $1a^{-3}-3a^{-4}b+6a^{-5}bb-10a^{-6}b^3+15a^{-7}b^4-21a^{-8}b^5$ $+28a^{-9}b^6$ &c.

Pour la quatriéme puissance.

On réduira de même $\frac{1}{\overline{a+b}^4}=\overline{a+b}^{-4}=\frac{1}{a^4+4a^3b+6aabb+4ab^3+b^4}$

1°. en la suite $\frac{1}{a^4+3a^3b+3aabb+ab^3}-\frac{b}{a^5+3a^4b+3a^3bb+aab^3}$ $+\frac{bb}{a^6+3a^5b+3a^4bb+a^3b^3}-\frac{b^3}{a^7+3a^6b+3a^5bb+a^4b^3}+\frac{b^4}{a^8+3a^7b+3a^6bb+a^5b^3}$ $-\frac{b^5}{a^9+3a^8b+3a^7bb+a^6b^3}$ &c.

2°. On réduira ensuite.

$\frac{1}{a^4+3a^3b+3aabb+ab^3}$ en $\frac{1}{a^4}-\frac{3b}{a^5}+\frac{6bb}{a^6}-\frac{10b^3}{a^7}+\frac{15b^4}{a^8}-\frac{21b^5}{a^9}$ &c.

$-\frac{b}{a^5+3a^4b+3a^3bb+aab^3}$ en $-\frac{b}{a^5}+\frac{3bb}{a^6}-\frac{6b^3}{a^7}+\frac{10b^4}{a^8}-\frac{15b^5}{a^9}$ &c.

$+\frac{bb}{a^6+3a^5b+3a^4bb+a^3b^3}$ en $+\frac{bb}{a^6}-\frac{3b^3}{a^7}+\frac{6b^4}{a^8}-\frac{10b^5}{a^9}$ &c.

$-\frac{b^3}{a^7+3a^6b+3a^5bb+a^4b^3}$ en $-\frac{b^3}{a^7}+\frac{3b^4}{a^8}-\frac{6b^5}{a^9}$ &c.

$+\frac{b^4}{a^8+3a^7b+3a^6bb+a^5b^3}$ en $+\frac{b^4}{a^8}-\frac{3b^5}{a^9}$ &c.

$-\frac{b^5}{a^9+3a^8b+3a^7bb+a^6b^3}$ en $-\frac{b^5}{a^9}$ &c.

On peut continuer cette suite à l'infini.

En prenant les ſommes de chaque rang perpendiculaire, on aura $\frac{1}{\overline{a+b}^4} = \overline{a+b}^{-4} = \frac{1}{a^4} - \frac{4b}{a^5} + \frac{10bb}{a^6} - \frac{20b^3}{a^7} + \frac{35b^4}{a^8} - \frac{56b^5}{a^9}$ &c. $= 1a^{-4} - 4a^{-5}b + 10a^{-6}bb - 20a^{-7}b^3 + 35a^{-8}b^4 - 56a^{-9}b^5$ &c.

On trouvera de même que $\frac{1}{\overline{a+b}^5} = \overline{a+b}^{-5} = \frac{1}{a^5} - \frac{5b}{a^6} + \frac{15bb}{a^7} - \frac{35b^3}{a^8} + \frac{70b^4}{a^9} - \frac{126b^5}{a^{10}}$ &c. ou, ce qui eſt la même choſe, $1a^{-5} - 5a^{-6}b + 15a^{-7}bb - 35a^{-8}b^3 + 70a^{-9}b^4 - 126a^{-10}b^5$ &c.

$\frac{1}{\overline{a+b}^6} = \overline{a+b}^{-6} = \frac{1}{a^6} - \frac{6b}{a^7} + \frac{21bb}{a^8} - \frac{56b^3}{a^9} + \frac{126b^4}{a^{10}} - \frac{252b^5}{a^{11}}$ &c. ou, ce qui eſt la même choſe, $1a^{-6} - 6a^{-7}b + 21a^{-8}bb - 56a^{-9}b^3 + 126a^{-10}b^4 - 252a^{-11}b^5$ &c.

On peut continuer ces operations ſur la ſeptiéme puiſſance, la huitiéme, &c.

REMARQUES.

I.

209. APRÈS s'être rendu ces operations très-familieres, on verra clairement que le premier terme de la ſuite contient dans la ſeconde puiſſance, ſeulement a^{-2}; dans la troiſiéme a^{-3}; dans la quatriéme, a^{-4}, &c. & que dans les termes ſuivans la puiſſance de a, dont l'expoſant eſt toujours négatif, augmente par ordre d'un degré dans chaque terme ſuivant; que b eſt lineaire dans le ſecond terme de la ſuite, & que les puiſſances de b, dont l'expoſant eſt toujours poſitif, augmentent par ordre d'un degré dans chaque terme ſuivant.

Ainſi les puiſſances de $\overline{a+b}^{-n}$ peuvent être marquées en general par a^{-n}, $a^{-n-1}b$, $a^{-n-2}b^2$, &c.

II.

210. Que les coëficiens de chaque terme ſont par ordre les
* 195. termes du ſecond rang parallele* de la premiere diſpoſition des ſuites 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c. dans la ſeconde puiſſance; ceux du troiſiéme rang parallele, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, dans la troiſiéme; ceux du quatriéme rang parallele, 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, &c. dans la quatriéme; ceux du cinquiéme rang

rang parallele, 1, 5, 15, 35, 70, 126, 210, &c. dans la cinquiéme; & ainsi de suite: de maniere que l'exposant 2 de la seconde puissance, marque qu'il faut prendre pour les coëficiens de la seconde puissance, les termes du second rang parallele; l'exposant 3 de la troisiéme, marque qu'il faut prendre de suite pour les coëficiens de la troisiéme puissance, les termes du troisiéme rang parallele; & ainsi de suite.

Ainsi supposant que n représente en general le degré de chaque puissance, l'on a démontré dans la premiere disposition des suites, * que $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \times \frac{n+3}{4}$ &c. est une formule qui fait trouver par ordre les termes de chaque rang parallele; sçavoir, 1 est le premier terme de chaque rang parallele, $1 \times \frac{n}{1}$ est le second terme, $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}$ est le troisiéme terme, & ainsi de suite; l'on peut négliger dans chaque terme l'unité, qui n'apporte aucun changement dans les produits. * 195.

Par consequent la suite $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \times \frac{n+3}{4}$ &c. fera trouver les coëficiens des termes des suites égales à $\overline{a+b}^{-2}$, $\overline{a+b}^{-3}$, $\overline{a+b}^{-4}$, &c. 1 est le coëficient du premier terme; $\frac{n}{1}$ représente le coëficient du second terme; $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}$ représente le coëficient du 3e terme; $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$ représente le coëficient du 4e terme; $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \times \frac{n+3}{4}$ représente celui du 5e terme; & ainsi de suite. Il n'y aura, pour trouver ces coëficiens, qu'à mettre 2 à la place de n pour la seconde puissance, 3 à la place de n pour la troisiéme, & ainsi de suite, & rendre négatifs les coëficiens des termes pairs, c'est-à-dire du second, du quatriéme, du sixiéme, &c. suivant ce qui est démontré dans les operations précedentes. * * 208.

III.

211. Quand il y a $\overline{a+b}^{-2}$, $\overline{a+b}^{-3}$, &c. les coëficiens des termes pairs, c'est-à-dire du second, du quatriéme, du sixiéme, &c. sont négatifs, & ils seroient positifs s'il y avoit $\overline{a-b}^{-2}$, $\overline{a-b}^{-3}$, $\overline{a-b}^{-4}$, &c.

IV.

212. La suite de chaque puissance est toujours infinie, quand l'exposant est négatif.

COROLLAIRE,

Où l'on démontre qu'en mettant $-$ n *au lieu de* $+$ n *dans la formule generale des puissances de* $\overline{a+b}^n = 1a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}a^{n-2}bb + \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}a^{n-3}b^3$ &c. *la même formule devient la formule generale des puissances de* $\overline{a+b}^{-n}$, *dont l'exposant est négatif.*

213. EN mettant dans la formule generale $1a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}a^{n-2}bb$ &c. $-n$ à la place de $+n$, il est évident, 1°. qu'on trouvera les mêmes puissances de a & de b, qui
209. conviennent à $\overline{a+b}^{-n}$ par la premiere remarque.

2°. Que les coëficiens seront les mêmes que ceux de
210, 211. $\overline{a+b}^{-n}$ de la seconde & troisiéme remarques, car l'unité sera le coëficient du premier terme, $-\frac{n}{1}$ le coëficient du second terme qui doit être négatif par la troisiéme remar-
*211. que; * $-\frac{n}{1}\times-\frac{n-1}{2}$, est le même que le troisiéme coëficient $\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}$, puisque les deux grandeurs négatives $-\frac{n}{1}\times-\frac{n-1}{2}$, donnent le même produit positif que les deux positives $\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}$. Il est évident que l'on trouvera de même que les coëficiens de la formule generale seront, après avoir mis $-n$ à la place de $+n$, les coëficiens marquez dans la seconde & la troisiéme remarque.

Par consequent l'on a démontré qu'en mettant dans la formule generale $\overline{a+b}^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}a^{n-2}bb$ &c. $-n$ à la place de $+n$, elle sera la formule generale pour trouver toutes les puissances de $\overline{a+b}^{-n}$, lorsque leur exposant est négatif.

214. Et comme la formule generale pour élever une suite de grandeurs à une puissance quelconque, est une suite nécessaire de la formule generale pour élever deux grandeurs à
*205. une puissance quelconque; * il est évident qu'en mettant aussi $-n$ à la place de $+n$ dans la formule generale des puissances d'une suite, l'on aura la formule generale des puissances de la même suite, lorsque les exposans de ces puissances sont des nombres entiers négatifs.

Si l'on veut démontrer ce second cas par les operations

de la propoſition * qui précede ce Corollaire, il n'y a qu'à *208.
continuer les diviſions dans la ſeconde puiſſance par le diviſeur entier $aa + 2ab + bb + 2ac + 2bc + cc + 2ad + 2bd + 2cd + dd$, &c. après avoir déja trouvé les quotiens qui conviennent à la premiere partie du diviſeur $aa + 2ab + bb$, & continuer de ſemblables diviſions dans la troiſiéme puiſſance, la quatriéme, &c.

AVERTISSEMENT.

AFIN que les formules pour élever deux grandeurs ou une ſuite de grandeurs à une puiſſance quelconque, ſoient generales en toutes manieres, il reſte à démontrer qu'elles conviennent auſſi à toutes les puiſſances de deux grandeurs ou d'une ſuite de grandeurs, dont les expoſans ſont des fractions ou des nombres rompus poſitifs ou négatifs; ou, ce qui eſt la même choſe, qu'elles ſervent auſſi à trouver les racines quelconques de deux grandeurs, & d'une ſuite infinie de grandeurs. On démontrera ces derniers cas par la premiere méthode du ſecond Problême, & on les prendra pour des exemples de ce Problême.

SECTION IV.

Où l'on continue les exemples de la premiere méthode du ſecond Probléme : On enſeigne à appliquer la même méthode aux équations qui contiennent des differences ; & l'on explique le retour des ſuites.

EXEMPLE V. DU SECOND PROBLÊME.

215. *TROUVER la ſuite infinie qui exprime la racine* n *de* $a+b$, *c'eſt à-dire, trouver la ſuite infinie qui eſt égale à* $\sqrt[n]{a+b} = \overline{a+b}^{\frac{1}{n}}$.

IL faut ſuppoſer $x = \sqrt[n]{a+b} = \overline{a+b}^{\frac{1}{n}}$.

En élevant chaque membre de cette équation à la puiſſance n, on aura $x^n = a + b$; & tranſpoſant, $x^n - a - b = 0$.

La queſtion ſe reduit à trouver la ſuite infinie qui eſt la valeur de x dans cette équation $x^n - a - b = 0$. Pour la trouver,

1°. Il faut ſuppoſer $x = c + db + ebb + fb^3 + gb^4 + hb^5$ &c. les grandeurs c, d, e, f, g, &c. ſont indéterminées.

2°. Il faut élever chaque membre à la puiſſance n par la
* 206. formule generale, * & ſubſtituer la valeur de x^n à la place de x^n dans l'équation $x^n - a - b = 0$, & l'on aura l'équation changée ſuivante.

$$0 = \left\{ \begin{array}{l} x^n = c^n + \frac{n}{1} c^{n-1} db + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} c^{n-2} ddbb + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} c^{n-3} d^3 b^3 + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} c^{n-4} d^4 b^4 \\ \qquad + \frac{n}{1} c^{n-1} ebb + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{1} c^{n-2} deb^3 + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{1} \times \frac{n-2}{2} c^{n-3} ddeb^4 \\ \qquad\qquad + \frac{n}{1} c^{n-1} fb^3 \qquad + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} c^{n-2} eeb^4 \\ \qquad\qquad\qquad + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{1} c^{n-2} dfb^4 \\ \qquad\qquad\qquad + \frac{n}{1} c^{n-1} gb^4 \\ -a = -a \\ -1b = \qquad -1b \end{array} \right.$$

3°. Il faut ſuppoſer chaque terme de cette équation changée égale à zero, ce qui donnera les équations particulieres dont on a beſoin pour déterminer les grandeurs indéterminées c, d, e, f, g, &c.

Par la premiere $c^n - a = 0$, on trouvera $c = a^{\frac{1}{n}}$.

En ſubſtituant la valeur de c dans la ſeconde $\frac{n}{1} c^{n-1} d - 1 = 0$, on trouvera $d = \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}}$.

Subſtituant les valeurs de c & de d dans la 3e $+ \frac{n}{1} c^{n-1} e + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} c^{n-2} dd = 0$, on trouvera $e = \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{2n} a^{\frac{1-2n}{n}}$.

Subſtituant les valeurs de c, d, e, dans la 4e $\frac{n}{1} c^{n-1} f + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{1} c^{n-2} de + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} c^{n-3} d^3$, on trouvera $f = \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{2n} \times \frac{1-2n}{3n} a^{\frac{1-3n}{n}}$.

Subſtituant les valeurs de c, d, e, f, dans la 5e $\frac{n}{1} c^{n-1} g + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{1} c^{n-2} df + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} c^{n-2} ee + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{1} \times \frac{n-2}{2} c^{n-3} dde + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} c^{n-4} d^4 = 0$, on trouvera $g = \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{2n} \times \frac{1-2n}{3n} \times \frac{1-3n}{4n} a^{\frac{1-4n}{n}}$.

4°. Il faut ſubſtituer ces valeurs de c, d, e, f, g, dans $x = c + db + ebb + fb^3 + gb^4$ &c. & l'on aura $x = \overline{a+b}^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} b + \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{2n} a^{\frac{1-2n}{n}} bb + \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{2n} \times \frac{1-2n}{3n} a^{\frac{1-3n}{n}} b^3 + \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{2n} \times \frac{1-2n}{3n} \times \frac{1-3n}{4n} a^{\frac{1-4n}{n}} b^4$ &c.

C'eſt la valeur de x que l'on cherchoit, c'eſt-à-dire, c'eſt la ſuite infinie égale à $\overline{a+b}^{\frac{1}{n}}$ *Ce qui étoit propoſé.*

REMARQUES.

I.

216. SI l'on ſubſtitue $\frac{1}{n}$ à la place de n dans la formule generale $\overline{a+b}^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} a^{n-2} bb + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} a^{n-3} b^3$ &c. on trouvera exactement la ſuite qu'on a trouvée dans le cinquiéme exemple; par conſequent la formule generale convient à toutes puiſſances de deux grandeurs, qui ont pour expoſant une fraction dont le numerateur eſt l'unité, & le dénominateur tel nombre qu'on voudra.

II.

217. On trouvera de la même maniere la ſuite infinie qui eſt la valeur de $\sqrt[n]{\overline{a+b}^m} = \overline{a+b}^{\frac{m}{n}}$, en ſuppoſant $x = \overline{a+b}^{\frac{m}{n}}$, ce qui donnera $x^n = \overline{a+b}^m$.

On ſuppoſera $x = c + db + ebb + fb^3$ &c. les grandeurs c, d, e, f, ſont indéterminées, & l'on prendra la valeur de x^n par cette équation.

On réduira auſſi $\overline{a+b}^m$ en la ſuite infinie qui lui eſt égale.

On ſubſtituera les valeurs de x^n, $\overline{a+b}^m$ dans l'équation $x^n = \overline{a+b}^m$, ce qui donnera l'équation changée.

On en ſuppoſera chaque terme égal à zero; & par les équations particulieres que donnera cette ſuppoſition, on déterminera c, d, e, f, &c.

On ſubſtituera les valeurs déterminées de c, d, e, f, &c. dans l'équation $x = \overline{a+b}^{\frac{m}{n}} = c + db + ebb + fb^3$ &c. & l'on aura la ſuite infinie égale à $\overline{a+b}^{\frac{m}{n}}$, qu'on trouvera être exactement la formule generale $\overline{a+b}^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b$ &c. après avoir ſubſtitué dans la formule generale $\frac{m}{n}$ à la place de n.

III.

218. On trouvera de la même maniere, en cherchant les ſui-

tes qui sont les valeurs de $\frac{1}{\sqrt{a+b}} = \overline{a+b}^{-\frac{1}{n}}$, & de $\frac{1}{\sqrt[n]{a+b}^{m}} = \overline{a+b}^{-\frac{m}{n}}$, que ces suites sont exactement la formule generale de $\overline{a+b}^{n}$, en substituant dans cette formule $-\frac{1}{n}$ à la place de n dans le premier cas, & $-\frac{m}{n}$ à la place de n dans le second cas.

I V.

219. Il faut aussi remarquer qu'en élevant par le moyen de la formule generale, deux grandeurs représentées en general par $a+b$, à une puissance quelconque, dont l'exposant est marqué en general par n, on peut commencer par la seconde b, comme s'il y avoit $\overline{b+a}^{n}$, de maniere que b fût la premiere, & a la seconde ; & il faut choisir celle des deux manieres qui donnera la suite dont les termes seront les plus commodes pour la résolution que l'on cherche.

V.

220. La même formule generale peut servir à trouver les racines quelconques approchées à l'infini, ou autant près qu'on voudra, des puissances numeriques imparfaites ; il n'y aura qu'à partager la puissance numerique imparfaite en deux parties, dont la premiere soit la plus grande puissance numerique parfaite contenue dans la puissance numerique imparfaite proposée, & la seconde partie soit le nombre qui restera, après avoir ôté de la puissance imparfaite proposée la plus grande puissance parfaite qui y est contenue. Il faut ensuite supposer que $\sqrt[n]{a+b}$, ou $\overline{a+b}^{\frac{1}{n}}$ représente la puissance numerique imparfaite proposée, que a représente la premiere partie, & b la seconde partie ; & que $\frac{1}{n}$ représente l'exposant de la racine qu'on veut extraire. Il faudra enfin substituer dans la formule generale à la place de a, b, n, les grandeurs numeriques qu'elles représentent ; & après les substitutions, l'on aura la racine approchée que l'on cherchoit. Ainsi pour trouver la racine troisiéme de 12, on supposera $\overline{a+b}^{\frac{1}{n}} = \overline{8+4}^{\frac{1}{3}}$, & on substituera les grandeurs numeriques à la place des litterales dans la formule generale.

EXEMPLE VI.

221. *TROUVER la suite infinie qui est la valeur de* $\overline{a + by + cyy + dy^3 + ey^4 + fy^5 \,\&c.}^{\frac{1}{n}}$

Il faut supposer $x = \overline{a + by + cyy + dy^3 + ey^4 + fy^5 \,\&c.}^{\frac{1}{n}}$

Par consequent $x^n = a + by + cyy + dy^3 + ey^4 + fy^5$ &c.

En transposant $o = - x^n + a + by + cyy + dy^3$ &c.

La question se réduit à trouver la valeur de x dans cette équation. Pour la trouver,

1°. Il faut supposer $x = g + hy + iyy + ky^3 + ly^4 + py^5$ &c. les grandeurs $g, h, i, k,$ &c. sont indéterminées.

2°. Il faut prendre la valeur de x^n par cette équation en se servant de la formule generale,* & substituer cette valeur de x^n à la place de $- x^n$ dans l'équation $o = - x^n + a + by + cyy$ &c. & l'on aura l'équation changée suivante. * 206.

$$o = \left\{ \begin{array}{l} - x^n = - g^n - \frac{n}{1} g^{n-1} hy - \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} g^{n-2} hhyy - \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} g^{n-3} h^3 y^3 - \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} g^{n-4} h^4 y^4 \\ \qquad - \frac{n}{1} g^{n-1} iyy - \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{1} g^{n-2} hiy^3 - \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{1} \times \frac{n-2}{2} g^{n-3} hhiy^4 \\ \qquad - \frac{n}{1} g^{n-1} ky^3 - \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} g^{n-2} iiy^4 \\ \qquad - \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{1} g^{n-2} hky^4 \\ \qquad - \frac{n}{1} g^{n-1} ly^4 \\ + a + by + cyy \,\&c. = + a + by + cyy + dy^3 + ey^4 \end{array} \right.$$

3°. Il faut supposer chaque terme de cette équation changée égal à zero, ce qui donnera les équations particulieres dont on a besoin pour déterminer les grandeurs $g, h, i, k,$ &c.

Par la premiere $g^n = a$, on trouvera $g = a^{\frac{1}{n}}$.

En substituant cette valeur de a dans la seconde $\frac{n}{1} g^{n-1} h = b$, on trouvera $h = \frac{n}{1} a^{\frac{1-n}{n}} b$.

En substituant les valeurs de g, h, dans la 3e $\frac{n}{1} g^{n-1} i = - \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} g^{n-2} hh + c$, on trouvera $i = + \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{2n} a^{\frac{1-2n}{n}} bb + \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} c$.

En substituant les valeurs de g, h, i, dans la 4e $\frac{n}{1} g^{n-1} k = - \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} g^{n-3} h^3 - \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{1} g^{n-2} hi + d$, on trouvera $k = + \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{2n} \times \frac{1-2n}{3n} a^{\frac{1-3n}{n}} b^3 + \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{n} a^{\frac{1-2n}{n}} bc + \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} d$.

On trouvera de la même maniere les valeurs de l, de p, &c.

4°. Il faut substituer les valeurs de g, h, i, k, &c. dans $x = g + hy + iyy + ky^3$ &c. & l'on aura $x = \overline{a + by + cyy + dy^3 \&c.}^{\frac{1}{n}}$

$$= a^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} by + \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{2n} a^{\frac{1-2n}{n}} bbyy + \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{2n} \times \frac{1-2n}{3n} a^{\frac{1-3n}{n}} b^3y^3$$
$$+ \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} cyy \quad + \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{n} a^{\frac{1-2n}{n}} bcy^3$$
$$+ \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} dy^3$$

Ce qui étoit proposé.

EXEMPLE VII.

222. *TROUVER la suite infinie qui est la valeur de* $\overline{ay + byy + cy^3 + dy^4 + ey^5 \&c.}^{\frac{1}{n}}$

IL faut supposer $x = \overline{ay + byy + cy^3 + dy^4 + ey^5 \&c.}^{\frac{1}{n}}$
Par consequent $x^n = ay + byy + cy^3 + dy^4 + ey^5$ &c.
Et transposant $o = -x^n + ay + byy + cy^3 + dy^4 + ey^5$ &c.

La question se réduit à trouver la valeur de x dans cette équation. Pour la trouver,

1°. Il faut supposer $x = gy + hyy + iy^3 + ky^4 + ly^5$ &c. les grandeurs g, h, i, &c. sont indéterminées.

2°. Il faut prendre la valeur de x^n par cette équation en
206. se servant de la formule generale, & la substituer à la place de $-x^n$ dans l'équation $o = -x^n + ay + byy$ &c. & l'on aura l'équation changée qui suit.

$$o = \begin{cases} -x^n = -g^n y^n - \frac{n}{1} g^{n-1} y^{n-1} hyy - \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} g^{n-2} y^{n-2} hhy^4 - \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} g^{n-3} y^{n-3} h^3 y^6 \\ \qquad - \frac{n}{1} g^{n-1} y^{n-1} iy^3 - \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{1} g^{n-2} y^{n-2} hiy^5 \ \&c. \\ \qquad - \frac{n}{1} g^{n-1} y^{n-1} ky^4 \\ + ay + byy + cy^3 \ \&c. = + ay \quad + byy \quad + cy^3 \quad + dy^4 \ \&c. \end{cases}$$

Pour donner à cette équation changée la forme qui lui convient, afin que les puissances de y, prises de suite y, yy, y^3, y^4, &c. en distinguent les termes, il faut faire en sorte que y^{n-1} se trouve dans chaque coëficient, en considerant qu'on prend pour coëficiens toutes les grandeurs qui précedent dans chacun de ces produits les puissances y, yy, y^3, y^4, y^5, &c. de l'inconnue y, qui doivent distinguer les termes

de

de l'équation; & il faut qu'en faiſant ce changement, chaque produit ait toujours ſa même valeur, & que cela ne la change point.

En faiſant ce changement comme on le voit dans l'équation ſuivante, on aura exactement la même équation changée, qui ne differe de la précedente que dans la ſeule expreſſion, & les termes de l'équation ſeront diſtinguez par les puiſſances y, yy, y^3, y^4, y^5, &c.

$$o = \begin{cases} -x^n = -y^{n-1}g^n y - \frac{n}{1}g^{n-1}y^{n-1}hyy - \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}g^{n-2}y^{n-1}hhy^3 - \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}g^{n-3}y^{n-1}h^3y^4 \\ \qquad\qquad - \frac{n}{1}g^{n-1}y^{n-1}iy^3 - \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{1}g^{n-2}y^{n-1}hiy^4 \text{ \&c.} \\ \qquad\qquad - \frac{n}{1}g^{n-1}y^{n-1}ky^4 \\ +ay+byy+cy^3 \text{ \&c.} = +ay \quad +byy \quad +cy^3 \quad +dy^4 \text{ \&c.} \end{cases}$$

3°. Il faut ſuppoſer chaque terme de cette équation changée égal à zero, ce qui donnera les équations particulieres dont on a beſoin pour déterminer les grandeurs indéterminées g, h, i, k, &c.

Par la premiere de ces équations $y^{n-1}g^n = a$, on trouvera $g = a^{\frac{1}{n}}y^{\frac{1-n}{n}}$, & $gy = a^{\frac{1}{n}}y^{\frac{1}{n}}$.

En ſubſtituant la valeur de g ou de gy dans la ſeconde $\frac{n}{1}g^{n-1}y^{n-1}h = b$, on trouvera $h = \frac{1}{n}a^{\frac{1-n}{n}}by^{\frac{1-n}{n}}$.

En ſubſtituant les valeurs de g, h, dans la 3^e $\frac{n}{1}g^{n-1}y^{n-1}i = -\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}g^{n-2}y^{n-1}hh + c$, on trouvera $i = +\frac{1}{n}\times\frac{1-n}{2n}a^{\frac{1-2n}{n}}bby^{\frac{1-n}{n}} + \frac{1}{n}a^{\frac{1-n}{n}}cy^{\frac{1-n}{n}}$.

En ſubſtituant les valeurs de g, h, i, dans la 4^e $\frac{n}{1}g^{n-1}y^{n-1}k = -\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}g^{n-3}y^{n-1}h^3 - \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{1}g^{n-2}y^{n-1}hi + d$, on trouvera $k = +\frac{1}{n}\times\frac{1-n}{2n}\times\frac{1-2n}{3n}a^{\frac{1-3n}{n}}h^3y^{\frac{1-n}{n}} + \frac{1}{n}\times\frac{1-n}{n}a^{\frac{1-2n}{n}}bcy^{\frac{1-n}{n}} + \frac{1}{n}a^{\frac{1-n}{n}}dy^{\frac{1-n}{n}}$.

4°. Il faut ſubſtituer ces valeurs de g, h, i, k, dans $x = gy + hyy + iy^3 + ky^4 + ly^5$ &c. & l'on aura $x = \overline{ay + byy + cy^3 + dy^4 \text{ \&c.}}^{\frac{1}{n}}$

$$= a^{\frac{1}{n}}y^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n}a^{\frac{1-n}{n}}by^{\frac{1+n}{n}} + \frac{1}{n}\times\frac{1-n}{2n}a^{\frac{1-2n}{n}}bby^{\frac{1+2n}{n}} + \\ + \frac{1}{n}a^{\frac{1-n}{n}}cy^{\frac{1+2n}{n}}$$

$$\frac{1}{n} \times \frac{1-n}{2n} \times \frac{1-2n}{3n} a^{\frac{1-3n}{n}} b^3 y^{\frac{1+3n}{n}} + \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{2n} \times \frac{1-2n}{3n} \times \frac{1-3n}{4n} a^{\frac{1-4n}{n}} b^4 y^{\frac{1+4n}{n}}$$

$$+ \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{n} a^{\frac{1-2n}{n}} bcy^{\frac{1+3n}{n}} \quad + \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{n} \times \frac{1-2n}{2n} a^{\frac{1-3n}{n}} bbcy^{\frac{1+4n}{n}}$$

$$+ \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} dy^{\frac{1+3n}{n}} \quad + \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{2n} a^{\frac{1-2n}{n}} ccy^{\frac{1+4n}{n}}$$

$$+ \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{n} a^{\frac{1-2n}{n}} bdy^{\frac{1+4n}{n}}$$

$$+ \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} ey^{\frac{1+4n}{n}}$$

C'eſt la ſuite qui eſt la valeur de $\overline{ay + byy + cy^3 + dy^4 \&c.}^{\frac{1}{n}}$
Ce qui étoit propoſé.

REMARQUES.

I.

223. IL faut faire ſur le ſixiéme & le ſeptiéme exemple les mêmes remarques que l'on a faites ſur le cinquiéme exemple, & l'on verra clairement que la premiere méthode du ſecond Problême étant démontrée, les formules generales pour élever deux grandeurs & une ſuite infinie de grandeurs à une puiſſance quelconque, ſont auſſi démontrées pour tous les cas; c'eſt-à-dire, on verra clairement qu'on a démontré qu'elles ſervent à élever deux grandeurs & une ſuite infinie de grandeurs à une puiſſance quelconque, quelque nombre qu'en puiſſe être l'expoſant, ſoit entier, ſoit rompu, ſoit poſitif, ſoit négatif; & qu'il eſt auſſi facile d'élever par cette formule deux grandeurs ou une ſuite infinie de grandeurs à une puiſſance fort élevée, qu'il eſt aiſé par la méthode ordinaire de les élever au quarré ou à la troiſiéme puiſſance; & qu'il eſt auſſi facile d'en extraire la racine quelconque, que d'en extraire la racine quarrée; puiſqu'il n'y a qu'à ſubſtituer dans ces formules generales le nombre entier ou rompu, poſitif ou négatif, qui eſt l'expoſant de la puiſſance qu'on veut trouver, à la place de n qui le repréſente, & les grandeurs dont on cherche la puiſſance ou la racine, à la place des grandeurs a, b, c, &c. des formules generales.

On verra auſſi que quand l'expoſant de la puiſſance à laquelle on veut élever pluſieurs grandeurs, eſt un nombre entier poſitif, l'on trouve une ſuite finie; mais qu'elle eſt infinie dans les trois autres cas, c'eſt-à-dire, quand l'expoſant de

la puiſſance eſt un nombre entier négatif, & quand il eſt un nombre rompu poſitif ou négatif.

I I.

On verra l'uſage de ces formules generales qui ſervent à élever deux ou pluſieurs grandeurs, ou une ſuite de grandeurs à une puiſſance quelconque, dans les exemples ſuivans, & l'on doit avertir ici qu'elles ſont d'une extrême utilité pour trouver des formules generales qui ſervent à découvrir la reſolution des Problêmes les plus compoſez.

EXEMPLE VIII.

224. POUR trouver la valeur de x dans l'équation $x^6 - \frac{5y^{\frac{3}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}}x^5$

$$+ \frac{y^3}{n}x^4 - 7nnyyxx \begin{array}{l} + ppy^4 \\ + 6n^3y^3 \end{array} = 0.$$

1°. Il faut ſuppoſer $x = ay^{\frac{1}{2}} + by^{1+\frac{1}{2}} + cy^{2+\frac{1}{2}} + dy^{3+\frac{1}{2}}$ &c. a, b, c, &c. ſont des grandeurs indéterminées.

2°. Il faut ſubſtituer dans la propoſée les valeurs de x, priſes de cette équation indéterminée, & l'on aura l'équation changée qui ſuit.

$$0 = \left\{ \begin{array}{lclll} x^6 & = & + a^6y^3 & + 6a^5by^4 & \begin{array}{l} + 15a^4bby^5 \text{ \&c.} \\ + 6a^5cy^5 \end{array} \\ - \frac{5y^{\frac{3}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}}x^5 & = & & - \frac{5a^5}{n^{\frac{1}{2}}}y^4 & - \frac{25a^4}{n^{\frac{1}{2}}}by^5 \text{ \&c.} \\ + \frac{y^3}{n}x^4 & = & & & + \frac{a^4}{n}y^5 \quad \text{\&c.} \\ - 7nnyyxx & = & - 7nnaay^3 & - 14nnaby^4 & \begin{array}{l} - 7nnbby^5 \text{ \&c.} \\ - 14nnacy^5 \end{array} \\ + ppy^4 & = & & + ppy^4 & \\ + 6n^3y^3 & = & + 6n^3y^3 & & \end{array} \right.$$

3°. Il faut ſuppoſer chaque terme de cette équation changée égal à zero, ce qui donnera les équations dont on a beſoin pour trouver les valeurs des indéterminées a, b, c, &c.

Par la premiere $a^6 - 7nnaa + 6n^3 = 0$, on trouvera que la plus petite valeur poſitive de a eſt $n^{\frac{1}{2}}$, car $aa - n = 0$, eſt un diviſeur exact de $a^6 - 7nnaa + 6n^3 = 0$.

En ſubſtituant la valeur de a dans la 2^e^ $14nnab - 6a^5b = - \frac{5a^5}{n^{\frac{1}{2}}} + pp$, on trouvera $b = - \frac{5}{8n^{\frac{1}{2}}} + \frac{pp}{8n^{2+\frac{1}{2}}}$.

En ſubſtituant les valeurs de a, b, dans la 3.ᵉ $14nnac - 6a^5c = +\frac{a^4}{n} - \frac{25a^4}{n^{\frac{1}{2}}}b + 15a^4bb - 7nnbb$, on trouvera $c = \frac{158}{64n^{\frac{3}{2}}} - \frac{35}{64n^{\frac{7}{2}}}pp + \frac{p^4}{64n^{\frac{11}{2}}}$.

4°. On ſubſtituera ces valeurs de a, b, c, dans $x = ay^{\frac{1}{2}} + by^{1+\frac{1}{2}} + cy^{2+\frac{1}{2}}$ &c. & l'on aura $x = n^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{8n^{\frac{1}{2}}}y^{\frac{3}{2}} + \frac{pp}{8n^{\frac{5}{2}}}y^{\frac{3}{2}} + \frac{158}{64n^{\frac{3}{2}}}y^{\frac{5}{2}} - \frac{35pp}{64n^{\frac{7}{2}}}y^{\frac{5}{2}} + \frac{p^4}{64n^{\frac{11}{2}}}y^{\frac{5}{2}}$ &c.

On peut continuer l'approximation autant qu'on voudra.

Application de la premiere méthode du ſecond Problême à la réſolution des équations qui contiennent des differences.

AVERTISSEMENT.

225. LE ſecond Problême ſert auſſi à la réſolution des équations qui contiennent des differences, & l'on peut, par la premiere méthode de ce Problême qu'on a expliquée, & par la ſeconde qu'on expliquera dans la ſuite, trouver la valeur approchée à l'infini de laquelle on voudra des inconnues de l'équation, exprimée par une ſuite qui n'aura que les puiſſances de l'autre inconnue, ou des autres inconnues, s'il y en a pluſieurs, avec des grandeurs toutes connues. Et comme cela donne la réſolution de pluſieurs beaux Problêmes de Geometrie, on va faire l'application de la premiere méthode à pluſieurs équations qui contiennent des differences. On ſuppoſe ſeulement qu'on ſçait le calcul des grandeurs differentielles, qui eſt expliqué *dans la premiere Section de l'Analyſe des Infinimens Petits*; & ſi on veut l'appliquer aux équations qui contiennent des ſecondes differences ou des troiſiémes differences, &c. il faut ſçavoir le calcul de ces differences ſecondes, troiſiémes, &c. qui eſt expliqué *dans l'Article* 65 du même ouvrage.

Préparation des équations qui ont des differences, afin d'y appliquer la méthode du ſecond Problême.

226. SUPPOSANT que les équations differentielles auſquelles on veut appliquer la méthode du ſecond Problême, ont les

deux inconnues x & y, avec leurs differences, & qu'on cherche la valeur de x par une ſuite dont les termes n'ayent que les puiſſances de y avec les grandeurs connues des équations; il faut toujours, avant d'appliquer la méthode, faire en ſorte par la multiplication, la diviſion, &c. que la difference dy de la ſeconde inconnue, ſoit dans le dénominateur, & ne ſoit point dans le numerateur. Par exemple, ſi l'on propoſe de trouver la valeur de x dans l'équation $dx + ydx - 1dy = 0$, il faut diviſer tous les termes par dy, & l'on aura l'équation préparée $\frac{dx}{dy} + \frac{ydx}{dy} - 1 = 0$. De même ſi l'on propoſe de réſoudre l'équation $dx^2 = \frac{yydy^2}{1-yy} + dy^2$, il faut multiplier tous les termes par $1 - yy$, & enſuite les diviſer par dy, & l'on aura l'équation préparée $1 - \frac{dx^2}{dy^2} + \frac{yydx^2}{dy^2} = 0$. Si l'on propoſe l'équation $dx \times \frac{\overline{qr + t - q} \times \sqrt{rr - xx}}{2\sqrt{rr - xx}} = \frac{1}{2} dy$, il faut multiplier chaque membre par $2\sqrt{rr - xx}$, & enſuite les diviſer par dy, & l'on aura l'équation préparée

$$\frac{dx}{dy} \times \overline{qr + t - q \times \sqrt{rr - xx}} - \sqrt{rr - xx} = 0.$$

Il en eſt de même des autres équations differentielles.

EXEMPLE IX.

227. POUR trouver la valeur de x dans l'équation differentielle $\frac{dx}{dy} + \frac{ydx}{dy} - 1 = 0$,

1°. Il faut ſuppoſer $x = ay + byy + cy^3 + ey^4 + fy^5$ &c. d'où l'on déduira en prenant les differences de chaque membre, $\frac{dx}{dy} = + a + 2by + 3cyy + 4ey^3 + 5fy^4$ &c.

2°. Il faut ſubſtituer la valeur de $\frac{dx}{dy}$ dans la propoſée, & elle ſera changée en l'équation qu'on voit ici.

$$0 = \begin{cases} + \frac{dx}{dy} = + a + 2by + 3cyy + 4ey^3 + 5fy^4 \text{ \&c.} \\ + \frac{ydx}{dy} = \quad + ay + 2byy + 3cy^3 + 4ey^4 \text{ \&c.} \\ - 1 = - 1 \end{cases}$$

3°. Il faut ſuppoſer chaque terme de cette équation changée égal à zero, ce qui donnera autant d'équations particulieres qu'on a ſuppoſé de coëficiens indéterminez, leſquelles ſerviront à en trouver les valeurs.

Par la premiere $+ a - 1 = 0$, on trouvera $a = 1$.
Par la ſeconde $+ 2by + ay = 0$, on trouvera $b = -\frac{1}{2}$.

Par la troisiéme $+3cyy+2byy=0$, on trouvera $c=+\frac{1}{3}$.
Par la quatriéme $+4ey^3+3cy^3=0$, on trouvera $e=-\frac{1}{4}$,
Par la cinquiéme $+5fy^4+4ey^4=0$, on trouvera $f=+\frac{1}{5}$.

4°. En substituant ces valeurs de a, b, c, e, f, à leur place dans $x=ay+byy+cy^3+ey^4+fy^5$, on aura $x=1y-\frac{1}{2}yy+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{5}y^5$ &c.
C'est la valeur approchée de x que l'on cherchoit.

EXEMPLE X.

228. POUR trouver la valeur de x dans l'équation $xx-rr+\frac{rrdx^2}{dy^2}=0$.

1°. Il faut supposer $x=ay+by^3+cy^5+ey^7+fy^9$ &c. les coëficiens a, b, c, &c. sont indéterminez. On ne peut pas supposer $x=ay+byy+cy^3+ey^4$ &c. parceque dans cette supposition, on ne pourroit pas trouver toutes les équations particulieres, propres à déterminer les valeurs de tous les coëficiens indéterminez.

En prenant la difference de chaque terme de $x=ay+by^3+cy^5$ &c. on aura $\frac{dx}{dy}=a+3byy+5cy^4+7ey^6+9fy^8$ &c. quarrant chaque membre de cette équation, on aura

$$\begin{array}{llllll} \frac{dx^2}{dy^2}=aa & +6abyy & +9bby^4 & +14aey^6 & +25ccy^8 & \&c. \\ & & +10acy^4 & +30bcy^6 & +18afy^8 & \\ & & & & +42bey^8 & \end{array}$$

quarrant aussi chaque terme de l'équation supposée $x=ay+by^3+cy^5$ &c. on aura

$$\begin{array}{lllll} xx=+aayy & +2aby^4 & +bby^6 & +2aey^8 & \&c. \\ & & +2acy^6 & +2bcy^8 & \end{array}$$

2°. Il faut substituer ces valeurs de $\frac{dx^2}{dy^2}$, & de xx à leur place dans la proposée, & elle sera changée par cette substitution en l'équation infinie qu'on voit ici.

$$0=\left\{\begin{array}{llllll} +xx= & +aayy & +2aby^4 & +bby^6 & +2aey^8 & \&c. \\ & & & +2acy^6 & +2bcy^8 & \\ -rr=-rr & & & & & \\ +\frac{rrdx^2}{dy^2}=+aarr & +6abrryy & +9bbrry^4 & +14aerry^6 & +25ccrry^8 & \&c. \\ & & +10acrry^4 & +30bcrry^6 & +18afrry^8 & \\ & & & & +42berry^8 & \end{array}\right.$$

3°. Il faut supposer chaque terme de cette équation changée égal à zero, ce qui donnera autant d'équations particulieres pour déterminer les coëficiens indéterminez, qu'on a supposé de ces coëficiens indéterminez.

Par la premiere on trouvera $aa = 1$, d'où l'on déduira $a = +1$. Par la seconde on trouvera $b = -\frac{1}{6rr}$: par la troisiéme, $c = +\frac{1}{120r^4}$: par la quatriéme, $e = -\frac{1}{5040r^6}$: par la cinquiéme $f = \frac{1}{362880r^8}$.

4°. Il faut substituer ces valeurs de a, b, c, &c. dans l'équation supposée $x = ay + by^3 + cy^5$ &c. & l'on aura $x = y - \frac{y^3}{6rr} + \frac{y^5}{120r^4} - \frac{y^7}{5040r^6} + \frac{y^9}{362880r^8}$. C'est la valeur approchée de x que l'on cherchoit.

EXEMPLE XI.

229. POUR trouver la valeur approchée de x dans l'équation $1 - \frac{dx^2}{dy^2} + \frac{yydx^2}{ay^2} = 0$,

1°. On supposera $x = ay + by^3 + cy^5 + ey^7 + fy^9$ &c. d'où l'on déduira $\frac{dx}{dy} = +a + 3byy + 5cy^4 + 7ey^6 + 9fy^8$ &c. en quarrant chaque membre on aura

$$\frac{dx^2}{dy^2} = +aa + 6abyy + 9bby^4 + 14aey^6 + 25ccy^8 \text{ \&c.}$$
$$+ 10acy^4 + 30bcy^6 + 18afy^8$$
$$+ 42bey^8$$

2°. On substituera cette valeur de $\frac{dx^2}{dy^2}$ dans la proposée, & l'on aura

$$0 = \begin{cases} +1 = +1 \\ -\frac{dx^2}{dy^2} = -aa - 6abyy - 9bby^4 - 14aey^6 - 25ccy^8 \text{ \&c.} \\ \qquad - 10acy^4 - 30bcy^6 - 18afy^8 \\ \qquad - 42bey^8 \\ +\frac{yydx^2}{dy^2} = + aayy + 6aby^4 + 9bby^6 + 14aey^8 \text{ \&c.} \\ \qquad + 10acy^6 + 30bcy^8 \end{cases}$$

3°. On supposera chaque terme de cette équation changée égal à zero.

Par ces équations particulieres on trouvera $a = +1$, $b = +\frac{1}{6}$, $c = +\frac{3}{40}$, $e = +\frac{5}{112}$, $f = +\frac{35}{1152}$.

4°. On substituera ces valeurs de a, b, c, &c. à leur place dans $x = ay + by^3$ &c. & l'on trouvera $x = y + \frac{1}{6}y^3 + \frac{3}{40}y^5 + \frac{5}{112}y^7 + \frac{35}{1152}y^9$ &c. C'est la valeur approchée de x que l'on cherchoit.

EXEMPLE XII.

230. SOIT proposé de trouver la valeur de $\frac{rr}{p} - x$ par le moyen de l'équation $+pyy - rrx - \frac{rrvdx}{dy} + pxx = 0$.

1°. Il faut ſuppoſer $x = ayy + by^4 + cy^6$ &c. d'où l'on déduira $\frac{dx}{dy} = + 2ay + 4by^3 + 6cy^5$ &c. & $xx = + aay^4 + 2aby^6 + bby^8$ &c.
$+ 2acy^8$

2°. On ſubſtituera ces valeurs de x, $\frac{dx}{dy}$, xx à leur place dans la propoſée, & l'on aura.

$$0 = \begin{cases} + pyy = + pyy \\ - rrx = - arryy - brry^4 - crry^6 \text{ \&c.} \\ - \frac{rrydx}{dy} = - 2arryy - 4brry^4 - 6crry^6 \text{ \&c.} \\ + pxx = \quad + aapy^4 + 2abpy^6 \text{ \&c.} \end{cases}$$

3°. Il faut ſuppoſer chaque terme de l'équation changée égal à zero.

On trouvera par ces équations particulieres $a = + \frac{p}{3rr}$, $b = + \frac{p^3}{5 \times 9r^6}$, $c = + \frac{2p^5}{3 \times 5 \times 7 \times 9r^{10}}$.

4°. Il faut ſubſtituer ces valeurs de a, b, c, &c. dans l'équation ſuppoſée $x = ayy + by^4 + cy^6$ &c. & l'on trouvera $x = + \frac{p}{3rr}yy + \frac{p^3}{5 \times 9r^6}y^4 + \frac{2p^5}{3 \times 5 \times 7 \times 9r^{10}}y^6$ &c. d'où l'on déduira $\frac{rr}{p} - x = \frac{rr}{p} - \frac{p}{3rr}yy - \frac{p^3}{5 \times 9r^6}y^4 - \frac{2p^5}{3 \times 5 \times 7 \times 9r^{10}}y^6$ &c. *Ce qui étoit propoſé.*

Si l'on veut ſuppoſer, pour abreger, $\frac{rr}{p} = n$, on trouvera $\frac{rr}{p} - x = n - \frac{yy}{3n} - \frac{y^4}{5 \times 9n^3} - \frac{2y^6}{3 \times 5 \times 7 \times 9n^5}$ &c.

EXEMPLE XIII.

231. POUR trouver la valeur approchée de x dans l'équation $\frac{dx}{dy} \times \overline{qr + t - q} \times \sqrt{rr - xx} - \sqrt{rr - xx} = 0$,

1°. Il faut ſuppoſer $x = ay + by^3 + cy^5 + ey^7$ &c. d'où l'on déduira $\frac{dx}{dy} = + a + 3byy + 5cy^4 + 7ey^6$ &c.
$+ xx = + aayy + 2aby^4 + bby^6$ &c. $+ x^4 = + a^4y^4$
$+ 2acy^6$
$+ 4a^3by^6$ &c. $+ x^6 = + a^6y^6$ &c.

Il faut auſſi réduire $\sqrt{rr - xx} = \overline{rr - xx}^{\frac{1}{2}}$ en la ſuite qui exprime cette grandeur, par le moyen de la formule gene-
203. rale, où il ne faut que ſubſtituer $\frac{1}{2}$ à la place de n, rr à la place de a, & $-xx$ à la place de b; & l'on aura $\sqrt{rr - xx} = \overline{rr - xx}^{\frac{1}{2}} = r - \frac{xx}{2r} - \frac{x^4}{2 \times 4r^3} - \frac{x^6}{2 \times 4 \times r^5}$ &c.

Il faut concevoir cette valeur de $\sqrt{rr - xx}$ à la place de

de $\sqrt{rr-xx}$ dans la proposée, & substituer les valeurs de $\frac{dz}{dx}$, xx, x^4, x^6, &c. à leur place dans la proposée, & l'on aura

$$0=\left\{\begin{array}{l}
+\frac{dx}{dy}\times qr=+aqr+3bqryy+5cqry^4+7eqry^6\ \&c.\\
+\frac{dx}{dy}\times t\sqrt{rr-xx}=+atr+3btryy+5ctry^4+7etry^6\\
\qquad -\frac{a^3t}{2r}yy-\frac{2aabt}{2r}y^4-\frac{abbt}{2r}y^6\\
\qquad -\frac{3aabt}{2r}y^4-\frac{6abbt}{2r}y^6\ \&c.\\
\qquad -\frac{a^5t}{2\times 4r^3}y^4-\frac{7aact}{2r}y^6\\
\qquad -\frac{4a^4bt}{2\times 4r^3}y^6\\
\qquad -\frac{3a^4bt}{2\times 4r^3}y^6\\
\qquad -\frac{a^7t}{2\times 4\times 2r^5}y^6\\
+\frac{dx}{dy}\times -q\sqrt{rr-xx}=-arq-3bqryy-5cqry^4-7eqry^6\\
\qquad +\frac{a^3q}{2r}yy+\frac{2aabq}{2r}y^4+\frac{abbq}{2r}y^6\\
\qquad +\frac{3aabq}{2r}y^4+\frac{6abbq}{2r}y^6\ \&c.\\
\qquad +\frac{a^5q}{2\times 4r^3}y^4+\frac{7aacq}{2r}y^6\\
\qquad +\frac{4a^4bq}{2\times 4r^3}y^6\\
\qquad +\frac{3a^4bq}{2\times 4r^3}y^6\\
\qquad +\frac{a^7q}{2\times 4\times 2r^5}y^6\\
-\sqrt{rr-xx}=-r+\frac{aa}{2r}yy+\frac{2ab}{2r}y^4+\frac{bb}{2r}y^6\\
\qquad +\frac{a^4}{2\times 4r^3}y^4+\frac{2ac}{2r}y^6\ \&c.\\
\qquad +\frac{4a^3b}{2\times 4r^5}y^6\\
\qquad +\frac{a^6}{2\times 4\times 2r^5}y^6
\end{array}\right.$$

2°. Il faut supposer chaque terme de cette équation changée égal à zero.

3°. On trouvera par ces équations particulieres $a=+\frac{1}{t}$, $b=-\frac{q}{6rrt^4}$, $c=+\frac{10qq-5qt}{120r^4t^7}$, $e=-\frac{280q^3+504qqt-225qtt}{5040r^6t^{10}}$, &c.

4°. Il faut substituer ces valeurs de a, b, c, &c. dans l'équation supposée $x=ay+by^3+cy^5$ &c. & l'on trouvera

$$x=\frac{y}{t}-\frac{qy^3}{6rrt^4}+\frac{10qq-9qt}{120r^4t^7}y^5-\frac{280q^3+504qqt-225qtt}{5040r^6t^{10}}y^7\ \&c.$$

C'est la valeur de x que l'on cherchoit.

EXEMPLE XIV.

232. POUR trouver la valeur de x dans l'équation $xx - \frac{yydx}{dy} - nn + ny = 0$, 1°. il faut supposer $x = a + by + cy^2 + ey^3$ + &c. les grandeurs a, b, c, e, sont indéterminées.

2°. Il faut prendre par cette équation supposée la valeur de $\frac{dx}{dy}$, & l'on trouvera $\frac{dx}{dy} = b + 2cy + 3eyy +$ &c.

Il faut substituer la valeur de xx & celle de $\frac{dx}{dy}$, dans la proposée, & l'on aura l'équation changée suivante,

$$\begin{array}{lcl} xx & = & aa + 2aby + bbyy + 2bcy^3 + \&c. \\ & & \qquad\qquad\quad + 2acyy + 2aey^3 \\ -\frac{yydx}{dy} & = & \qquad\qquad\quad - by^2 \quad - 2cy^3 - \&c. \\ + ny & = & \qquad + ny \\ - nn & = & - nn \end{array}$$

3°. Il faut supposer chaque terme de cette équation égal à zero, & l'on trouvera par les équations particulieres que donnera cette supposition, $a = n$; $b = -\frac{1}{2}$; $c = -\frac{3}{8n}$; $e = -\frac{9}{16nn}$.

4°. Il faut substituer ces valeurs des indéterminées à leur place dans $x = a + by + cyy +$ &c. & l'on aura $x = n - \frac{1}{2}y - \frac{3}{8n}yy - \frac{9}{16nn}y^3$ &c. C'est la valeur de x que l'on cherchoit.

Seconde maniere de résoudre le même exemple.

SI n étoit moindre que y, il faudroit prendre une suite où les puissances de y se trouvassent dans les dénominateurs des termes, c'est-à-dire, il faudroit que les exposans des puissances de y fussent négatifs, de la maniere suivante.

1°. Il faut supposer $x = ay + by^0 + cy^{-1} + ey^{-2} +$ &c.

2°. Il faut prendre la valeur de $\frac{dx}{dy}$ par le moyen de cette équation, & l'on trouvera $\frac{dx}{dy} = a - cy^{-2} - 2ey^{-3}$ &c.

Il faut substituer les valeurs de xx & de $\frac{dx}{dy}$ dans la proposée, & l'on aura l'équation changée suivante,

$$\begin{array}{lcl} xx & = & aayy + 2aby + bb + 2bcy^{-1} + \&c. \\ & & \qquad\qquad\qquad + 2ac + 2aey^{-1} \\ -\frac{yydx}{dy} & = & - ayy \quad * \quad + c \quad - 2ey^{-1} \\ + ny & = & \qquad + ny \\ - nn & = & \qquad\qquad - nn \end{array}$$

3°. Il faut supposer chaque terme de cette équation égal

à zero, & l'on trouvera par cette ſuppoſition $a = 1$, $b = -\frac{1}{2}n$, $c = +\frac{1}{4}nn$, $e = +\frac{1}{16}n^3$.

4°. Il faut ſubſtituer ces valeurs dans $x = ay + by^0 + cy^{-1}$ + &c. & l'on trouvera $x = y - \frac{1}{2}n + \frac{1}{4}nny^{-1} + \frac{1}{16}n^3y^{-2}$ &c. C'eſt la valeur de x que l'on cherchoit.

EXEMPLE XV. OÙ IL Y A TROIS INCONNUES.

AVERTISSEMENT.

233. IL y a des Problêmes de Geometrie où l'on eſt obligé d'employer trois inconnues x, y, z, avec leurs differences, dans l'équation qui en exprime toutes les conditions : Et il faut remarquer que cette équation qui exprime toutes les conditions du Problême, a été formée par les équations particulieres qui ont été réduites à cette ſeule équation qui les contient toutes ; & que par conſequent s'il y a trois inconnues, ou un plus grand nombre, il doit y avoir des équations particulieres qui expriment à part le raport des unes aux autres : ces équations particulieres doivent être données ou connues dans les exemples où il s'agit de trouver la valeur de l'une des trois inconnues par une ſuite qui ne contienne que les deux autres avec les grandeurs connues de l'équation.

Pour trouver, par exemple, la valeur de x dans l'équation $zdx - xdy - ndy = 0$, ou diviſant par dy, dans l'équation $\frac{zdx}{dy} - x - n = 0$, où l'on ſuppoſe que dans le Problême qui a donné cette équation, l'on a l'équation particuliere $zdz - zdy - ydy = 0$, ou $dz = 1dy + \frac{ydy}{z}$, ou $\frac{dz}{dy} = 1 + \frac{y}{z} = 1 + z^{-1}y$, qui exprime le raport de z à y : pour trouver, dis-je, la valeur de x dans $\frac{zdx}{dy} - x - n = 0$, 1°. il faut ſuppoſer $x = az^{-1}y + bz^{-2}y^2 + cz^{-3}y^3 + ez^{-4}y^4 +$ &c. a, b, c, e, ſont des grandeurs indéterminées.

2°. Il faut prendre la valeur de dx dans cette équation ſuppoſée, & l'on trouvera d'abord $dx = az^{-1}dy - az^{-2}ydz + 2bz^{-2}ydy - 2bz^{-3}y^2dz + 3cz^{-3}y^2dy - 3cz^{-4}y^3dz + 4cz^{-4}y^3dy$ — &c. Il faut ſubſtituer au lieu de dz ſa valeur $1dy + z^{-1}ydy$, & diviſer le tout par dy, & l'on aura

$$\frac{dx}{dy} = az^{-1}dy + 2bz^{-2}y + 3cz^{-3}y^2 + 4ez^{-4}y^3 \text{ \&c.}$$
$$- az^{-2}y - az^{-3}y^2 - 2bz^{-4}y^3$$
$$- 2bz^{-3}y^2 - 3cz^{-3}y^3$$

Il faut substituer les valeurs de $\frac{dx}{dy}$ & de x dans la proposée, & l'on aura l'équation changée.

$$\frac{zdx}{dy} = a + 2bz^{-1}y + 3cz^{-2}y^2 + 4ez^{-3}y^3 \text{ \&c.}$$
$$- az^{-1}y - az^{-2}y^2 - 2bz^{-3}y^3$$
$$- 2bz^{-2}y^2 - 3cz^{-3}y^3$$
$$- x = - az^{-1}y - bz^{-2}y^2 - cz^{-3}y^3$$
$$- n = - n$$

3°. Il faut supposer chaque terme de cette équation égal à zero, ce qui fera trouver $a = n$, $b = n$, $c = \frac{4n}{3}$, $e = \frac{22}{12}n = \frac{11}{6}n$.

4°. Il faut substituer ces valeurs de a, b, c, &c. dans l'équation supposée, & l'on aura $x = nz^{-1}y. + nz^{-2}y^2 + \frac{4}{3}nz^{-3}y^3 + \frac{11}{6}nz^{-4}y^4$ &c. C'est la valeur de x que l'on cherchoit.

Corollaires qui suivent de la premiere méthode du second Problême.

COROLLAIRE I.

Qui contient ce qu'on appelle le retour des suites, ou la maniere de trouver la suite inverse d'une suite donnée.

234. LORSQU'ON a la valeur de x exprimée par une suite des puissances de y, avec des coëficiens connus dans tous les termes, par exemple, $x = ay + byy + cy^3 + ey^4 + fy^5$ &c. ou bien $x = ay + by^3 + cy^5 + ey^7 + fy^9$ &c. ou bien $x = ayy + by^4 + cy^6$ &c. ou de quelqu'autre maniere que ce puisse être; on peut, par la même méthode trouver la valeur de y par une suite des seules puissances de x, dont les coëficiens connus n'auront que les grandeurs connues a, b, c, e, &c. de la suite supposée connue. C'est ce qu'on appelle *le retour des suites.*

On suppose, par exemple, $x = ay + byy + cy^3 + ey^4 + fy^5$ &c. les coëficiens a, b, c, e, f, &c. sont supposez représenter des grandeurs connues pour trouver la puissance de y, l'équation proposée sera $0 = - x + ay + byy + cy^3 + ey^4 + fy^5$ &c.

1°. On supposera $y = lx + mxx + nx^3 + px^4 + qx^5 + rx^6$ &c. les coëficiens l, m, n, &c. sont supposez indéterminez.

2°. On déduira de cette ſuppoſition $yy = llxx + 2lmx^3$

$$\begin{array}{llll} + mmx^4 & + 2lpx^5 & + nnx^6 & \&c. \\ + 2lnx^4 & + 2mnx^5 & + 2lqx^6 & \\ & & + 2mpx^6 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} y^3 = l^3x^3 & + 3llmx^4 & + 3lmmx^5 & + 3llpx^6 & \&c. \\ & & + 3llnx^5 & + 6lmnx^6 & \\ & & & + m^3x^6 & \\ y^4 = l^4x^4 & + 4l^3mx^5 & + 6llmmx^6 & & \&c. \\ & & + 4l^3nx^6 & & \\ y^5 = l^5x^5 & + 5l^4mx^6\ \&c. & & & \\ y^6 = l^6x^6 & \&c. & & & \end{array}$$

On ſubſtituera ces valeurs de y, yy, &c. à la place de y, yy, &c. dans la propoſée, & l'on aura

$$\begin{array}{llllllll} -x & = -x & & & & & & \\ +ay & = +alx & +amxx & +anx^3 & +apx^4 & +aqx^5 & +arx^6 \\ +byy & = & +bllxx & +2blmx^3 & +bmmx^4 & +2blpx^5 & +bnnx^6 \\ & & & & +2blnx^4 & +2bmnx^5 & +2blqx^6 \\ & & & & & & +2bmpx^6 \\ +cy^3 & = & & +cl^3x^3 & +3cllmx^4 & +3clmmx^5 & +3cllpx^6 \\ & & & & & +3cllnx^5 & +6clmnx^6 \\ & & & & & & +cm^3x^6 \\ +ey^4 & = & & & +el^4x^4 & +4el^3mx^5 & +6ellmmx^6 \\ & & & & & & +4el^3nx^6 \\ +fy^5 & = & & & & +fl^5x^5 & +5fl^4mx^6 \\ +gy^6 & = & & & & & +gl^6x^6 \end{array}$$

3°. On ſuppoſera chaque terme de l'équation changée égal à zero, & l'on trouvera par ces équations particulieres

$l = +\frac{1}{a}$, $m = -\frac{b}{a^3}$, $n = \frac{2bb - ac}{a^5}$, $p = \frac{5abc - 5b^3 - aae}{a^7}$,

$q = \frac{14b^4 + 6aabe - 21abbc + 3aacc - a^3f}{a^9}$, $r = -\frac{42b^5 + 84ab^3c}{a^{11}}$

$+ \frac{28aabcc - 28aabbe + 7a^3ce + 7a^3bf - a^4g}{a^{11}}$.

4°. On ſubſtituera ces valeurs des coëficiens indéterminez l, m, n, &c. à leur place dans $y = lx + mxx + nx^3$ &c.

& l'on trouvera $y = \frac{x}{a} - \frac{bxx}{a^3} + \frac{2bb - ac}{a^5}x^3 + \frac{5abc - 5b^3 - aae}{a^7}x^4$

$+ \frac{14b^4 + 6aabe - 21abbc + 3aacc - a^3f}{a^9}x^5$ ———

$\frac{42b^5 + 84ab^3c - 28aabcc - 28aabbe + 7a^3ce + 7a^3bf - a^4g}{a^{11}} x^6$ &c.

C'est la valeur de y que l'on cherchoit.

REMARQUES.

I.

235. ON peut de la même maniere trouver la valeur de y dans les équations $x = ay + by^3 + cy^5$ &c. $x = ayy + by^4 + cy^6$ &c. & dans les autres où les exposans des puissances de y sont en progression arithmetique.

Quand on aura les valeurs de y dans tous ces cas differens, ces valeurs serviront de formules pour trouver tout d'un coup la résolution des Problêmes qui sont les inverses de ceux qui sont exprimez par les équations où l'on a trouvé la valeur de x par une suite qui contenoit les puissances de y, dans les exemples précedens, & dans tous les autres semblables.

Pour en faire voir ici une application, on se servira du
227. neuviéme exemple, qui sert dans la Geometrie à trouver le logarithme hyperbolique, représenté en general par x, de tout nombre donné représenté en general par $1 + y$.

L'on a trouvé le logarithme $x = 1y - \frac{1}{2}yy + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c.

Pour trouver le nombre $1 + y$, qu'on suppose à present inconnu, par une suite qui contienne les puissances du logarithme connu x, il ne faut que supposer $1 = a$, $-\frac{1}{2} = b$, $+\frac{1}{3} = c$, $-\frac{1}{4} = e$, $+\frac{1}{5} = f$, &c. & substituer ces valeurs de a, b, c, &c. dans la formule $y = \frac{x}{a} - \frac{bxx}{a^3} + \frac{2bb - ac}{a^5} x^3$ &c. & l'on trouvera $y = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{2 \times 3}x^3$ &c.

Ajoutant l'unité à chaque membre, on aura $1 + y = 1 + \frac{x}{1} + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{2 \times 3}x^3$ &c. où x étant supposée connue, y l'est aussi. Ce qui étoit proposé.

II.

236. Sans supputer de nouvelles formules pour le retour des suites dans les cas où les exposans des puissances des y, ne sont pas dans la progression naturelle 1, 2, 3, &c. mais suivant la progression 2, 4, 6, &c. ou 1, 3, 5, 7, &c. ou une autre quelconque dont les termes sont des nombres entiers; on peut se servir dans ces cas de la formule seule du 1[er] Corol-

laire; par exemple, la valeur de $y = \frac{x}{a} - \frac{bxx}{a^3} + \frac{2bb - ac}{a^5} x^3$ &c. peut ſervir de formule pour trouver tout d'un coup la valeur de y par les puiſſances de x, dans les équations infinies où les puiſſances de y ſeroient y, y^3, y^5, y^7, &c. en ſuppoſant, 1°. tous les termes de la formule où ſe trouvent les puiſſances pairs de x, comme xx, x^4, x^6, &c. égaux à zero, & retranchez de la formule; & en ſuppoſant, 2°. égaux à zero tous les coëficiens b, e, g, &c. des puiſſances paires de y, comme yy, y^4, y^6, &c. de l'équation ſuppoſée $x = ay + byy + cy^3 + ey^4 + fy^5 + gy^6$ &c.

Pour trouver, par exemple, la valeur de y dans l'équation * $x = y + \frac{1}{6}y^3 + \frac{3}{40}y^5 + \frac{5}{112}y^7 + \frac{35}{1152}y^9$ &c. par le moyen de la formule précedente, on ſuppoſera 1°. les termes $- \frac{bxx}{a^3} + \frac{5abc - 5b^3 - aae}{a^7} x^4$, & les autres où les puiſſances de x ſont pairs, égaux à zero, & retranchez de la formule. *229.

On ſuppoſera, 2°. afin que l'équation propoſée $x = y + \frac{1}{6}y^3$ &c. ſoit repréſentée par $x = ay + byy + cy^3 + ey^4 + fy^5 + gy^6$ &c. $a = 1$, $b = 0$, $c = \frac{1}{6}$, $e = 0$, $f = \frac{3}{40}$, $g = 0$, $h = \frac{5}{112}$, &c.

3°. On ſubſtituera dans les termes de la formule où les puiſſances de x ſont impaires, les valeurs précedentes de a, b, c, &c. & l'on aura $y = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ &c. C'eſt la valeur de y que l'on cherchoit.

On peut de même ſe ſervir de la valeur de $y = \frac{x}{a} - \frac{bxx}{a^3} + \frac{2bb - ac}{a^5} x^3$ &c. pour le retour des ſuites dans les autres cas.

III.

237. Si x n'étoit pas lineaire dans la ſuite directe $x = ay + byy + cy^3 +$ &c. mais qu'il y eût par exemple $x^3 = ay + byy + cy^3 +$ &c. ou en general $x^n = ay + byy + cy^3 +$ &c. il faudroit dans ce cas commencer par élever chaque membre à la puiſſance $\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{n}$, ce qui rendroit x lineaire dans le premier membre, & enſuite on trouveroit la valeur de y exprimée par une ſuite où il n'y auroit que les puiſſances de x avec les coëficiens de l'équation propoſée, comme dans le premier Corollaire.

COROLLAIRE II.

238. SOIT une équation dont chaque membre contienne une ſuite infinie, comme $ax + bxx + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6$ &c.

$= ly + myy + ny^3 + py^4 + qy^5 + ry^6$ &c. dont tous les coëficiens sont supposez représenter des grandeurs connues, & dont chaque membre ne contient qu'une inconnue, c'est-à-dire, que l'inconnue d'un membre ne se trouve point dans l'autre membre : On peut, par la même méthode, trouver la valeur de l'une des deux inconnues, par exemple de x, exprimée par une suite infinie qui ne contiendra que les puissances de y, avec des coëficiens connus. Cette équation peut se marquer ainsi par transposition, $ax + bxx + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6$ &c. $- ly - myy - ny^3 - py^4 - qy^5 - ry^6$ &c. $= 0$.

Pour trouver la valeur de x, 1°. il faut supposer $x = Ay + Byy + Cy^3 + Dy^4 + Ey^5 + Fy^6$ &c. les coëficiens A, B, C, &c. sont indéterminez.

On substituera cette valeur de x, & les puissances de cette valeur à la place de x & de ses puissances dans la proposée, & l'on aura l'équation changée suivante,

$$0 = \left\{ \begin{array}{lllllllll}
ax & = aAy & + aByy & + aCy^3 & + aDy^4 & + aEy^5 & + aFy^6 & \&c. \\
+ bxx & = & + bAAyy & + 2bABy^3 & + bBBy^4 & + 2bADy^5 & + bCCy^6 & \\
 & & & & + 2bACy^4 & + 2bBCy^5 & + 2bAEy^6 & \&c. \\
 & & & & & & + 2bBDy^6 & \\
+ cx^3 & = & & + cA^3y^3 & + 3cA^2By^4 & + 3cABBy^5 & + cB^3y^6 & \&c. \\
 & & & & & + 3cAACy^5 & + 6cABCy^6 & \\
 & & & & & & + 3cAADy^6 & \\
+ dx^4 & = & & & + dA^4y^4 & + 4dA^3By^5 & + 6dAABBy^6 & \&c. \\
 & & & & & & + 4dA^3Cy^6 & \\
+ ex^5 & = & & & & + eA^5y^5 & + 5eA^4By^6 & \&c. \\
+ fx^6 & = & & & & & + fA^6y^6 & \&c. \\
-ly - myy - ny^3 - py^4 \ \&c. & = -ly & - myy & - ny^3 & - py^4 & - qy^5 & - ry^6 & \&c.
\end{array} \right.$$

Il faut supposer chaque terme de l'équation changée égal à zero.

3°. Il faut déterminer par ces équations particulieres les coëficiens indéterminez A, B, C, & l'on trouvera $A = \frac{l}{a}$, $B = \frac{m - bAA}{a}$, $C = \frac{n - 2bAB - cA^3}{a}$, $D = \frac{p - bBB - 2bAC - 3cABB - dA^4}{a}$

On trouvera de même la valeur des autres.

Pour abreger le calcul, on laisse les capitales A, B, C, D, &c. qui sont les coëficiens indéterminez, au lieu de leurs valeurs qui les précedent, & ces capitales les représentent.

4°. Il faut substituer ces valeurs de A, B, C, D, &c. dans $x = Ay + Byy + Cy^3 + Dy^4$ &c.

&

& l'on aura $x = \frac{l}{a}y + \frac{m - bAA}{a}yy + \frac{n - 2bAB - cA^3}{a}y^3$

$+ \frac{p - bBB - 2bAC - 3cABB - dA^4}{a}y^4$ &c.

C'eſt la valeur de x que l'on cherchoit.

REMARQUES.

I.

139. CETTE valeur de x peut ſervir de formule pour trouver tout d'un coup la valeur de x dans les cas où les expoſans des puiſſances des x & des y ſont dans une autre progreſſion arithmetique que celle des nombres naturels 1, 2, 3, &c.

Dans les cas, par exemple, où les expoſans des puiſſances des x & des y ſont impairs, comme 1, 3, 5, 7, &c. il faudra ſuppoſer, 1°. dans l'équation $ax + bxx + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6$ &c. $= ly + myy + ny^3 + py^4 + qy^5 + ry^6$ &c. les coëficiens b, d, f, &c. m, p, r, &c. des puiſſances paires des x & des y, égaux à zero : Et, 2°. retrancher de la formule $x = \frac{l}{a}y + \frac{m - bAA}{a}yy$ &c. tous les termes où les puiſſances de y ſont paires, ſçavoir le 2[e], le 4[e], le 6[e], &c. comme étant égaux à zero.

S'il étoit propoſé, par exemple, de trouver par le moyen de la formule précedente, la valeur de x dans l'équation $x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9$ &c. $= ty + \frac{t}{6}y^3 + \frac{3t}{40}y^5 + \frac{5t}{112}y^7 + \frac{35t}{1152}y^9$ &c. il faudroit ſuppoſer, afin que cette équation fût repréſentée par $ax + bxx + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6$ &c. $= ly + myy + ny^3 + py^4 + qy^5 + ry^6$ &c. que $a = 1$, $b = 0$, $t = \frac{1}{6}$, $d = 0$, $e = \frac{3}{40}$, $f = 0$, &c. $l = t$, $m = 0$; $n = \frac{t}{6}$, $p = 0$, $q = \frac{3t}{40}$, $r = 0$, $s = \frac{5t}{112}$, &c. Il faudroit encore ſuppoſer que les termes des puiſſances paires de y, ſçavoir le 2[e], le 4[e], le 6[e] &c. de la formule $x = \frac{l}{a}y + \frac{m - bAA}{a}yy$ &c. en ſont retranchez, étant égaux à zero ; & ſubſtituer enſuite les valeurs de a, b, c, d, &c. dans la formule, & l'on auroit la valeur de x dans l'équation propoſée exprimée par une ſuite infinie où il n'y a que des y ; ce qui eſt facile.

II.

140. Ce ſecond Corollaire contient le premier, c'eſt-à-dire, la formule que fait trouver ce ſecond Corollaire, contient la

formule ou la valeur de x du premier Corollaire ; il n'y a qu'à mettre dans l'équation $ly + my^2 + ny^3 +$ &c. $= ax + bx^2 + cx^3 +$ &c. x au lieu de y dans le premier membre, & y au lieu de x dans le second membre ; & ſuppoſer dans le premier membre $l = 1$, & $m = 0$, $n = 0$; c'eſt-à-dire, ſuppoſer que le premier membre ne contient que le premier terme, & cette équation deviendra $1x = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5 +$ &c. qui eſt l'équation du premier Corollaire. Ce qui fait voir que la formule du ſecond Corollaire deviendra la formule du premier, en ſuppoſant dans cette formule du ſecond Corollaire x à la place de y, & y à la place de x, & $l = 1$, $m = 0$, $n = 0$, $p = 0$, $q = 0$, &c.

COROLLAIRE III.

241. ON peut par la même méthode trouver la valeur de x dans l'équation $ly + myy + ny^3 + py^4 + qy^5$ &c. $= \alpha x + \beta yx + \gamma yyx + \delta y^3x + \varepsilon y^4x$ &c. $+ bxx + \zeta yxx + \eta yyxx + \theta y^3xx + \kappa y^4xx$ &c. $+ cx^3 + \lambda yx^3 + \mu yyx^3 + \nu y^3x^3 + \rho y^4x^3$ &c. $+ dx^4 + \tau yx^4 + \upsilon yyx^4 + \varphi y^3x^4 + \chi y^4x^4$ &c. dont tous les coëficiens ſont ſuppoſez repréſenter des grandeurs connues, & où les deux inconnues x & y ſont mêlées enſemble ; on peut, dis-je, trouver la valeur de x par une ſuite infinie qui ne contiénne que les puiſſances de y avec des coëficiens connus.

Pour trouver la valeur de x, après avoir mis par tranſpoſition le premier membre dans le ſecond, il faut, 1°. ſuppoſer $x = Ay + Byy + Cy^3 + Dy^4$ &c. les coëficiens A, B, C, &c. ſont indéterminez.

Il faut enſuite ſubſtituer les valeurs de x, xx, y^3, &c. qui ſe déduiſent de cette ſuppoſition, dans l'équation propoſée, & l'on aura l'équation changée qui ſuit,

$$0 = \left\{\begin{array}{lcllll}
+\alpha x & = \alpha Ay & + \alpha Byy & + \alpha Cy^3 & + \alpha Dy^4 & \&c. \\
+\beta yx & = & + \beta Ayy & + \beta By^3 & + \beta Cy^4 & \&c. \\
+\gamma yyx & = & & + \gamma Ay^3 & + \gamma By^4 & \&c. \\
+\delta y^3x & = & & & + \delta Ay^4 & \&c. \\
+bxx & = & + bAAyy & + 2bABy^3 & + bBBy^4 & \&c. \\
 & & & & + 2bACy^4 & \\
+\zeta yxx & = & & + \zeta AAy^3 & + 2\zeta ABy^4 & \&c. \\
+\eta yyxx & = & & & + \eta AAy^4 & \&c. \\
+cx^3 & = & & + cA^3y^3 & + 3cAABy^4 & \&c. \\
+\lambda yx^3 & = & & & + \lambda A^3y^4 & \&c. \\
+dx^4 & = & & & + dA^4y^4 & \&c. \\
-ly - myy - ny^3 - py^4\ \&c. & = -ly & - myy & - ny^3 & - py^4 & \&c.
\end{array}\right.$$

2°. Il faut ſuppoſer chaque terme de l'équation changée égal à zero.

3°. Il faut trouver les valeurs des coëficiens indéterminez A, B, C, &c. par le moyen de ces équations particulieres.

4°. Il faut ſubſtituer ces valeurs de A, B, C, &c. à leur place dans $x = Ay + Byy + Cy^3$ &c. & l'on trouvera

$$x = \frac{l}{a}y + \frac{m - \beta A - bAA}{a}yy + \frac{n - \beta B - \gamma A - 2bAB - \zeta AA - cA^3}{a}y^3$$

$$+ \frac{p - \beta C - \gamma B - \delta A - bBB - 2bAC - 2\zeta AB - \eta AA - 3cAAB - \lambda A^3 - dA^4}{a}y^4 \text{ \&c.}$$

C'eſt la valeur de x que l'on cherchoit.

On a laiſſé pour abreger, les lettres capitales à la place de leurs valeurs.

Cette valeur de x peut ſervir de formule pour réſoudre toutes les équations qui peuvent être repréſentées par la propoſée.

REMARQUE.

242. CE troiſiéme Corollaire contient le ſecond Corollaire, & par conſequent il contient auſſi le premier Corollaire ; c'eſt-à-dire, la formule de ce troiſiéme Corollaire deviendra celle du ſecond Corollaire, en ſuppoſant dans cette formule du troiſiéme Corollaire, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$, $\varepsilon = 0$, $\zeta = 0$, $\eta = 0$, $\theta - 0$, $\kappa = 0$, $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 0$, $\rho = 0$, $\tau = 0$, $\upsilon = 0$, $\varphi = 0$, $\chi = 0$, &c.

COROLLAIRE IV.

243. POUR trouver les formules des Corollaires précedens, on peut ſe ſervir de la méthode de prendre les chifres d'une maniere indéterminée *de M. de Leibnits*, qui eſt dans les Actes de Lipſic*. Par exemple, pour avoir la formule du ſecond Corollaire qui ſert à trouver la valeur de x dans toutes les équations repréſentées par $ax + bxx + cx^3 + dx^4$ &c. $= ly + myy + ny^3 + py^4$ &c. qui eſt l'équation du ſecond Corollaire, où l'on ſuppoſe que les coëficiens a, b, c, &c. l, m, n, repréſentent des grandeurs connues, on ſuppoſera toutes les mêmes équations repréſentées par $10x + 20xx + 30x^3 + 40x^4 + 50x^5$, &c. $= 01y + 02yy + 03y^3 + 04y^4 + 05y^5$, &c.

*de l'an 1700.

Le premier chifre du rang le plus à gauche dans chaque terme repréſente le coëficient de la puiſſance de x dans ce

terme, par exemple dans le terme $30x^3$, le chifre 3 du rang à gauche représente le coëficient du terme où est x^3, dans le terme $40x^4$, le chifre 4 représente le coëficient du terme où est x^4, & ainsi des autres: Et comme il n'y a point de x dans le second membre, il n'y a que des zeros dans le rang à gauche de chaque terme de ce second membre.

Les chifres du premier rang, c'est-à-dire du rang le plus à droite dans chaque terme, représente les coëficiens des termes où sont les puissances de y. Par exemple, dans le terme $03y^3$, le chifre 3 représente le coëficient du terme de l'équation où est y^3, dans le terme $04y^4$, le chifre 4 représente le coëficient du terme où est y^4, & ainsi des autres.

Par exemple, l'équation $10x + 20xx + 30x^3 + 40x^4 + 50x^5$ &c. $= 01y + 02yy + 03y^3 + 04y^4 + 05y^5$ &c. représentant l'équation $ax + bxx + cx^3 + dx^4 + ex^5$, &c. $= ly + myy + ny^3 + py^4 + qy^5$ &c. le chifre 1 du terme $10x$ représente le coëficient a du terme ax représenté par $10x$. Le chifre 2 du terme $20xx$ représente le coëficient b du terme $+ bxx$ représenté par $20xx$, & ainsi des autres. Dans le second membre le chifre 1 du terme $01y$, représente le coëficient l du terme ly représenté par $01y$; le chifre 2 du terme $02yy$, représente le coëficient m du terme myy représenté par $02yy$; & ainsi des autres.

Les valeurs de 2, 3, 4, &c. des chifres de l'équation $10x + 20xx + 30x^3$, &c. $= 01y + 02yy + 03y^3$, &c. servent seulement à faire reconnoître quels sont les coëficiens qu'ils représentent, parceque 2, par exemple, dans $20xx$, étant égal à l'exposant de la puissance xx dans $20xx$, quand dans la résolution on aura 20, cela fera connoître que 20 représente le coëficient du terme où est xx.

De même dans $03y^3$, le chifre étant égal à l'exposant de la puissance y^3, fera connoître dans la résolution que 03 représente le coëficient du terme où est y^3, & ainsi des autres.

Pour trouver une formule qui représente la valeur de x dans les équations représentées par $10x + 20xx + 30x^3$ &c. $= 01y + 02yy + 03y^3$ &c.

1°. Il faut supposer $x = 101y + 102yy + 103y^3 + 104y^4$ &c. les coëficiens 101, 102, &c. sont indéterminez, & ils ont trois rangs pour faire reconnoître que ce sont les coëficiens indéterminez.

Les chifres 1, 2, 3, 4, &c. du premier rang à droite, servent à faire connoître les termes & à les distinguer, le chifre 1 marquant le premier terme où est y, le chifre 2 marquant le second terme où est yy, le chifre 3 marquant le troisieme terme où est y^3, &c.

Il faut substituer dans la proposée $10x + 20xx + 30x^3$ &c. $- 01y - 02yy - 03y^3 = 0$, à la place de x, xx, x^3, &c. leurs valeurs prises dans l'équation supposée indéterminée $x = 101y + 102yy + 103y^3$ &c. & l'on aura l'équation changée qui suit,

$$0=\left\{\begin{array}{lllll}
10\times x & =10\times 101y & +10\times 102yy & +10\times 103\times y^3 & +10\times 104y^4\ \&c.\\
+20\times xx = & & +20\times\overline{101}^{2}\,yy & +(2)\times 20\times 101\times 102y^3 & +20\times\overline{102}^{2}\,y^4\\
 & & & & +(2)\times 20\times 101\times 103y^4\ \&c.\\
+30\times x^3 = & & & +30\times\overline{101}^{3}\,y^3 & +(3)\times 30\times\overline{101}^{2}\times 102y^4\ \&c.\\
+40\times x^4 = & & & & +40\times\overline{101}^{4}\,y^4\ \&c.\\
-01y-02yy-03y^3-04y^4\ \&c. & =-01y & -02yy & -0\,y^3 & -04y^4\ \&c.
\end{array}\right.$$

2°. Il faut supposer chaque terme de l'équation changée égal à zero, ce qui donnera les équations particulieres qui servent à trouver les valeurs des coëficiens indéterminez 101, 102, 103,

3°. Par la premiere de ces équations $10 \times 101 = 01$, on trouvera $101 = \frac{01}{10}$; par la seconde $10 \times 102 + 20 \times \overline{101}^{2} = 02$, on aura $102 = \frac{02 - 20 \times \overline{101}^{2}}{10}$; par la troisiéme $10 \times 103 + (2) \times 20 \times 101 \times 102 + 30 \times \overline{101}^{3} = 03$, on trouvera $103 = \frac{03 - (2) \times 20 \times 101 \times 102 - 30 \times \overline{101}^{3}}{10}$; par la quatriéme $10 \times 104 + 20 \times \overline{102}^{2} + (2) \times 20 \times 101 \times 103 + (3) \times 30 \times \overline{101}^{2} \times 102 + 40 \times \overline{101}^{4} = 04$, on aura $104 = \frac{04 - 20 \times \overline{102}^{2} - (2) \times 20 \times 101 \times 103}{10} - \frac{(3) \times 30 \times \overline{101}^{2} \times 102 - 40 \times \overline{101}^{4}}{10}$. On laisse dans ces valeurs, pour abreger le calcul, les coëficiens indéterminez 101; 102, &c. à la place de leurs valeurs déja trouvées.

4°. Il faut substituer ces valeurs des coëficiens indéterminez 101, 102, &c. à leur place dans l'équation supposée $x = 101y + 102yy + 103y^3$ &c. & l'on aura

$$x = \frac{01}{10}y + \frac{02 - 20 \times \overline{101}^{2}}{10}yy + \frac{03 - (2) \times 20 \times 101 \times 102 - 30 \times \overline{101}^{3}}{10}y^3$$
$$+ \frac{04 - 20 \times \overline{102}^{2} - (2) \times 20 \times 101 \times 103 - (3) \times 30 \times \overline{101}^{2} \times 102 - 40 \times \overline{101}^{4}}{10}y^4 \ \&c.$$

C'est la valeur de x que l'on cherchoit, ou plutôt c'est la

formule generale qui ſert à trouver la valeur de x dans toutes les équations repréſentées par $10x + 20xx + 30x^3$, &c. $= 01y + 02yy + 03y^3$, &c. Il n'y aura plus qu'à ſubſtituer dans cette formule les coëficiens des équations qu'on voudra réſoudre, à la place des coëficiens de la formule qui les repréſentent, & l'on aura la valeur de x que l'on cherche exprimée par une ſuite où il n'y aura que des y.

AVERTISSEMENT.

LES chifres 2 & 3 renfermez par des parentheſes, ne ſont pas repréſentatifs comme les autres, mais veritables; par exemple dans la grandeur $-(2) \times 20 \times 101 \times 102$, le chifre 2 marque qu'il faut prendre le produit $20 \times 101 \times 102$ deux fois; de même 3 dans $-(3) \times 30 \times \overline{101}^2 \times 102$, marque qu'il faut prendre trois fois le produit repréſenté par $30 \times \overline{101}^2 \times 102$, & ainſi des autres.

COROLLAIRE V.

244. POUR avoir une ſemblable formule qui ſerve à trouver la valeur de x dans les équations repréſentées par celle du troiſiéme Corollaire, où les x ſont mêlez avec les y, on ſuppoſera que ces équations ſont repréſentées par l'équation $10x + 11yx + 12yyx + 13y^3x + 14y^4x$, &c. $+ 20xx + 21yxx + 22yyxx + 23y^3xx + 24y^4xx$, &c. $+ 30x^3 + 31yx^3 + 32yyx^3 + 33y^3x^3 + 34y^4x^3$, &c. $+ 40x^4 + 41yx^4 + 42yyx^4 + 43y^3x^4 + 44y^4x^4$, &c. $= 01y + 02yy + 03y^3 + 04y^4 + 05y^5$, &c. Les coëficiens de chaque terme repréſentent les coëficiens donnez des termes de chaque équation donnée, qui eſt repréſentée par celle-ci. Pour les diſtinguer & les reconnoître, il y a deux chifres dans le coëficient de chaque terme, celui qui eſt le plus à gauche eſt égal à l'expoſant de la puiſſance de x, & celui qui eſt le plus à droite eſt égal à l'expoſant de la puiſſance de y par laquelle la puiſſance de x eſt multipliée.

Par exemple, dans $34y^4x^3$, le chifre 3 eſt égal à l'expoſant de la puiſſance x^3, & le chifre 4 eſt égal à l'expoſant de la puiſſance y^4; mais les deux enſemble 34 marquent ſimplement, ou repréſentent le coëficient donné du terme de l'équation donnée où ſe trouve le produit y^4x^3; & ainſi des autres.

Pour trouver la formule qui repréſente la valeur de x, exprimée par les ſeules puiſſances de y, & par les coëficiens donnez repréſentez par ceux de l'équation précedente,

1°. Après avoir mis le ſecond membre dans le premier par tranſpoſition, on ſuppoſera $x = 101y + 102yy + 103y^3 + 104y^4$ &c. les coëficiens 101, 102, &c. ſont indéterminez, & ils ont trois rangs pour les faire reconnoître. Les chifres 1, 2, 3, &c. du rang le plus à droite, ſervent à en diſtinguer les termes, le chifre 1 marquant le premier terme où eſt y, 2 marquant le ſecond où eſt yy, 3 marquant le troiſiéme où eſt y^3 &c.

On ſubſtituera enſuite dans la propoſée $10x + 11yx + 12yyx$ &c. à la place de x, xx, x^3, &c. leurs valeurs priſes dans l'équation indéterminée $x = 101y + 102yy + 103y^3$, &c. & l'on aura l'équation changée qui ſuit,

$$0 = \left\{ \begin{array}{llllll} 10 \times x & = 10 \times 101y & + 10 \times 102yy & + 10 \times 103y^3 & + 10 \times 104y^4 \text{ \&c.} \\ + 11 \times yx & = & + 11 \times 101yy & + 11 \times 102y^3 & + 11 \times 103y^4 \text{ \&c.} \\ + 12yyx & = & & + 12 \times 101y^3 & + 12 \times 102y^4 \text{ \&c.} \\ + 13y^3x & = & & & + 13 \times 101y^4 \text{ \&c.} \\ \text{\&c.} & & & & \\ + 20xx & = & + 20 \times \overline{101}^2 yy & + (2) \times 20 \times 101 \times 102y^3 & + 20 \times \overline{102}^2 y^4 \text{ \&c.} \\ & & & & + (2) \times 20 \times 101 \times 103y^4 \text{ \&c.} \\ + 21yxx & = & & + 21 \times \overline{101}^2 y^3 & + (2) \times 21 \times 101 \times 102y^4 \text{ \&c.} \\ + 22yyxx & = & & & + 22 \times \overline{101}^2 y^4 \text{ \&c.} \\ \text{\&c.} & & & & \\ + 30x^3 & = & & + 30 \times \overline{101}^3 y^3 & + (3) \times 30 \times \overline{101}^2 \times 102y^4 \text{ \&c.} \\ + 31yx^3 & = & & & + 31 \times \overline{101}^3 y^4 \text{ \&c.} \\ \text{\&c.} & & & & \\ + 40x^4 & = & & & + 40 \times \overline{101}^4 y^4 \text{ \&c.} \\ - 01y - 02yy - 03y^3 - 04y^4 \text{ \&c.} & = - 01y & - 02yy & - 03y^3 & - 04y^4 \text{ \&c.} \end{array} \right.$$

2°. On ſuppoſera chaque terme de cette équation changée égal à zero, ce qui donnera les équations particulieres propres à déterminer les coëficiens indéterminez 101, 102, &c.

3°. Par la premiere de ces équations particulieres, qui eſt $10 \times 101 = 01$, on trouvera $101 = \frac{01}{10}$; par la 2ᵉ $10 \times 102 + 11 \times 101 + 20 \times \overline{101}^2 = 02$, on aura $102 = \frac{02 - 11 \times 101 - 20 \times \overline{101}^2}{10}$; par la 3ᵉ $10 \times 103 + 11 \times 102 + 12 \times 101 + (2) \times 20 \times 101 \times 102 + 21 \times \overline{101}^2 + 30 \times \overline{101}^2 = 03$, on aura 103

$$= \frac{03 - 11 \times 102 - 12 \times 101 - (2) \times 20 \times 101 \times 102 - 21 \times \overline{101}^2 - 30 \times \overline{101}^3}{10};$$

par la 4ᵉ $+ 10 \times 104 + 11 \times 103 + 12 \times 102 + 13 \times 101$

$+ 20 \times \overline{102}^{2} + (2) \times 20 \times 101 \times 103 + (2) \times 21 \times 101 \times 102$
$+ 22 \times \overline{101}^{2} + (3) \times 30 \times \overline{101}^{2} \times 102 + 31 \times \overline{101}^{3} + 40 \times \overline{101}^{4}$
$= 04$, on trouvera $104 = \frac{04 - 11 \times 103 - 12 \times 102 - 13 \times 101 - 20 \times \overline{102}^{2}}{10}$
$- \frac{(2) \times 20 \times 101 \times 103 - (2) \times 21 \times 101 \times 102 - 22 \times \overline{101}^{2} - (3) \times 30 \times \overline{101}^{2} \times 102 - 31 \times \overline{101}^{3} - 40 \times \overline{101}^{4}}{10}$

4°. On ſubſtituera ces valeurs des coëficiens indéterminez 101, 102, &c. à leur place dans $x = 101y + 102yy + 103y^3$ &c. & l'on aura $x = \frac{01}{10}y + \frac{02 - 11 \times 101 - 20 \times \overline{101}^{2}}{10} yy$
$+ \frac{03 - 11 \times 102 - 12 \times 101 - (2) \times 20 \times 101 \times 102 - 21 \times \overline{101}^{2} - 30 \times \overline{101}^{3}}{10} y^3$
$+ \frac{04 - 11 \times 103 - 12 \times 102 - 13 \times 101 - 20 \times \overline{102}^{2} - (2) \times 20 \times 101 \times 103}{10} y^4$
$- \frac{(2) \times 21 \times 101 \times 102 - 22 \times \overline{101}^{2} - (3) \times 30 \times \overline{101}^{2} \times 102 - 31 \times \overline{101}^{3} - 40 \times \overline{101}^{4}}{10} y^4$ &c.
C'eſt la valeur de x que l'on cherchoit, ou plutôt c'eſt la formule generale qui ſert à trouver la valeur de x dans toutes les équations repréſentées par l'équation propoſée $10x + 11yx + 12yyx + 13y^3x$ &c.

Il n'y aura qu'à ſubſtituer dans cette formule les coëficiens des équations qu'on voudra réſoudre, à la place des coëficiens de la formule qui les repréſentent, & l'on aura la valeur de x que l'on cherche exprimée par une ſuite où il n'y aura que des y.

Il faut faire ici la même remarque ſur les chifres 2, 3, &c. renfermez par des parentheſes, qu'on a faite dans l'avertiſſement. On a laiſſé dans la formule les grandeurs indéterminées 101, 102, &c. à la place de leurs valeurs, pour abreger le calcul.

COROLLAIRE VI.

245. ON peut rendre plus generaux les Corollaires précedens; par le moyen des formules generales * pour élever deux grandeurs & une ſuite infinie de grandeurs à une puiſſance quelconque; on prendra ici pour exemple le ſecond Corollaire: car au lieu de l'équation du ſecond Corollaire $ax + bxx + cx^3$ &c. $= ly + myy + ny^3$ &c. on peut propoſer l'équation generale $ax^t + bx^{t+1} + cx^{t+2} + dx^{t+3}$ &c. $= ly^t + my^{t+1} + ny^{t+2} + py^{t+3}$ &c. les coëficiens a, b, c, d, l, m, &c. ſont donnez, ou repréſentent des coëficiens donnez, & t repréſente en general une puiſſance quelconque de x & de y.

* 206.

Pour

Pour trouver la valeur de x dans cette équation generale, ou la formule generale qui repréſente cette valeur.

1°. Il faut ſuppoſer $x = Ay + Byy + Cy^3 + Dy^4$ &c. les coëficiens A, B, C, ſont indéterminez.

2°. Il faut trouver par le moyen de la formule generale * les valeurs de x^t, x^{t+1}, x^{t+2}, x^{t+3} &c. dans l'équation $x = Ay + Byy + Cy^3$ &c. en ſubſtituant dans la formule generale t, $t+1$, &c. à la place de n. * 208.

Il faut enſuite ſubſtituer ces valeurs de x^t, x^{t+1}, x^{t+2} &c. à la place de x^t, x^{t+1} &c. dans l'équation propoſée, & l'on aura l'équation changée ſuivante,

$$0 = \left\{ \begin{array}{llll} ax^t & = aA^t y^t & + \frac{t}{1} aA^{t-1} By^{t+1} & + \frac{t}{1} \times \frac{t-1}{2} \times aA^{t-2} BBy^{t+2} \\ & & & + \frac{t}{1} aA^{t-1} Cy^{t+2} \text{ \&c.} \\ +bx^{t+1} = & & + bA^{t+1} y^{t+1} & + \frac{t+1}{1} bA^{t-2} By^{t+2} \text{ \&c.} \\ +cx^{t+2} = & & & + cA^{t+2} y^{t+2} \text{ \&c.} \\ \text{\&c.} & & & \\ -ly^t - my^{t+1} - ny^{t+2} \text{ \&c.} = & -ly^t & -my^{t+1} & -ny^{t+2} \text{ \&c.} \end{array} \right.$$

3°. Il faut ſuppoſer chaque terme de cette équation changée égal à zero, ce qui donnera les équations particulieres dont on a beſoin pour trouver les valeurs des coëficiens indéterminez : On trouvera par la premiere $A^t = \frac{l}{a}$, & $A = \frac{l^{\frac{1}{t}}}{a^{\frac{1}{t}}}$; par la ſeconde, $B = \frac{m - bA^{t+1}}{taA^{t-1}}$, par la troiſiéme, $C = \frac{n - cA^{t+2} - \frac{t+1}{1} bA^{t-2} - \frac{t}{1} \times \frac{t-1}{2} \times aA^{t-2} BB}{taA^{t-1}}$.

On laiſſe, pour abreger le calcul, les lettres A, B, C, &c. à la place de leurs valeurs déja trouvées.

4°. Il faut ſubſtituer ces valeurs de A, B, C, &c. à la place de A, B, C, &c. dans $x = Ay + Byy + Cy^3$, &c. & l'on aura $x = \frac{l^{\frac{1}{t}}}{a^{\frac{1}{t}}} y + \frac{m - bA^{t+1}}{taA^{t-1}} yy +$

$$\frac{n - cA^{t+2} - \frac{t+1}{1} bA^{t-2} - \frac{t}{1} \times \frac{t-1}{2} aA^{t-2} BB}{taA^{t-1}} y^3 \text{ \&c.}$$

C'eſt la valeur de x que l'on cherchoit, ou plutôt c'eſt la formule generale qui la repréſente, & qui ſert à la trouver.

Il n'y aura plus, pour la trouver, qu'à substituer dans cette formule les coëficiens, & les exposans des puissances de x & de y marquez par t des équations qu'on voudra résoudre, représentez par ceux de l'équation generale $ax^t + bx^{t+1} + cx^{t+2}$ &c. $= ly^t + my^{t+1} + ny^{t+2}$ &c.

Remarques où l'on explique la maniere de connoître les exposans des puissances de la quantité y *qui doit distinguer les termes de la suite qui est la valeur de* x.

I.

246. 1°. Il faut que toutes les grandeurs de l'équation proposée dans lesquelles l'inconnue x, dont on cherche la valeur, ne se trouve point, soient employées dans l'équation changée ; c'est-à-dire, il faut que dans les équations particulieres que l'on trouve en supposant chaque terme de l'équation changée égal à zero, chacune des grandeurs de l'équation proposée où x n'est point, serve à déterminer la valeur des indéterminées ; d'où il suit que si quelqu'une de ces grandeurs ne peut servir à déterminer ces valeurs, ce qui arrive lorsqu'elle fait seule un terme de l'équation changée, il est certain que les exposans des puissances de y ne sont pas dans la progression arithmetique qu'il faut, dans la valeur de x que l'on a supposée ; c'est-à-dire, que l'équation proposée ne peut pas être résolue par cette valeur de x qu'on a supposée ; ou bien que l'équation proposée a besoin de préparation pour être résolue par cette méthode du second Problême, & qu'elle ne le peut pas être dans l'état où elle est.

2°. Il faut que dans l'équation changée on puisse faire une équation de chaque terme, qui serve à déterminer les valeurs des indéterminées qu'on a supposées ; & si cela n'arrivoit pas, on en concluroit les mêmes choses que dans l'article précedent ; ainsi il faut que dans chaque terme de l'équation changée il y ait au moins deux grandeurs differentes.

3°. Les exposans des puissances de la quantité qui distingue les termes sont, comme on l'a vû dans les exemples, en progression arithmetique ; & cette progression arithmetique va en augmentant quand ces exposans sont positifs, & en

augmentant pour ainsi dire en négation, quand ils sont tous négatifs : mais quand les premiers exposans des mêmes puissances sont positifs & deviennent au second terme, ou aux autres termes, négatifs ; les positifs vont en diminuant, & les négatifs en augmentant dans leur négation.

4°. On voit par là qu'il suffit de trouver les exposans des puissances de la quantité qui distingue les termes de la valeur de x dans les deux premiers termes, pour avoir tous les autres.

II.

Pour les équations qui n'ont pas de differences.

1°. QUAND il y a une quantité toute connue dans l'équation proposée, comme $2n^3$ dans le premier exemple, & qu'on veut chercher la valeur de x par une suite dont les termes sont distinguez par les puissances de y qui ont leurs exposans positifs ; il faut que le premier terme de la suite indéterminée qu'on doit supposer pour la valeur de x, n'ait qu'une grandeur indéterminée sans aucun y ; ou, ce qui est la même chose, l'exposant de y doit être zero au premier terme ; ainsi on supposera dans ce cas $x = ay^0 +$ &c.

Pour trouver dans ce cas l'exposant de y dans le second terme, il n'y a qu'à considerer attentivement quel exposant doit avoir y dans le second terme de la valeur indéterminée de $x = a + by +$ &c. afin qu'on puisse avoir par la substitution des deux termes $a + by$ considerez comme la valeur de x, à la place de x dans l'équation proposée, un second terme de l'équation changée, qui étant supposé égal à zero, donne une équation par laquelle on puisse déterminer la valeur de b ; & l'on verra dans le premier exemple qu'il faut supposer y^1 dans le second terme de la valeur indéterminée de x. Ainsi l'on voit dans le premier exemple qu'il faut supposer $x = a + by + cy^2 +$ &c. En appliquant le même raisonnement aux cas semblables, on trouvera la suite des exposans de y qu'il faut supposer dans la valeur indéterminée de x.

3°. Quand il n'y a aucun terme qui soit tout connu dans l'équation proposée, comme dans le huitiéme exemple x^6

$$- \frac{5y^{\frac{3}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}} x^5 + \frac{y^3}{n} x^4 - 7nnyyxx + ppy^4 + 6n^3y^3 = 0 ;$$

& qu'on veut trouver la valeur de x par une suite où les exposans de y soient positifs, dans ce cas, y doit être dans le premier terme de la valeur indéterminée de x. Pour avoir l'exposant de y dans le premier terme de cette valeur indéterminée de $x = ay^{\frac{1}{2}} +$ &c. Il faut avoir égard à la grandeur $+ 6n^3y^3$, dans laquelle y^3 est au moindre degré sans qu'il y ait de x, & voir quel est l'exposant qu'il faut donner à y dans le premier terme de $x = ay^{\frac{1}{2}} +$ &c. afin qu'en élevant l'équation indéterminée $x = ay^{\frac{1}{2}} +$ &c. à la sixiéme puissance, $x^6 = a^6y^3 +$ &c. l'on puisse avoir la quantité a^6y^3 qui fasse avec la quantité $6n^3y^3$ de la proposée le premier terme de l'équation changée, de maniere qu'en supposant ce premier terme égal à zero, on puisse déterminer la valeur de la premiere indéterminée a. Or il est évident dans le huitiéme exemple, qu'il faut supposer $x = ay^{\frac{1}{2}} +$ &c. L'on a donc déja le premier exposant de y, il ne faut plus trouver que le second.

4°. Pour trouver ce second exposant de y dans la valeur indéterminée de $x = ay^{\frac{1}{2}} + by^{1+\frac{1}{2}} +$ &c. il faut voir quel est celui qu'on peut supposer pour avoir ces deux choses; la premiere, que la grandeur $+ ppy^4$ de l'équation proposée dans laquelle x n'est point, se puisse trouver dans un des termes de l'équation changée avec quelqu'autre grandeur qui contienne quelques-unes des indéterminées; car sans cela ppy^4 ne pourroit être employée dans la résolution de l'équation: La seconde, qu'en faisant la substitution de $ay^{\frac{1}{2}} + by^{1+\frac{1}{2}} +$ &c. $= x$, à la place de x dans la proposée, on trouve un second terme dans l'équation changée, qui étant supposé égal à zero, donne une équation particuliere par laquelle on puisse déterminer la valeur de la seconde indéterminée b. Or l'on découvre aisément qu'en supposant $x = ay^{\frac{1}{2}} + by^{1+\frac{1}{2}} +$ &c. l'on aura ces deux choses; ainsi $1 + \frac{1}{2}$ est le second exposant de y dans l'équation indéterminée $x = ay^{\frac{1}{2}} + by^{1+\frac{1}{2}} +$ &c. ce qui donne tous les autres suivans.

Ces Remarques suffisent pour apprendre aux Lecteurs celles qu'il faut faire dans tous les cas semblables, pour découvrir les exposans qu'il faut donner aux *y*, dans la valeur indéterminée de *x*, qu'il faut supposer pour en découvrir la veritable valeur par cette méthode; & après s'être rendu cette méthode bien familiere en l'appliquant à beaucoup d'exemples, ils découvriront aisément les exposans qu'il faut donner aux *y*, dans la valeur indéterminée de *x*, lorsqu'on veut chercher cette valeur par des *y* dont les exposans soient négatifs; & ils pourront facilement l'appliquer à toutes les équations qui auront deux ou plusieurs inconnues, sans qu'il soit necessaire d'en grossir ce Traité.

III.

Pour les équations qui ont des differences.

LES Regles que l'on a données dans les articles de la premiere remarque pour prendre les exposans des *y* tels qu'il faut dans la suite indéterminée que l'on doit supposer pour la valeur de *x*, conviennent aussi aux équations qui ont des differences; c'est-à-dire que pour résoudre les équations differentielles, il faut supposer une suite indéterminée égale à *x*, où les exposans des *y* soient en progression arithmetique, & aillent en augmentant, quand ils sont positifs, & en augmentant, pour ainsi dire, en négation, quand ils sont négatifs; & que s'ils commencent par être positifs, ils aillent d'abord en diminuant, & ensuite en augmentant en négation dès qu'ils deviennent negatifs; que ces exposans des *y* dans la suite indéterminée qu'on suppose, soient tels, 1°. que toutes les grandeurs de l'équation proposée se trouvent employées dans l'équation changée, & y servent à déterminer les valeurs des indéterminées, 2°. qu'on puisse faire de chaque terme de l'équation changée une équation particuliere en le supposant égal à zero, laquelle serve à trouver la valeur de quelque indéterminée, & qu'ainsi chaque terme de l'équation changée ait au moins deux grandeurs differentes, 3°. & qu'enfin si on ne peut trouver de progression arithmetique des *y*, soit positive, soit négative, propre à remplir ces deux conditions, on soit assuré que l'équation proposée ne peut pas être résolue telle qu'elle est, du moins si l'on n'y fait quelque préparation.

Mais c'eſt une choſe particuliere aux équations differentielles, qu'en prenant la difference de la ſuite indéterminée $x = ay + by^2 + cy^3 +$ &c. ou $x = a + by + cy^2 + ey^3 +$ &c. ou $x = ay^1 + by^0 + cy^{-1} + ey^{-2} +$ &c. & la diviſant enſuite par la difference dy, l'expoſant de chaque y diminue d'une unité dans la ſuite des expoſans poſitifs, & augmente d'une unité négative dans la ſuite des expoſans négatifs ; & que ſi l'on ſuppoſe pour un terme une grandeur indéterminée ſans y, elle ne ſe trouve plus dans la difference : Cela eſt cauſe que la grandeur, où y a pour expoſant l'unité, ſe trouve ſans y dans la difference, & que celle où il n'y auroit aucun y, ne s'y trouve plus, & eſt devenue zero : C'eſt pourquoi quand il y a une grandeur toute connue ſans y dans l'équation propoſée, il n'eſt pas toujours neceſſaire de ſuppoſer dans la ſuite indéterminée, qui eſt la valeur de x, une grandeur indéterminée ſans y, comme dans les exemples 9e, 10e, 11e, 12e & 13e. Mais dans le 14e exemple on a ſuppoſé un terme qui contenoit une indéterminée ſans y, parceque ſans cela on n'auroit pas pû employer dans l'équation changée les grandeurs $+ ny - nn$ de la propoſée.

Ces remarques ſuffiſent à ceux qui ſe ſont rendu la méthode bien familiere, pour découvrir toujours certainement quels doivent être les expoſans des y dans la ſuite indéterminée, qu'on doit ſuppoſer pour la valeur de x, dans les équations qui n'ont pas de differences, & dans celles qui ont des differences.

SECTION V.

Où l'on explique la ſeconde méthode du ſecond Probléme par le moyen de la transformation qui ſert à diminuer & à augmenter les racines d'une équation.

AVERTISSEMENT.

247. LA ſeconde méthode qu'on va expliquer, fait auſſi trouver pour la valeur de x une ſuite infinie, c'eſt-à-dire, qui a une infinité de termes qui ſont diſtinguez les uns des autres par les puiſſances differentes de la ſeconde inconnue y, dont les

expoſans ſont en progreſſion arithmetique qui va en augmentant quand ils ſont poſitifs, qui va en augmentant, pour ainſi dire, en négation, quand ils ſont négatifs, & qui va d'abord en diminuant quand ils ſont au commencement poſitifs, & qu'ils deviennent enſuite négatifs, & elle augmente après en négation.

On donnera une méthode uniforme pour trouver chaque terme de la valeur de x, c'eſt-à-dire, la maniere de trouver le premier terme de cette valeur, ſera auſſi celle qu'on employera à trouver le ſecond terme, le troiſiéme, & tous les autres. Cela rendra la méthode plus facile à concevoir & à pratiquer ; cependant on enſeignera dans les Remarques comment après avoir trouvé le premier terme de la valeur de x, on peut trouver le ſecond, le troiſiéme, & tous les autres ſuivans par la quatriéme & par la cinquiéme méthode d'approximation du ſixiéme Livre, art. 159. & 166. Voici en quoi conſiſte cette ſeconde méthode.

SECONDE METHODE.

248. POUR trouver le premier terme de la valeur de x; 1°. il faut ſuppoſer une indéterminée a pour le coëficient de ce premier terme ; on ſuppoſera cette indéterminée ſeule, ou, ce qui eſt la même choſe, multipliée par y^0, s'il y a quelque grandeur toute connue ſans y dans l'équation propoſée, & qu'on veuille que les expoſans des puiſſances de y, qui doivent diſtinguer les termes de la ſuite qui eſt la valeur de x, ſoient poſitifs, & aillent en augmentant. S'il n'y a aucune grandeur toute connue ſans y dans la propoſée, on ſuppoſera l'indéterminée a multipliée par une puiſſance de y, qui ſoit telle, qu'en ſubſtituant le produit de a par cette puiſſance de y à la place de x dans la propoſée, l'on puiſſe trouver après la ſubſtitution au moins deux grandeurs differentes dans leſquelles la ſeconde inconnue y ſoit au même moindre degré, pour en faire une équation propre à déterminer la valeur de l'indéterminée a. Cette grandeur indéterminée a ſeule ou multipliée par une puiſſance de y, repréſentera le premier terme de la ſuite qu'on cherche, qui doit être la valeur de x.

2°. Il faut ſubſtituer cette grandeur indéterminée qui repreſente le premier terme de la valeur de x, à la place de x.

dans l'équation proposée ; supposer toutes les grandeurs dans lesquelles y ne se trouve point, après la substitution, égales à zero ; & si y se trouve en toutes, supposer égales à zero celles où y est au même moindre degré ; & trouver la valeur de l'indéterminée a par l'équation que donne cette supposition, & ce sera le premier terme de la valeur de x que l'on cherche, si on a supposé l'indéterminée a seule sans y ; & si on a multiplié l'indéterminée a par y, multipliant cette valeur de a par la même puissance de y par laquelle on avoit multiplié l'indéterminée a, le produit sera le premier terme de la valeur de x.

3°. Il faut supposer le premier terme de la valeur de x qu'on vient de trouver plus une inconnue f, égale à x, & substituer cette valeur de x à sa place dans l'équation proposée, & l'équation qui en viendra sera la premiere transformée, qui servira à trouvet le 2e terme de la valeur de x.

Pour trouver ce second terme de la valeur de x, 1°. il faut prendre une indéterminée b, & la multiplier par une puissance de y, qui soit telle, qu'en substituant le produit de b par cette puissance de y, à la place de f dans la premiere transformée, on ait au moins deux grandeurs differentes dans lesquelles y soit au même moindre degré. Ce produit de b par cette puissance de y, représentera le second terme de la valeur de x que l'on cherche. 2°. Il faut substituer ce produit qui représente le second terme de la valeur de x, à la place de f dans la premiere transformée ; faire une équation des grandeurs dans lesquelles y est au même moindre degré, trouver par cette équation la valeur de l'indéterminée b, & multiplier cette valeur par la même puissance de y par laquelle b est multipliée ; & le produit sera le second terme de la valeur de x. 3°. Il faut supposer ce second terme plus une nouvelle inconnue g, égal à l'inconnue f de la premiere transformée, & substituer cette valeur de f à sa place dans la premiere transformée, & l'équation qui viendra de la substitution sera la seconde transformée ; on trouvera par son moyen le troisiéme terme de la valeur de x, de la même maniere qu'on a trouvé le premier & le second ; & ce troisiéme terme servira à faire une troisiéme transformée, qui fera de même découvrir le quatriéme terme de la valeur de x ; & ainsi de suite à l'infini.

Quand

Quand les expoſans des puiſſances de y qui doivent diſtinguer les termes de la valeur de x, commencent par être poſitifs, & deviennent enſuite négatifs; pour trouver le premier terme de la valeur de x, il faut multiplier la premiere indéterminée a par une puiſſance de y, qui ſoit telle, qu'en ſubſtituant le produit de a par cette puiſſance de y, à la place de x dans l'équation propoſée, on puiſſe avoir au moins deux grandeurs differentes dans leſquelles y ſoit à la même puiſſance la plus élevée : & pour trouver le ſecond terme, il faut multiplier la ſeconde indéterminée b par une puiſſance de y, qui ſoit telle, qu'en ſubſtituant le produit de b par cette puiſſance de y à la place de l'inconnue f de la premiere transformée, dans la premiere transformée, on ait au moins deux grandeurs dans leſquelles y ſoit à la puiſſance la plus élevée; & faire le reſte comme on l'a marqué pour la recherche des deux premiers termes de la valeur de x, quand les expoſans des y de cette valeur ſont poſitifs.

Les expoſans des puiſſances de y qui diſtinguent les termes de la valeur de x, devant être en progreſſion arithmetique, il ſuffit d'avoir les expoſans de y dans les deux premiers termes de cette valeur, pour avoir tous les autres : C'eſt pourquoi quand on a découvert ces deux premiers expoſans, il faut ſuppoſer x égale à une ſuite indéterminée dont chaque terme contienne une indéterminée multipliée par la puiſſance de y qui convient à ce terme. Par exemple, pour trouver la valeur de x dans l'équation $\begin{matrix} x^3 + nyx - y^3 = 0, \\ + nnx - 2n^3 \end{matrix}$ après avoir trouvé que la puiſſance de y qui doit multiplier le premier terme de la valeur de x, doit être y^0, celle qui doit multiplier le ſecond terme, doit être y^1; on ſuppoſera $x = ay^0 + by^1 + cy^2 + dy^3 + ey^4 +$ &c. a, b, c, &c. ſont indéterminées. Si n eſt moindre que y, il faudra que les expoſans des y commencent par être poſitifs à cauſe de y^3, & deviennent enſuite négatifs; & après avoir trouvé que les expoſans de y dans les deux premiers termes de la valeur de x, doivent être $ay^1 + by^0$, on ſuppoſera $x = ay^1 + by^0 + cy^{-1} + dy^{-2} +$ &c. a, b, c, ſont indéterminées.

De même pour avoir la valeur de x dans l'équation $x^6 - 5yx^5 + \frac{y^3x^4}{n} - 7nnyyxx + ppy^4 + 6n^3y^3 = 0$, quand on aura trouvé que les expoſans de y dans le premier & le ſecond

terme de la valeur de x, sont $y^{\frac{1}{2}}$, y^1, on supposera que $x = ay^{\frac{1}{2}} + by^1 + cy^{1+\frac{1}{2}} + dy^2 + ey^{2+\frac{1}{2}} +$ &c. a, b, c, &c. sont indéterminées. Il en est de même des autres exemples.

On aura par ce moyen la suite indéterminée qui représente la valeur de x; il ne faudra plus pour avoir la valeur déterminée de x, que trouver la valeur de chacune des indéterminées, ou de chaque terme indéterminé; on la trouvera cette valeur déterminée, 1°. en substituant ce terme indéterminé dans la proposée, à la place de x, si c'est le premier terme, ou dans la transformée qui convient à ce terme, si ce n'est pas le premier, à la place de l'inconnue de cette transformée; 2°. faisant une équation des grandeurs dans lesquelles y se trouve au même degré le moindre de tous, si les exposans des y sont tous positifs ou tous négatifs; & le plus élevé, si les exposans doivent commencer par être positifs, & devenir ensuite négatifs, & qu'on fasse la recherche des premiers: 3°. déterminant par cette équation la valeur de l'indéterminée du terme que l'on cherche, après quoi ce terme sera connu; & enfin, 4°. en supposant ce terme qu'on vient de connoître plus une nouvelle inconnue égal à l'inconnue de la transformée qui a fait trouver ce terme; & substituant cette valeur à la place de l'inconnue dans cette transformée, on aura la transformée suivante, par le moyen de laquelle on trouvera le terme suivant de la valeur de x.

On ne fera la recherche des deux premiers termes que dans le premier exemple, pour apprendre la maniere de trouver les exposans de y dans les deux premiers termes; & pour abreger dans les autres exemples, on supposera la suite indéterminée de la valeur de x, & on déterminera les valeurs des indéterminées de cette suite de la maniere qu'on vient d'expliquer.

Application de la seconde méthode aux exemples.

EXEMPLE I.

249. SOIT proposé de trouver, par cette seconde méthode la valeur de x dans l'équation

$$\begin{matrix} x^3 + nyx - y^3 \\ + nnx - 2n^3 \end{matrix} = 0.$$

1°. Pour avoir le premier terme de cette valeur, il faut le supposer représenté par l'indéterminée a multipliée par y^0,

c'eſt-à-dire, multipliée par l'unité, ou ſeule ſans y, à cauſe de la grandeur toute connue $2n^3$.

2°. Il faut ſubſtituer a dans la propoſée à la place de x, & l'on aura l'équation changée $\begin{matrix} a^3 + nya - y^3 \\ + nna - 2n^3 \end{matrix} = 0$. Il faut faire une équation de toutes les grandeurs dans leſquelles la ſeconde inconnue y ne ſe trouve point; & trouver par cette équation, qui eſt $a^3 + nna - 2n^3 = 0$, la valeur de a, qui eſt $+n$. C'eſt le premier terme de la valeur de x qu'on cherche: & l'on a déja $x = + ny^0$, ou $x = 1n$.

3°. Il faut ſuppoſer $n + f = x$, & ſubſtituer cette valeur de x à ſa place dans la propoſée, & l'on aura la premiere transformée $\begin{matrix} -y^3 & + nyf & + 3nff + f^3 \\ + nny & + 4nnf & \end{matrix} = 0$, qui ſervira à trouver le ſecond terme de la valeur de x.

Pour trouver ce ſecond terme de la valeur de x, 1°. on le ſuppoſera repréſenté par l'indéterminée b multipliée par y^1, parceque ſubſtituant by^1 à la place de f dans la premiere transformée, on aura les deux grandeurs $+ nny + 4nnby$ dans leſquelles y eſt au même moindre degré. 2°. On ſubſtituera by à la place de f dans la premiere transformée, & faiſant une équation des deux grandeurs $+ nny + 4nnby = 0$, dans leſquelles y eſt au même moindre degré après la ſubſtitution, on trouvera par cette équation $b = -\frac{1}{4}$; mettant cette valeur de b dans le ſecond terme indéterminé by^1 de la valeur de x, on aura pour le ſecond terme de cette valeur $-\frac{1}{4}y^1$; l'on a donc déja $x = + n - \frac{1}{4}y^1$. 3°. On ſuppoſera $-\frac{1}{4}y + g = f$; & ſubſtituant cette valeur de f à ſa place dans la premiere transformée, on aura la ſeconde transformée ſuivante, $\begin{matrix} -\frac{65}{64}y^3 & + \frac{3}{16}y^2g & - \frac{3}{4}ygg & + g^3 \\ -\frac{1}{16}ny^2 & - \frac{1}{2}nyg & + 3ngg & \\ & + 4nng & & \end{matrix} = 0$, qui ſervira à trouver le troiſiéme terme de la valeur de x.

A preſent qu'on a trouvé les expoſans 0 & 1 de y dans les deux premiers termes de la ſuite qui doit être la valeur de x, on a tous les autres; & pour abreger, on ſuppoſera que la valeur indéterminée de x eſt $x = ay^0 + by^1 + cy^2 + dy^3 +$ &c. les valeurs de a & de b ſont déja trouvées; il faut trouver les valeurs des indéterminées ſuivantes, qui ſont c, d, e, &c.

Pour déterminer le troisiéme terme cy^2 de la valeur indéterminée de x, il faut substituer cy^2 à la place de g dans la seconde transformée (il suffit de concevoir cy^2 substitué à la place de g, sans qu'il soit necessaire de le substituer actuellement, ce qu'il faut remarquer pour la suite) & faire une équation des grandeurs $-\frac{1}{16}ny^2 + 4nncy^2 = 0$, dans lesquelles y est au même moindre degré, & l'on trouvera par cette équation $c = +\frac{1}{64n}$; ainsi le troisiéme terme de la suite qui est la valeur de x, est $+\frac{1}{64n}y^2$, & l'on a déja $x = n - \frac{1}{4}y + \frac{1}{64n}y^2$.

Il faut supposer $+\frac{1}{64n}y^2 + h = g$, & substituer cette valeur de g à sa place dans la seconde transformée, & l'équation qui en viendra sera la troisiéme transformée, qui servira à déterminer le quatriéme terme $+ dy^3$ de la valeur indéterminée de x.

Il est évident qu'on peut continuer à l'infini l'approximation de la valeur de x par cette seconde méthode, les operations qu'on vient de faire suffisent pour la faire concevoir clairement.

Seconde maniere de résoudre le même exemple.

250. SI la grandeur n étoit moindre que y, il faudroit trouver une valeur de x qui fût telle, que les y se trouvassent dans les dénominateurs des termes de cette valeur, afin que ces termes fussent des fractions, & allassent en diminuant de valeur; ou, ce qui est la même chose, il faudroit que les exposans des y qui distinguent les termes de la valeur de x, fussent négatifs. Voici la maniere de trouver cette valeur par cette seconde méthode.

Pour trouver le premier terme, il le faut supposer représenté par l'indéterminée a multipliée par y^1; c'est-à-dire, par ay^1; parcequ'en substituant ay à la place de x dans la proposée $\begin{matrix} x^3 + nyx - y^3 = 0 \\ + nnx - 2n^3 \end{matrix}$, on aura dans l'équation changée $\begin{matrix} a^3y^3 + nay^2 - y^3 = 0 \\ + nnay - 2n^3 \end{matrix}$, les deux grandeurs $a^3y^3 - 1y^3$, dans lesquelles y est au même degré le plus élevé. Il faut en faire l'équation $a^3y^3 = 1y^3$, d'où l'on déduira $a = 1$, ainsi le premier terme de la valeur de x est $1y$.

Il faut supposer $y+f=x$, & substituer cette valeur de x à sa place dans la proposée, & l'on trouvera la premiere transformée suivante

$$\begin{aligned}&+ny^2 &&+3y^2f &&+3yff &&+f^3 &&=0,\\ &+n^2y &&+nyf \\ &-2n^3 &&+n^2f\end{aligned}$$

qui servira à trouver le second terme de la valeur de x.

Pour trouver ce second terme, il le faut supposer représenté par l'indéterminée b multipliée par y^0, c'est-à-dire sans y; parcequ'en concevant b substituée à la place de f dans la premiere transformée, on aura les deux grandeurs $+ny^2$ $+3by^2$, dans lesquelles y est au même degré le plus élevé, dont faisant l'équation $3by^2=-ny^2$, on trouvera $b=-\frac{1}{3}n$. L'on a donc déja $x=1y-\frac{1}{3}n$.

Il faut supposer $-\frac{1}{3}n+g=f$, & substituer cette valeur de f à sa place dans la 1[re] transformée, & l'on trouvera la 2[e] transformée

$$\begin{aligned}&+n^2y &&+3y^2g &&+3ygg &&+g^3 &&=0,\\ &-\tfrac{64}{27}n^3 &&-nyg &&-ngg \\ & &&+\tfrac{4}{3}n^2g\end{aligned}$$

qui servira à trouver le troisiéme terme de la valeur de x.

Les exposans de y dans le premier & le second terme de la valeur de x étant connus, on peut supposer pour la valeur de x la suite indéterminée $x=ay+by^0+cy^{-1}+dy^{-2}$, $+ey^{-3}+$ &c. dont les deux premiers termes sont connus. Pour déterminer le troisiéme terme représenté par cy^{-1}, il faut concevoir cy^{-1} substitué à la place de g dans la seconde transformée, & supposer égales à zero les deux grandeurs $+n^2y+3cy=0$, dans lesquelles y est au même degré le plus élevé, d'où l'on déduira $c=-\frac{1}{3}n^2$; ainsi le troisiéme terme de la valeur de x est $-\frac{1}{3}n^2y^{-1}$.

Il faut supposer $-\frac{1}{3}n^2y^{-1}+h=g$, & substituer cette valeur de g à sa place dans la seconde transformée, & l'on trouvera la troisiéme transformée qui suit,

$$\begin{aligned}&-\tfrac{1}{27}n^6y^{-3} &&+\tfrac{1}{3}n^4y^{-2}h &&-n^2y^{-1}h^2 &&+h^3=0\\ &-\tfrac{1}{9}n^5y^{-2} &&+\tfrac{2}{3}n^3y^{-1}h &&-nh^2\\ &-\tfrac{1}{9}n^4y^{-1} &&-\tfrac{2}{3}n^2h &&+3yh^2\\ &-\tfrac{55}{27}n^3 &&-nyh\\ & &&+3y^2h\end{aligned}$$

qui servira à trouver le quatriéme terme de la valeur de x.

Pour trouver ce quatriéme terme de la valeur de x, il faut concevoir dy^{-2} ſubſtituée dans la troiſiéme transformée à la place de h, & ſuppoſer égales à zero les grandeurs $-\frac{55}{27}n^3 + 3d = 0$, dans leſquelles y ne ſe trouve point, ou bien dans leſquelles l'expoſant de y eſt zero, & l'on aura $d = \frac{55}{81}n^3$. Ainſi le quatriéme terme de la valeur de x eſt $+ \frac{55}{81}n^3y^{-2}$, & l'on a déja $x = 1y - \frac{1}{3}ny^0 - \frac{1}{3}n^2y^{-1} + \frac{55}{81}n^3y^{-2}$.

On peut continuer l'approximation à l'infini, en ſuppoſant $+ \frac{55}{81}n^3y^{-2} + i = h$; & ſubſtituant cette valeur de h à ſa place dans la troiſiéme transformée, il en viendra une quatriéme transformée, dans laquelle concevant ey^{-3} ſubſtituée à la place de i, & faiſant une équation des grandeurs dans leſquelles y aura pour expoſant -1, c'eſt-à-dire, dans leſquelles il y aura y^{-1}, on déterminera par cette équation le cinquiéme terme de la valeur de x, & ainſi à l'infini. Les operations que l'on a faites ſuffiſent pour faire clairement concevoir la ſeconde méthode.

REMARQUES.

I.

251. ON peut abreger de beaucoup le calcul de cette méthode, 1°. en n'écrivant point les équations changées, mais en concevant ſeulement que le terme de la ſuite indéterminée qui repréſente la partie de la valeur de x que l'on cherche, eſt ſubſtitué à la place de l'inconnue; car on remarquera aiſément quelles ſont les grandeurs dans leſquelles, après cette ſubſtitution conçue, l'inconnue y ne ſe trouvera point, ou bien celles où y ſe trouvera au moindre degré; & les ſuppoſant égales à zero, on aura l'équation propre à trouver la partie de la racine que l'on cherche.

2°. On peut même remarquer qu'il n'eſt pas neceſſaire d'écrire le terme indéterminé dans les grandeurs qui étant ſuppoſées égales à zero, ſervent à faire trouver la partie de la racine que ce terme indéterminé repréſente.

Par exemple, au lieu d'écrire $a^3 + nna - 2n^3 = 0$, dans la premiere réſolution, on auroit pû former l'équation particuliere qui ſert à trouver la premiere partie de la valeur repréſentée par a, en ſuppoſant les termes $x^3 + nnx - 2n^3 = 0$, ſans mettre a au lieu de x; car l'on auroit également

trouvé par cette équation, que la premiere partie de la valeur de x que l'on cherche, représentée par a, est n, puisque $x - n = 0$ est un diviseur exact de $x^3 + nnx - 2n^3 = 0$, ainsi $x = n$, c'est-à-dire, n est la premiere partie de la valeur de x.

3°. Dans chaque transformée il suffit de diviser la grandeur du dernier terme, dans laquelle y est au moindre degré, par la grandeur du pénultiéme terme où y est aussi au moindre degré; car le quotient, après en avoir changé le signe, sera la partie de la valeur de x que l'on cherche.

Ainsi dans la premiere transformée de la premiere résolution, en divisant $+ nny$ par $+ 4nn$, on a pour quotient $+ \frac{1}{4}y$; & changeant le signe $+$, on aura $- \frac{1}{4}y$ pour la seconde partie de la valeur de x que l'on cherche.

De même dans la seconde transformée de la premiere résolution, en divisant $- \frac{1}{16}nyy$ par $+ 4nn$, on aura $- \frac{1}{64n}yy$; & changeant le signe, on aura $+ \frac{1}{64n}yy$ pour la troisiéme partie de la valeur de x que l'on cherche; & ainsi des autres transformées. La raison de cet abregé est évidente par l'operation même.

Quand on se sera rendu cette méthode bien familiere, on verra qu'on peut negliger dans le calcul beaucoup de grandeurs dans les transformées, ce qu'un peu d'usage apprendra mieux qu'un long discours.

II.

252. Ce qu'on a dit dans le troisiéme article de la Remarque précedente, fait voir que la maniere de trouver la seconde partie, la troisiéme, & toutes les autres parties de la valeur de x par cette seconde méthode, revient à la quatriéme méthode d'approximation du sixiéme Livre, art. 159. c'est-à-dire, qu'après avoir trouvé la premiere partie de la valeur de x qu'on nommera a, par le premier article de la seconde méthode, pour trouver la seconde partie, qu'on nommera b, il faut faire la premiere transformée, en substituant $a + f = x$ à la place de x dans la proposée, diviser le premier terme par le coëficient du second terme de cette transformée, & le quotient, après en avoir changé le signe, sera la seconde partie b de la valeur de x. (On nomme ici le premier terme de chaque transformée celui où n'est point l'in-

connue f de la transformée ; le second celui où l'inconnue f est lineaire ; & ainsi des autres.) Pour avoir la troisiéme partie de la valeur de x, qu'on nommera c, il faut faire la seconde transformée, en substituant $b+g=f$ à la place de f dans la premiere transformée, diviser le premier terme par le coëficient du second terme de cette seconde transformée, & le quotient, après en avoir changé le signe, sera la troisiéme partie c de la valeur de x. On peut continuer cette approximation à l'infini, comme on l'a expliqué dans la quatriéme méthode 159. On peut même rendre chaque partie de la valeur de x plus approchante, comme on l'a enseigné dans cette quatriéme méthode d'approximation.

III.

253. Après avoir trouvé la premiere partie de la valeur de x par le premier article de la seconde méthode, on peut aussi trouver la seconde partie, la troisiéme, & toutes les parties suivantes de la valeur de x, par la cinquiéme méthode d'approximation 166. Par exemple, ayant trouvé que la premiere partie de la valeur de x dans l'équation $\begin{matrix} x^3 + nyx - y^3 \\ + nnx - 2n^3 \end{matrix}$ $= 0$, est $+n$, pour trouver les autres parties, il faut partager l'inconnue x en deux parties ε & z, & supposant $\varepsilon + z = x$; il faut substituer cette valeur de x à sa place dans la proposée, & l'on aura l'équation

$$\begin{matrix} \varepsilon^3 + 3\varepsilon\varepsilon z + 3\varepsilon zz + z^3 = 0. \\ + n\varepsilon y + nyz \\ + nn\varepsilon + nnz \\ - y^3 \\ - 2n^3 \end{matrix}$$

Ce sera la transformée indéterminée qui fera trouver, la premiere partie étant supposée connue, toutes les autres parties de la valeur de x les unes après les autres : ε représentera toutes les parties déja découvertes, & z ce qui reste à en découvrir, & à mesure qu'on découvrira ces parties, pour trouver la suivante, il n'y aura qu'à substituer la somme de toutes les parties déja découvertes à la place de ε, & après la substitution, diviser le premier terme par le coëficient du second terme ; le quotient, après en avoir changé le signe, sera la partie suivante que l'on cherche.

Ainsi pour trouver la seconde partie de la valeur de x, il

il faut substituer la premiere partie n connue par le premier article de la seconde méthode, à la place de ε, & l'on aura $+nny + 4nnz + 3nzz + z^3 = 0$; il faut diviser le premier
$-y^3 \quad + nyz$
terme $+nny - y^3$ par le coëficient $+4nn + ny$ du second terme (il suffit de diviser $+nny$ par $+4nn$) & le quotient $+\frac{1}{4}y$, après en avoir changé le signe, sera la seconde partie $-\frac{1}{4}y$ de la valeur de x que l'on cherche. Pour trouver la troisiéme partie de cette valeur de x, il faut substituer la somme des parties $+n - \frac{1}{4}y$ déja découvertes, à la place de ε dans la transformée indéterminée; & après la substitution, on trouvera cette troisiéme partie comme l'on a trouvé la seconde partie; & ainsi à l'infini.

IV.

254. S'il arrivoit dans la pratique de cette seconde méthode, que le premier terme de quelque transformée, c'est-à-dire, le terme dans lequel l'inconnue de cette transformée ne se trouve point, fût égal à zero, toutes les grandeurs dont ce premier terme est composé se détruisant par des signes contraires, il est évident * que toutes les parties de la valeur de x déja découvertes, en seroient la valeur exacte. * 163.

AVERTISSEMENT.

APRÈS avoir enseigné dans l'énoncé de la seconde méthode, la maniere de trouver les exposans de y dans les termes de la suite qui doit être la valeur de x, pour abreger, dans les exemples suivans, on supposera d'abord la suite indéterminée qui représente la valeur de x.

EXEMPLE I.

255. TROUVER la valeur de x dans l'équation $xx + yy - rr = 0$; c'est l'équation du second exemple de la premiere méthode, art. 184. où l'on a changé zz en xx, & xx en yy.

1°. Il faut supposer $x = a + byy + cy^4 + dy^6 + ey^8$ &c. les grandeurs $a, b, c, d,$ &c. sont indéterminées, & elles représentent avec les puissances de y, les parties de la valeur de x que l'on cherche, & elles serviront à les faire trouver: a est

ſans y dans le premier terme, parcequ'il y a rr dans la propoſée, qui eſt une grandeur toute connue ſans y.

2°. Pour trouver la premiere partie de x repreſentée par a, il faut concevoir a ſubſtituée au lieu de x dans la propoſée, & ſuppoſer $aa - rr$, qui ſont les grandeurs où y n'eſt point, égales à zero; & l'équation $aa - rr = 0$, donnera $a = r$, ainſi r eſt la premiere partie de la valeur de x qu'on cherche.

On ſuppoſera $r + f = x$, f eſt une inconnue; & ſubſtituant $r + f$ dans la propoſée, on aura la premiere transformée

$$r + f = x \quad \left| \begin{array}{r|l} xx & = rr + 2rf + ff \\ +yy & = +yy \\ -rr & = -rr \\ \hline \text{1}^{\text{re}}\ \text{trans-formée.} & +yy + 2rf + ff = 0. \end{array} \right.$$

3°. Pour trouver la ſeconde partie de la valeur de x par cette premiere transformée, laquelle partie eſt repréſentée par byy, il faut concevoir $+ byy$ à la place de f dans cette transformée, & faire l'équation $+yy + 2rbyy = 0$ des grandeurs $+yy + 2rbyy$, dans leſquelles y eſt au même moindre degré, d'où l'on aura $+ 2rbyy = -1yy$; & diviſant chaque membre par $2ryy$, l'on aura $b = -\frac{1}{2r}$, & la ſeconde partie byy ſera $-\frac{1}{2r}yy$. Il faut ſuppoſer $-\frac{1}{2r}yy + g = f$, & ſubſtituant $-\frac{1}{2r}yy + g$ à la place de f dans la transformée, on aura la ſeconde transformée,

$$-\frac{1}{2r}yy + g = f \quad \left| \begin{array}{r|l} ff & = \frac{y^4}{4rr} - \frac{yy}{r}g + gg \\ +2rf & = -yy + 2rg \\ +yy & = +yy \\ \hline \text{2}^{\text{e}}\ \text{trans-formée.} & \frac{y^4}{4rr} - \frac{yy}{r}g + gg = 0. \\ & \qquad + 2rg \end{array} \right.$$

4°. Pour trouver la troiſiéme partie repréſentée par cy^4, on concevra cy^4 à la place de g dans cette ſeconde transformée; & faiſant une équation $+\frac{y^4}{4rr} + 2rcy^4 = 0$, ou bien $+ 2rcy^4 = -\frac{1}{4rr}y^4$, des grandeurs dans leſquelles y eſt au même moindre degré, on diviſera chaque membre par $2ry^4$, & l'on aura $c = -\frac{1}{8r^3}$; par conſequent la troiſiéme partie que l'on cherche eſt $cy^4 = -\frac{1}{8r^3}y^4$.

Il faut ſuppoſer $-\frac{1}{8r^3}y^4+h=g$, h eſt une inconnue, & ſubſtituant $-\frac{1}{8r^3}y^4+h$ à la place de g dans la ſeconde transformée, on aura la troiſiéme transformée.

$$-\frac{1}{8r^3}y^4+h=g \left| \begin{array}{r|l} gg & =+\frac{1}{64r^6}y^8-\frac{1}{4r^3}y^4h+hh \\ -\frac{1}{r}yyg & =+\frac{1}{8r^4}y^6-\frac{1}{r}yyh \\ +2rg & =-\frac{1}{4rr}y^4+2rh \\ +\frac{1}{4rr}y^4 & =+\frac{1}{4rr}y^4 \end{array} \right.$$

3ᵉ transformée.
$$+\frac{1}{64r^6}y^8-\frac{1}{4r^3}y^4h+hh=0.$$
$$+\frac{1}{8r^4}y^6-\frac{1}{r}yyh$$
$$+2rh$$

5°. Pour trouver la quatriéme partie de la valeur de x, repréſentée par dy^6, il faut concevoir dy^6 à la place de h dans cette troiſiéme transformée, & faire l'équation $+\frac{1}{8r^4}y^6+2rdy^6=0$, des grandeurs où y eſt au moindre degré; & diviſant chaque membre de $+2rdy^6=-\frac{1}{8r^4}y^6$ par $2ry^6$, l'on aura $d=-\frac{1}{16r^5}$, & $dy^6=-\frac{1}{16r^5}y^6$ eſt la quatriéme partie de la valeur de x que l'on cherche.

Prenant la ſomme des parties de la valeur de x que l'on a trouvées, on aura $x=r-\frac{1}{2r}yy-\frac{1}{8r^3}y^4-\frac{1}{16r^5}y^6$, &c. On en peut continuer l'approximation tant qu'on voudra.

EXEMPLE III.

256. TROUVER la valeur de x dans l'équation $0=xx-a-by-cyy-dy^3-ey^4$ &c. c'eſt le troiſiéme exemple de la premiere méthode, art. 185.

1°. Il faut ſuppoſer $x=p+qy+ryy+sy^3+ty^4$ &c. les grandeurs p, q, r, s, t, &c. ſont indéterminées; elles repréſentent, avec les puiſſances de y, les parties de la valeur de x que l'on cherche, & elles ſerviront à les faire trouver.

2°. Pour trouver la premiere partie de x repréſentée par p, il faut concevoir p ſubſtituée à la place de x dans la propoſée, & faire une équation des grandeurs $pp-a$, dans leſquelles y ne ſe trouve point, & l'on aura $pp=a$; par conſequent $p=a^{\frac{1}{2}}$.

On ſuppoſera $a^{\frac{1}{2}}+f=x$, & en ſubſtituant $a^{\frac{1}{2}}+f$ à

la place de x dans la proposée, on aura la premiere transformée

$$a^{\frac{1}{2}}+f=x \quad \begin{array}{r|l} xx & = a+2a^{\frac{1}{2}}f+ff \\ -a & = -a \\ -by & = -by \\ -cyy & = -cyy \\ \&c. & = \&c. \end{array}$$

Premiere transformée. $\quad -by+2a^{\frac{1}{2}}f+ff$
$-cyy$
&c.

3°. Pour trouver la seconde partie de la valeur de x, représentée par qy, il faut concevoir qy substituée à la place de f, & faire une équation $2a^{\frac{1}{2}}qy=by$ des deux grandeurs dans lesquelles y est au même moindre degré; & divisant chaque membre par $2a^{\frac{1}{2}}y$, on aura $q=\frac{b}{2a^{\frac{1}{2}}}$; par consequent $qy=\frac{b}{2a^{\frac{1}{2}}}y$ est la seconde partie de la valeur de x.

Il faut supposer $\frac{b}{2a^{\frac{1}{2}}}y+g=f$; & substituant $\frac{b}{2a^{\frac{1}{2}}}y+g$ à la place de f dans la premiere transformée, on aura la seconde transformée,

$$\frac{b}{2a^{\frac{1}{2}}}y+g=f \quad \begin{array}{r|l} ff= & = +\frac{bb}{4a}yy+\frac{b}{a^{\frac{1}{2}}}yg+gg \\ +2a^{\frac{1}{2}}f & = +by \quad +2a^{\frac{1}{2}}g \\ -by= & = -by \\ -cyy= & = -cyy \\ -dy^3 & = -dy^3 \\ \&c. & = \&c. \end{array}$$

Seconde transformée. $\quad +\frac{bb}{4a}yy+\frac{b}{a^{\frac{1}{2}}}yg+gg$
$-cyy \quad +2a^{\frac{1}{2}}g$
$-dy^3$
&c.

4°. Pour trouver la troisiéme partie de la valeur de x, représentée par ryy, il faut concevoir ryy substituée à la place de g dans la seconde transformée, & supposer les grandeurs $+\frac{bb}{4a}yy - cyy + 2a^{\frac{1}{2}}ryy$, dans lesquelles y est au même moindre degré, égales à zero, ce qui donnera l'équation $2a^{\frac{1}{2}}ryy = -\frac{bb}{4a}yy + cyy$; & divisant chaque membre par $2a^{\frac{1}{2}}yy$, on aura $r = -\frac{bb}{8a^{\frac{3}{2}}} + \frac{c}{2a^{\frac{1}{2}}}$; par consequent $ryy = -\frac{bb}{8a^{\frac{3}{2}}}yy + \frac{c}{2a^{\frac{1}{2}}}yy$ est la troisiéme partie de la valeur de x.

Pour continuer l'approximation, on supposera $-\frac{bb}{8a^{\frac{3}{2}}}yy + \frac{c}{2a^{\frac{1}{2}}}yy + h = g$; & en substituant $-\frac{bb}{8a^{\frac{3}{2}}}yy + \frac{c}{2a^{\frac{1}{2}}}yy + h$ à la place de g dans la seconde transformée, on aura la troisiéme transformée, &c.

EXEMPLE IV.

257. TROUVER la valeur de x dans l'équation $0 = x^n - ay - byy - cy^3 - dy^4 - ey^5$ &c. c'est le septiéme exemple de la premiere méthode, art. 222. On va y appliquer la seconde méthode pour faire voir qu'elle peut s'appliquer à toutes les équations qu'on peut résoudre par la premiere méthode, cet exemple contenant une difficulté particuliere.

1°. Il faut supposer $x = py + qyy + ry^3 + sy^4 + ty^5$ &c. p, q, r, s, &c. sont des grandeurs indéterminées, qui représentent avec les puissances de y dont elles sont les coëficiens, les parties de la valeur de x, & servent à les trouver.

2°. Pour trouver la premiere partie de la valeur de x, représentée par py, il faut concevoir py substituée à la place de x dans la proposée, & l'on aura $p^n y^n - ay - byy$ &c. $= 0$.

Afin que l'inconnue y soit au même degré lineaire dans $p^n y^n$ & dans $-ay$, il faut mettre au lieu de $p^n y^n$, la grandeur $y^{n-1} p^n y$ qui lui est égale, & supposer les deux grandeurs

$y^{n-1}p^n y - ay$, dans lesquelles y est au même moindre degré, égales à zero; ce qui donnera l'équation $y^{n-1}p^n y = ay$, d'où l'on déduira $p = a^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}-1}$, & par consequent $py = a^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}}$ est la premiere partie de la valeur de x que l'on cherchoit.

Il faut supposer $a^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}} + f = x$, & substituer $a^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}} + f$ à la place de x dans la proposée, & l'on aura la premiere transformée,

$$x^n = \ast\, ay + \tfrac{n}{1} a^{\frac{n-1}{n}} y^{\frac{n-1}{n}} f + \tfrac{n}{1} \times \tfrac{n-1}{2} a^{\frac{n-2}{n}} y^{\frac{n-2}{n}} ff + \tfrac{n}{1} \times \tfrac{n-1}{2} \times \tfrac{n-2}{3} a^{\frac{n-3}{n}} y^{\frac{n-3}{n}} f^3 \ \&c.$$
$$-ay = -\ast\, ay$$
$$-byy = -byy$$
$$-cy^3 = -cy^3$$
$$\&c. = \&c.$$

Plus on prendra de termes de la puissance $\overline{a^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}} + f}^{\,n} = x^n$, & plus on trouvera de parties de la valeur de x que l'on cherche. Les quatre termes qu'on en a pris dans cette transformée, suffisent pour faire concevoir l'application de la seconde méthode à cet exemple.

$\ast$ Signifie que la grandeur que cette marque précede, est effacée.

3°. Pour trouver la seconde partie de la valeur de x, représentée par qyy, il faut concevoir qyy substituée à la place de f dans la premiere transformée, & supposer les grandeurs $+ \tfrac{n}{1} a^{\frac{n-1}{n}} y^{\frac{n-1}{n}} qyy - byy$, dans lesquelles y est au même moindre degré, égales à zero; ce qui donnera l'équation $\tfrac{n}{1} a^{\frac{n-1}{n}} y^{\frac{n-1}{n}} qyy = byy$; & divisant chaque membre par $\tfrac{n}{1} a^{\frac{n-1}{n}} y^{\frac{n-1}{n}} \times yy$, l'on aura $q = \tfrac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} y^{\frac{1-n}{n}} b$; par consequent $qyy = \tfrac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} y^{\frac{1-n}{n}} byy = \tfrac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} by^{\frac{1+n}{n}}$ est la seconde partie de la valeur de x que l'on cherchoit.

Pour avoir la seconde transformée, il faut remarquer que la seconde partie de la valeur de x qu'on vient de trouver, peut s'exprimer de ces trois manieres $\tfrac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} y^{\frac{1-n}{n}} byy = \tfrac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} by^{\frac{1+n}{n}} = \tfrac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} y^{\frac{1}{n}} by$. Cette derniere est la plus commode pour trouver la seconde transformée. Ainsi on supposera $\tfrac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} y^{\frac{1}{n}} by + g = f$, & on substituera cette valeur de f

à la place de f dans la premiere transformée, & l'on trouvera la seconde transformée,

$$\begin{array}{lcll}
+\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}a^{\frac{n-3}{n}}y^{\frac{n-3}{n}}f^3 & = & +\frac{1}{nn}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}a^{-2}b^3y^4 & +\frac{1}{n}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{1}a^{-\frac{1}{n}-1}y^{-\frac{1}{n}}bby^3g+\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{1}a^{-\frac{2}{n}}y^{-\frac{2}{n}}byygg \\
+\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}a^{\frac{n-2}{n}}y^{\frac{n-2}{n}}ff & = & +\frac{1}{n}\times\frac{n-1}{2}a^{-1}bby^3 & +\frac{n-1}{1}a^{-\frac{1}{n}}y^{-\frac{1}{n}}byyg+\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}a^{\frac{n-2}{n}}y^{\frac{n-2}{n}}gg \\
+\frac{n}{1}a^{\frac{n-1}{n}}y^{\frac{n-1}{n}}f & = & +\text{x}\,byy & +\frac{n}{1}a^{\frac{n-1}{n}}y^{\frac{n-1}{n}}g \\
-byy & = & -\text{x}\,byy & \left(+\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}a^{\frac{n-3}{n}}y^{\frac{n-3}{n}}g\right. \\
-cy^3 & = & -cy^3 & \\
-dy^4 & = & -dy^4 & \\
\&c. & = & \&c. &
\end{array}$$

x Signifie que la grandeur que cette marque précede, est effacée.

4°. Pour trouver la troisiéme partie de la valeur de x, représentée par ry^3, il faut concevoir ry^3 substituée à la place de g dans la seconde transformée, & supposer égales à zero les grandeurs $+\frac{1}{n}\times\frac{n-1}{2}a^{-1}bby^3+\frac{n}{1}a^{\frac{n-1}{n}}y^{\frac{n-1}{n}}ry^3-cy^3$, dans lesquelles y est au même moindre degré ; ce qui donnera l'équation $\frac{n}{1}a^{\frac{n-1}{n}}y^{\frac{n-1}{n}}ry^3=-\frac{1}{n}\times\frac{n-1}{2}a^{-1}bby^3+cy^3$; & divisant chaque membre par $\frac{n}{1}a^{\frac{n-1}{n}}y^{\frac{n-1}{n}}\times y^3$, on trouvera $r=-\frac{1}{n}\times\frac{n-1}{2n}a^{\frac{1-2n}{n}}bby^{\frac{1-n}{n}}+\frac{1}{n}a^{\frac{1-n}{n}}cy^{\frac{1-n}{n}}$; par consequent $ry^3=-\frac{1}{n}\times\frac{n-1}{2n}a^{\frac{1-2n}{n}}bby^{\frac{1+2n}{n}}+\frac{1}{n}a^{\frac{1-n}{n}}cy^{\frac{1+2n}{n}}=-\frac{1}{n}\times\frac{n-1}{2n}a^{\frac{1-2n}{n}}y^{\frac{1}{n}}byy+\frac{1}{n}a^{\frac{1-n}{n}}y^{\frac{1}{n}}cyy$, est la troisiéme partie de la valeur de x que l'on cherchoit.

Pour avoir la troisiéme transformée, il faut supposer $-\frac{1}{n}\times\frac{n-1}{2n}a^{\frac{1-2n}{n}}y^{\frac{1}{n}}byy+\frac{1}{n}a^{\frac{1-n}{n}}y^{\frac{1}{n}}cyy+h=g$, & substituer cette valeur de g à la place de g dans la seconde transformée, & l'on trouvera la troisiéme transformée.

Mais comme il n'y a plus d'autre difficulté dans le reste de l'operation, que celle qui vient de la peine du calcul, il est inutile de la continuer ici, les operations précedentes suffisant pour faire concevoir l'application de la seconde méthode à cet exemple.

Remarques où l'on donne la démonstration de la 2e méthode.

258. ON peut appliquer cette seconde méthode à tous les exemples de la premiere ; & après s'être rendu l'une & l'autre

bien familieres, on verra clairement qu'elles reviennent l'une à l'autre; ainsi la premiere étant démontrée, la seconde est aussi démontrée.

* 252. 253. On a aussi vû dans la seconde & troisiéme remarque, * que cette seconde méthode, la quatriéme méthode d'approximation art. 159, & la cinquiéme méthode d'approximation art. 166, reviennent à une même méthode; ainsi la démonstration de ces deux dernieres démontre aussi la seconde méthode.

Enfin les parties ou les termes de la valeur de x que l'on trouve par cette seconde méthode, deviennent des fractions qui vont toujours en diminuant à mesure qu'on continue l'approximation de la valeur de x; d'où l'on voit qu'après des approximations infinies, le dernier terme ou le terme infinitiéme, pour ainsi parler, doit être zero; comme dans une progression géometrique qui va en diminuant, on regarde le dernier terme comme devenant zero. L'on conçoit donc qu'après des appproximations infinies l'on arriveroit à la racine veritable que l'on cherche; par consequent plus on continuera l'approximation, & plus on approchera de cette veritable valeur de x.

La même méthode peut s'appliquer aux équations qui ont plus de deux inconnues.

AVERTISSEMENT.

COMME l'on pourroit trouver de la difficulté à résoudre par cette seconde méthode les équations qui contiennent des differences, on va faire l'application de cette seconde méthode à ces équations, & l'on verra qu'elle peut leur être appliquée avec la même facilité que la premiere méthode.

EXEMPLE V.

259. TROUVER la valeur approchée de x dans l'équation differentielle $1 - \frac{dx^2}{dy^2} + \frac{yydx^2}{dy^2} = 0$; c'est l'onziéme exemple de la premiere méthode art. 229.

1°. Il faut supposer $x = ay + by^3 + cy^5 + ey^7$ &c. les grandeurs $a, b, c, e,$ &c. sont indéterminées, & elles représentent avec les puissances de y, les parties de la valeur de x que l'on cherche; & elles serviront à les trouver.

2°. Pour trouver la premiere partie de la valeur de x, représentée

représentée par ay, il faut concevoir ay substituée à la place de x dans la proposée de cette maniere ; il faut supposer $x = ay$; en prenant les differences de chaque membre on aura $dx = ady$, & $\frac{dx}{dy} = a$, & $\frac{dx^2}{dy^2} = aa$.

Il faut concevoir aa substituée à la place de $\frac{dx^2}{dy^2}$, les deux grandeurs où y ne se trouve point sont $1 - aa$, il faut les supposer égales à zero, & l'on aura l'équation $aa = 1$; par consequent $a = 1$; ainsi $ay = 1y$ est la premiere partie de la valeur de x que l'on cherchoit.

Pour avoir la premiere transformée, il faut supposer $1y + f = x$, f est une inconnue ou variable ; en prenant les differences de chaque membre, on aura $1dy + df = dx$; & divisant par dy, on aura $1 + \frac{df}{dy} = \frac{dx}{dy}$; & quarrant chaque membre, on aura $1 + \frac{2df}{dy} + \frac{df^2}{dy^2} = \frac{dx^2}{dy^2}$. Il faut substituer dans la proposée $1 - \frac{dx^2}{dy^2} + \frac{yydx^2}{dy^2} = 0$, les valeurs de $\frac{dx^2}{dy^2}$ à la place de $\frac{dx^2}{dy^2}$, on aura la premiere transformée,

$$+\frac{yydx^2}{dy^2} = 1yy + \frac{2yydf}{dy} + \frac{yydf^2}{dy^2}$$
$$-\frac{dx^2}{dy^2} = -1 - \frac{2df}{dy} - \frac{df^2}{dy^2}$$
$$+1 = +1$$

3°. Pour trouver la seconde partie de la valeur de x, représentée par by^3, il faut concevoir by^3 substituée à la place de f dans la premiere transformée.

Pour faire cette substitution, on supposera $by^3 = f$; prenant les differences de chaque membre, on aura $3byydy = df$, & $3byy = \frac{df}{dy}$; & quarrant chaque membre, on aura $9bby^4 = \frac{df^2}{dy^2}$.

Concevant à present $3byy$ substituée à la place de $\frac{df}{dy}$ dans la premiere transformée, & $9bby^4$ à la place de $\frac{df^2}{dy^2}$, les grandeurs dans lesquelles y est au même moindre degré, sont $+ 1yy - 2 \times 3byy$; il faut les supposer égales à zero, & l'on aura l'équation $6byy = 1yy$; divisant chaque membre par $6yy$, on aura $b = \frac{1}{6}$; par consequent $by^3 = \frac{1}{6}y^3$ est la seconde partie de la valeur de x que l'on cherchoit.

Pour avoir la seconde transformée, il faut supposer $\frac{1}{6}y^3 + g = f$, g est une inconnue ; en prenant les differences de chaque membre on aura $\frac{1}{2}yydy + dg = df$, & divisant

par dy, $\frac{1}{2}yy + \frac{dg}{dy} = \frac{df}{dy}$; quarrant chaque membre, on aura $\frac{1}{4}y^4 + \frac{yydg}{dy}\frac{dg^2}{dy^2} = \frac{df^2}{dy^2}$. Il faut à preſent ſubſtituer les valeurs de $\frac{df}{dy}$ & de $\frac{df^2}{dy^2}$ dans la premiere transformée, & l'on aura la ſeconde transformée,

$$+\frac{yydf^2}{dy^2} = +\frac{1}{4}y^6 + \frac{y^4dg}{dy} + \frac{yydg^2}{dy^2}$$

$$-\frac{df^2}{dy^2} = -\frac{1}{4}y^4 - \frac{yydg}{dy} - \frac{dg^2}{dy^2}$$

$$+\frac{2yydf}{dy} = +y^4 + \frac{2yydg}{dy}$$

$$-\frac{2df}{dy} = -\times yy - \frac{2dg}{dy}$$

$$+yy = +\times yy$$

✗ Signifie que la grandeur que cette marque précede eſt effacée.

4°. Pour avoir la troiſiéme partie de la racine repréſentée par cy^5, il faut concevoir cy^5 ſubſtituée à la place de g dans la ſeconde transformée: mais pour faire cette ſubſtitution, il faut ſuppoſer $cy^5 = g$; par conſequent $5cy^4dy = dy$, & $5cy^4 = \frac{dg}{dy}$, & $25ccy^8 = \frac{dg^2}{dy^2}$.

Il faut à preſent concevoir $5cy^4$ ſubſtituée à la place de $\frac{dg}{dy}$ dans la ſeconde transformée, & ſi l'on veut $25ccy^8$ à la place de $\frac{dg^2}{dy^2}$, & $+y^4 - \frac{1}{4}y^4 - 10cy^4$, ou bien $\frac{3}{4}y^4 - 10cy^4$, ſeront les grandeurs dans leſquelles y eſt au même moindre degré; il faut les ſuppoſer égales à zero, ce qui donnera l'équation $10cy^4 = \frac{3}{4}y^4$, diviſant chaque membre par $10y^4$, on aura $c = \frac{3}{40}$; par conſequent $cy^5 = \frac{3}{40}y^5$ eſt la troiſiéme partie de la valeur de x que l'on cherche; l'on a donc déja $x = 1y + \frac{1}{6}y^3 + \frac{3}{40}y^5$ &c. & l'on peut continuer l'approximation tant qu'on voudra; il n'y a plus de difficulté dans le reſte de l'operation que celle qui vient de la peine du calcul.

On réſoudra de la même maniere toutes les équations differentielles.

EXEMPLE VI.

260. **P**OUR trouver la valeur de x dans l'équation differentielle $xxdy^2 - yydydx - nndy^2 + nydy^2 = 0$, il faut d'abord diviſer chaque terme par dy^2, & l'on aura l'équation préparée $xx - \frac{yydx}{dy} - nn + ny = 0$, dans laquelle la difference dy eſt dans le dénominateur. Après cette préparation,

1°. Il faut ſuppoſer $x = a + by + cyy + ey^3$ &c. a, b, c, e, &c. ſont indéterminées, & repréſentent avec les puiſſances de y, les parties de la valeur de x, & elles ſervent à les trouver.

2°. Pour trouver la premiere partie repréſentée par a, il faut concevoir a ſubſtituée à la place de x dans la propoſée, & ſuppoſer $aa - nn = 0$, d'où l'on aura $a = n$; ainſi n eſt la premiere partie de la valeur de x.

Pour avoir la premiere transformée, il faut ſuppoſer $n + f = x$, d'où l'on déduira $df = dx$; & ſubſtituant les valeurs de x & de dx dans la propoſée, on aura la premiere transformée.

Premiere transformée.

$$
\begin{aligned}
xx &= + \times\, nn + 2nf + ff \\
- nn &= - \times\, nn \\
+ ny &= + \quad ny \\
- \frac{yydx}{dy} &= - \frac{yydf}{dy}
\end{aligned}
$$

$\times$ *Signifie que la grandeur que cette marque précede eſt effacée.*

3°. Pour trouver la ſeconde partie de la valeur de x, repréſentée par by, il faut concevoir by ſubſtituée à la place de f, & ſuppoſer enſuite $2nby - ny = 0$, d'où l'on déduira $b = -\frac{1}{2}$, & $by = -\frac{1}{2}y$ ſera la ſeconde partie de la valeur de x que l'on cherche.

Pour avoir la ſeconde transformée, il faut ſuppoſer $-\frac{1}{2}y + g = f$, d'où l'on déduira $-\frac{1}{2}dy + dg = df$, & $-\frac{1}{2} + \frac{dg}{dy} = \frac{df}{dy}$. Il faut enſuite ſubſtituer les valeurs de f & de $\frac{df}{dy}$ à la place de ces grandeurs dans la premiere transformée, & l'on aura la ſeconde transformée.

Seconde transformée.

$$
\begin{aligned}
+ ff &= + \tfrac{1}{4}yy - yg + gg \\
+ 2nf &= - \times\, ny + 2ng \\
+ ny &= + \times\, ny \\
- \frac{yydf}{dy} &= + \tfrac{1}{2}yy - \frac{yydg}{dy}
\end{aligned}
$$

4°. Pour trouver la troiſiéme partie de la valeur de x, repréſentée par cyy, il faut concevoir cyy ſubſtituée à la place de g dans la ſeconde transformée, & ſuppoſer $2ncyy + \frac{1}{4}yy + \frac{1}{2}yy = 0$, d'où l'on déduira $c = -\frac{3}{8n}$, & $cyy = -\frac{3}{8n}yy$ ſera la 3ᵉ partie de la valeur de x que l'on cherche.

Pour avoir la troiſiéme transformée, il faut ſuppoſer $-\frac{3}{8n}yy + h = g$, d'où l'on déduira $-\frac{3}{4n}ydy + dh = dg$, & $-\frac{3}{4n}y + \frac{dh}{dy} = \frac{dg}{dy}$; il faut ſubſtituer dans la ſeconde transformée les valeurs de g & de $\frac{dg}{dy}$, & l'on aura la troiſiéme transformée.

Troiſiéme transformée.

$$
\begin{aligned}
+ gg &= + \frac{9}{64nn}y^4 - \frac{3}{4n}yyh + hh \\
- yg &= + \frac{3}{8n}y^3 \quad - yh \\
+ 2ng &= - \times\, \tfrac{3}{4}yy + 2nh \\
+ \tfrac{3}{4}yy &= + \times\, \tfrac{3}{4}yy \\
- \frac{yydg}{dy} &= + \frac{3}{4n}y^3 - \frac{yydh}{dy}
\end{aligned}
$$

5°. Pour trouver la 4ᵉ partie de la valeur de x, repréſentée par ey^3, il faut concevoir ey^3 ſubſtituée à la place de h, & ſuppoſer $+ 2ney^3 + \frac{3}{8n}y^3 + \frac{3}{4n}y^3$

$= 0$, d'où l'on déduira $e = - \frac{9}{16nn}$, & $ey^3 = - \frac{9}{16nn} y^3$ sera la 4 partie de la valeur de x.

On a donc $x = n - \frac{1}{2} y - \frac{3}{8n} yy - \frac{9}{16nn} y^3$, &c.

On peut continuer l'approximation autant qu'on voudra.

Seconde maniere de résoudre le sixiéme exemple.

261. SI n eſt moindre que y dans l'équation $xx - \frac{yydx}{dy} - nn + ny = 0$, il faut que les expoſans des y qui doivent diſtinguer les termes de la valeur de x, deviennent négatifs ; c'eſt-à-dire, que les y ſe trouvent dans les dénominateurs des termes de la valeur de x, afin que ces termes aillent en diminuant de valeur. Voici la maniere de le faire par la ſeconde méthode.

Il faut ſuppoſer que la valeur indéterminée de x eſt $x = ay + by^0 + cy^{-1} + ey^{-2} + fy^{-3} +$ &c. a, b, c, &c. ſont des indéterminées. Pour en trouver les valeurs, 1°. il faut concevoir le premier terme indéterminé $+ ay$ ſubſtitué à la place de x dans la propoſée, & la difference de ay, qui eſt ady, ſubſtituée à la place de dx ; & faire une équation des grandeurs $aay^2 - ay^2 = 0$, dans leſquelles y eſt au degré le plus élevé ; l'on en déduira $a = 1$, ainſi le premier terme de la valeur de x eſt $1y$, & l'on a déja $x = 1y$.

Il faut pour faire la premiere transformée, ſuppoſer $y + f = x$, d'où l'on déduira $dy + df = dx$, & $1 + \frac{df}{dy} = \frac{dx}{dy}$, & ſubſtituer dans la propoſée ces valeurs de x & de $\frac{dx}{dy}$ à leur place, & l'on aura la premiere transformée

$$\left.\begin{array}{l} + ny \\ - nn \end{array}\right. - \frac{yydf}{dy} + 2yf + ff = 0.$$

Pour trouver le ſecond terme de la valeur de x, repréſenté par by^0, il faut concevoir by^0 ſubſtituée à la place de f dans la premiere transformée, & la difference de by^0, qui eſt zero, à la place de dx ; & faire une équation des grandeurs $+ ny + 2by = 0$, dans leſquelles y eſt au même degré le plus élevé ; on trouvera par cette équation $b = - \frac{1}{2} n$; ainſi le ſecond terme de la valeur de x eſt $- \frac{1}{2} ny^0$.

Pour faire la ſeconde transformée, il faut ſuppoſer $- \frac{1}{2} ny^0 + g = f$, d'où l'on déduira $+ dg = df$; & ſubſtituer les valeurs de f & de df à leur place dans la premiere transformée, & l'on aura la ſeconde transformée

$$- \frac{3}{4} nn - \frac{yydg}{dy} \begin{array}{l} + 2yg \\ - ng \end{array} + gg = 0.$$

Pour trouver le troisiéme terme de la valeur de x, représenté par cy^{-1}, il faut concevoir $+cy^{-1}$ substitué à la place de g dans la seconde transformée, & la difference de $+cy^{-1}$, qui est $-cy^{-2}dy$, substituée à la place de dg; & faire une équation des grandeurs $-\frac{3}{4}nn+3c=0$, dans lesquelles y ne se trouve point, & l'on en déduira $c=+\frac{1}{4}nn$; ainsi le troisiéme terme de la valeur de x est $+\frac{1}{4}nny^{-1}$.

Pour faire la troisiéme transformée, il faut supposer $+\frac{1}{4}nny^{-1}+h=g$, d'où l'on déduira $-\frac{1}{4}nny^{-2}+\frac{dh}{dy}=\frac{dg}{dy}$; & substituer ces valeurs de g & de $\frac{dg}{dy}$ à leur place dans la seconde transformée, & l'on trouvera la troisiéme transformée

$$\begin{array}{llll} -\frac{1}{4}n^3y^{-1} & -\frac{yydh}{dy} & +2yh & +hh=0. \\ +\frac{1}{16}n^4y^{-2} & & -nh & \\ & & +\frac{1}{2}nny^{-1}h & \end{array}$$

Pour trouver le quatriéme terme de la valeur de x, représenté par $+ey^{-2}$, il faut concevoir $+ey^{-2}$ substitué dans la troisiéme transformée à la place de h, & la difference de $+ey^{-2}$, qui est $-2ey^{-3}$, substituée à la place de dh, & faire une équation des grandeurs $-\frac{1}{4}n^3y^{-1}+4ey^{-1}=0$, dans lesquelles y est au même moindre degré négatif; & l'on en déduira $e=+\frac{1}{16}n^3y^{-2}$; ainsi le quatriéme terme de la valeur de x est $+\frac{1}{16}n^3y^{-2}$, & l'on a déja $x=+y-\frac{1}{2}ny^0+\frac{1}{4}n^2y^{-1}+\frac{1}{16}n^3y^{-2}$. On peut continuer l'approximation par cette seconde méthode tant qu'on voudra, & les operations qu'on vient de faire suffisent pour faire clairement concevoir la maniere d'appliquer la seconde méthode aux équations qui contiennent des differences, quand les exposans des y dans la suite qui est la valeur de x, doivent être positifs, & quand ils doivent être négatifs.

On peut facilement appliquer la même méthode aux équations qui contiendront des secondes differences, des troisiémes differences, &c.

Remarques pour les équations differentielles.

I.

262. LA seconde méthode fait trouver, pour les équations differentielles la suite des exposans des y qui doivent distinguer les termes de la valeur de x, avec la même facilité & la même certitude qu'elle les fait découvrir pour les équations qui

n'ont point de differences ; & voici ce qu'on doit considerer pour les avoir. 1°. Les exposans des y dans la valeur de x doivent être en progression arithmetique, & aller en augmentant quand ils sont tous positifs, & en augmentant, pour ainsi dire, en négation, quand ils sont tous négatifs ; & commencer par diminuer quand ils commencent par être positifs, & augmenter ensuite en négation, dès qu'ils deviennent négatifs. 2°. Le premier & le second y, & même tous les suivans, la méthode étant uniforme, doivent être pris tels que les quantitez où l'inconnue x ne se trouve point, viennent à être détruites par d'autres semblables qui ayent des signes contraires dans la suite de l'operation, & qu'elles servent à former les équations qui doivent déterminer les termes de la valeur de x les uns après les autres, de maniere qu'il ne reste pas de ces quantitez qui soient inutiles à la résolution. 3°. Il faut avoir égard à la proprieté particuliere des differences, qui est que la difference d'une quantité constante est zero ; ainsi étant substituée, elle rend égale à zero la quantité où elle est substituée ; que la difference d'un produit qui contient une puissance de y, divisée par dy, est ce produit même où l'exposant de y est diminué d'une unité s'il est positif, & augmenté d'une unité s'il est négatif ; d'où il suit que la difference de ay, divisée par dy, est la seule constante a sans y.

II.

Après ces considerations on n'aura aucune difficulté à trouver les exposans des y dans la valeur de x ; par exemple si les exposans des y doivent être positifs, qu'il y ait une quantité toute connue sans y dans une équation proposée, & que la quantité où est $\frac{dx}{dy}$ n'ait que des constantes, le premier terme de la valeur de x doit avoir y, & il le faut supposer représenté par ay, car la difference de ay divisée par dy étant a, on pourra faire une équation de a & de la quantité de la proposée qui est sans y, laquelle servira à déterminer a. Mais si les mêmes choses étant supposées, l'inconnue y se trouve dans la quantité où est $\frac{dx}{dy}$, comme dans le sixiéme exemple, où l'on a $\frac{yydx}{dy}$, il faut que le premier terme de x soit représenté par la seule constante a sans y.

Dans le même cas des exposans positifs de y dans la valeur

de x, pour avoir l'expoſant de y dans le ſecond terme de la valeur indéterminée de x, dont le coëficient eſt repréſenté par b, il faut le ſuppoſer tel cet expoſant de y dans by, qu'en ſubſtituant by à la place de l'inconnue f dans la premiere transformée, on puiſſe avoir au moins deux quantitez dans leſquelles y ſoit au même moindre degré. On trouvera de même les expoſans des y dans les termes ſuivans: mais comme ils ſont en progreſſion arithmetique, dont on a les deux premiers termes, on les a tous ſans les chercher.

Ces remarques ſuffiſent à ceux qui ſe ſont rendu la ſeconde méthode familiere, pour trouver les expoſans des y dans la valeur de x, dans tous les cas qui peuvent ſe preſenter.

Quand en ſuivant les regles qu'on a preſcrites, on ne peut pas trouver de valeur de x, c'eſt une marque que l'équation ne peut pas être réſolue, du moins ſans préparation.

EXEMPLE VII. *dans lequel il y a trois inconnues.*

263. POUR trouver par la ſeconde méthode la valeur de x dans l'équation $\frac{3dx}{dy} - x - n = 0$, où $\frac{dz}{dy} = 1 + z^{-1}y$; il faut ſuppoſer que la valeur indéterminée de x eſt $x = az^{-1}y + bz^{-2}y^2 + cz^{-3}y^3 + ez^{-4}y^4 +$ &c. a, b, c, &c. ſont indéterminées.

Pour avoir le premier terme de cette valeur repréſenté par $az^{-1}y$, il faut ſubſtituer dans la propoſée $az^{-1}y$, à la place de x, & la difference de $az^{-1}y$ diviſée par dy, (qui eſt $+ az^{-1} - \frac{az^{-2}ydz}{dy}$, & qui, en ſubſtituant au lieu de $\frac{dz}{dy}$ ſa valeur $1 + z^{-1}y$, devient $+ az^{-1} - az^{-2}y - az^{-3}y^2$,) à la place de $\frac{dx}{dy}$; & faire une équation des grandeurs $+ a - n = 0$, dans leſquelles, après la ſubſtitution, y ne ſe trouve point; & l'on déduira de cette équation $a = + n$; ainſi le premier terme de la valeur de x eſt $+ nz^{-1}y$, & l'on a déja $x = + nz^{-1}y$. Pour avoir la premiere transformée, il faut ſuppoſer $+ nz^{-1}y + f = x$; & prenant les differences, & diviſant par dy, on aura $+ nz^{-1} - \frac{nz^{-2}ydz}{dy} + \frac{df}{dy} = \frac{dx}{dy}$, où mettant au lieu de $\frac{dz}{dy}$ ſa valeur $1 + z^{-1}y$, l'on aura $\frac{dx}{dy} = + nz^{-1} - nz^{-2}y - nz^{-3}y^2 + \frac{df}{dy}$; il faut ſubſtituer dans la

proposée les valeurs de x & de $\frac{dx}{dy}$, & l'on aura la premiere transformée $\begin{matrix}-2nz^{-1}y\\-nz^{-2}y^2\end{matrix}+\frac{zdf}{dy}+f=0$.

Pour trouver le second terme de la valeur de x, représenté par $+bz^{-2}y^2$, il faut substituer $+bz^{-2}y^2$ dans la premiere transformée, à la place de f, & la difference de $bz^{-2}y^2$ divisée par dy, (qui est $2bz^{-2}y-\frac{2bz^{-3}y^2dz}{dy}$, & qui, en substituant la valeur de $\frac{dz}{dy}$, devient $+2bz^{-2}y-2bz^{-3}y^2-2bz^{-4}y^3$,) à la place de $\frac{df}{dy}$; & faire une équation des grandeurs $-2nz^{-1}y+2bz^{-1}y=0$, dans lesquelles y est au même moindre degré, & l'on en déduira $b=+n$; ainsi le second terme de la valeur de x est $+nz^{-2}y^2$, & l'on a déja $x=+nz^{-1}y+nz^{-2}y^2$.

Pour avoir la seconde transformée, il faut supposer $+nz^{-2}y^2+g=f$; on en prendra la difference, qu'on divisera par dy, & l'on aura $2nz^{-2}y-\frac{2nz^{-3}y^2dz}{dy}+\frac{dg}{dy}=\frac{df}{dy}$; & en y mettant la valeur de $\frac{dz}{dy}$, on aura $2nz^{-2}y-2nz^{-3}y^2-2nz^{-4}y^3+\frac{dg}{dy}=\frac{df}{dy}$; il faut substituer ces valeurs de f & de $\frac{df}{dy}$ dans la premiere transformée, & l'on trouvera la seconde transformée $\begin{matrix}-4nz^{-2}y^2\\-2nz^{-3}y^3\end{matrix}+\frac{zdg}{dy}+g=0$.

Pour trouver le troisiéme terme de la valeur de x, représenté par $+cz^{-3}y^3$, il faut substituer dans la seconde transformée $+cz^{-3}y^3$ au lieu de g, & la difference de $cz^{-3}y^3$ divisée par dy, (qui est $+3cz^{-3}y^2-\frac{3cz^{-4}y^3dz}{dy}$, & qui, en y mettant la valeur de $\frac{dz}{dy}$, devient $+3cz^{-3}y^2-3cz^{-4}y^3-3cz^{-5}y^4$,) à la place de $\frac{dg}{dy}$; & faire une équation des grandeurs $-4nz^{-2}y^2+3cz^{-2}y^2=0$, dans lesquelles y est au même moindre degré; & l'on en déduira $c=\frac{4}{3}n$; ainsi le troisiéme terme de la valeur de x est $+\frac{4}{3}nz^{-3}y^3$.

Pour avoir la troisiéme transformée, il faut supposer $+\frac{4}{3}nz^{-3}y^3+h=g$; on en déduira, en prenant les differences

rences & divisant par dy, $+ 4nz^{-3}y^2 - \frac{4nz^{-4}y^3dz}{dy} + \frac{dh}{dy}$ $= \frac{dg}{dy}$; & mettant au lieu de $\frac{dz}{dy}$ sa valeur $1 + z^{-1}y$, l'on aura $\frac{dg}{dy} = + 4nz^{-3}y^2 - 4nz^{-4}y^3 - 4nz^{-5}y^4 + \frac{dh}{dy}$. Il faut substituer dans la 2e transformée les valeurs de g & de $\frac{dg}{dy}$; & l'on trouvera la 3e transformée $\begin{matrix} -\frac{22}{3}nz^{-3}y^3 \\ -4nz^{-4}y^4 \end{matrix} + \frac{zdh}{dy} + h = 0$.

On trouvera le 4e terme de la valeur de x, représenté par $ez^{-4}y^4$, en substituant dans cette 3e transformée $+ez^{-4}y^4$ à la place de h, & la difference de $+ez^{-4}y^4$, divisée par dy, (qui est $+ 4ez^{-4}y^3 - \frac{4ez^{-5}y^4dz}{dy}$, & qui, en mettant la valeur de $\frac{dz}{dy}$, devient $+ 4ez^{-4}y^3 - 4ez^{-5}y^4 - 4ez^{-6}y^5$,) à la place de $\frac{dh}{dy}$; & en faisant une équation des grandeurs $-\frac{22}{3}nz^{-3}y^3 + 4ez^{-3}y^3 = 0$, dans lesquelles y est au même moindre degré, on en déduira $e = +\frac{22}{12}n = +\frac{11}{6}n$; ainsi le 4e terme de la valeur de x est $+\frac{11}{6}nz^{-4}y^4$, & l'on a déja $x = nz^{-1}y + nz^{-2}y^2 + \frac{4}{3}nz^{-3}y^3 + \frac{11}{6}nz^{-4}y^4$.

On peut continuer l'approximation de la valeur de x tant qu'on voudra; les operations qu'on vient de faire suffisent pour faire clairement concevoir la maniere d'y appliquer la seconde méthode.

SECTION VI.

Application des méthodes du second Problême aux équations déterminées, c'est-à-dire aux équations qui n'ont qu'une seule inconnue.

AVERTISSEMENT.

LES méthodes du second Problême peuvent s'appliquer aux équations qui n'ont qu'une seule inconnue, en prenant une des lettres connues de l'équation pour tenir lieu de la seconde inconnue y; & quand les lettres connues de la proposée n'ont pas les dispositions qu'il faut pour ces méthodes, il faut la leur donner, & préparer l'équation comme on le verra dans le second exemple.

EXEMPLE I.

264. TROUVER la valeur approchée de x dans l'équation $x^3 + npx - p^3 = 0$, & continuer l'approximation à l'infini.
$+ nnx - 2n^3$

On prendra la lettre connue p pour tenir lieu de la seconde inconnue y, & ensuite on trouvera la valeur approchée de x par laquelle on voudra des deux méthodes du second Problême.

PREMIERE MÉTHODE.

1°. ON supposera $x = a + bp + cpp + dp^3 + ep^4$ &c. a, b, c, d, &c. sont des grandeurs indéterminées.

On prendra les valeurs de x par le moyen de cette équation indéterminée, on les substituera dans la proposée à la place de x, & on aura l'équation changée suivante,

$$0 = \left\{ \begin{array}{lllll} x^3 = + a^3 & + 3aabp & + 3abbpp & + b^3p^3 & \&c. \\ & & + 3aacpp & + 6abcp^3 & \\ & & & + 3aadp^3 & \\ + npx = & + nap & + nbpp & + ncp^3 & \&c. \\ + nnx = + nna & + nnbp & + nncpp & + nndp^3 & \&c. \\ - p^3 = & & & - p^3 & \\ - 2n^3 = - 2n^3 & & & & \end{array} \right.$$

2°. On supposera chaque terme de cette équation changée égal à zero; ce qui donnera les équations particulieres dont on a besoin pour trouver les valeurs des indéterminées a, b, c, &c.

3°. Par la premiere de ces équations $a^3 + nna - 2n^3 = 0$, on trouvera $a = n$, car $a - n = 0$, est un diviseur exact de cette équation.

En substituant n à la place de a dans la seconde $3aab + nnb = - na$, on trouvera $b = - \frac{1}{4}$, & $bp = - \frac{1}{4}p$.

En substituant les valeurs de a & de b dans la troisiéme $3aac + nnc = - 3abb - nb$, on trouvera $c = + \frac{1}{64n}$.

En substituant les valeurs de a, b, c, dans la quatriéme $3aad + nnd = - b^3 - 6abc - nc + 1$, on trouvera $d = + \frac{131}{512nn}$.

4°. On substituera les valeurs de a, b, c, d, &c. dans $x = a + bp + cpp + dp^3$ &c. & l'on aura $x = n - \frac{1}{4}p + \frac{1}{64n}pp + \frac{131}{512nn}p^3$ &c. On peut continuer l'approximation autant qu'on voudra.

SECONDE METHODE.

POUR trouver par la seconde méthode la valeur approchée de x dans l'équation $x^3 + npx - p^3 = 0$,
$+ nnx - 2n^3$

1°. On supposera $x = a + bp + cpp + dp^3$ &c. les grandeurs a, b, c, d, &c. sont indéterminées, & elles représentent avec les puissances de p, les parties de la valeur de x que l'on cherche, & elles servent à les trouver.

2°. Pour avoir la premiere partie de la valeur de x, représentée par a, il faut concevoir a substituée à la place de x dans la proposée, & supposer les grandeurs $a^3 + nna - 2n^3$, dans lesquelles p ne se trouve point, égales à zero, & l'on aura l'équation $a^3 + nna - 2n^3 = 0$, dont $a - n = 0$ est un diviseur exact; ainsi $a = n$ est la premiere partie de la valeur de x que l'on cherchoit.

Pour avoir la premiere transformée, on supposera $n + f = x$; on substituera $n + f$ à la place de x dans la proposée, & l'on aura la premiere transformée,

$$n + f = x \qquad \begin{aligned} x^3 &= \text{x}\, n^3 + 3nnf + 3nff + f^3 \\ + npx &= + nnp + npf \\ + nnx &= + \text{x}\, n^3 + nnf \\ - p^3 &= - p^3 \\ - 2n^3 &= - \text{x}\, 2n^3 \end{aligned}$$

x Signifie que la grandeur que cette marque précede, est effacée.

3°. Pour trouver la seconde partie de la valeur de x représentée par bp, il faut concevoir bp substituée à la place de f dans la premiere transformée, & supposer égales à zero les grandeurs $4nnbp + nnp = 0$; ce qui donnera $b = -\frac{1}{4}$, & $bp = -\frac{1}{4}p$ est la seconde partie de la valeur de x que l'on cherchoit.

Pour avoir la seconde transformée, on supposera $-\frac{1}{4}p + g = f$; on substituera $-\frac{1}{4}p + g$ à la place de f dans la premiere transformée, & on aura la seconde transformée,

$$-\tfrac{1}{4}p + g = f, \qquad \begin{aligned} f^3 &= -\tfrac{1}{64}p^3 + \tfrac{3}{16}ppg - \tfrac{3}{4}pgg + g^3 \\ + 3nff &= + \tfrac{3}{16}npp - \tfrac{3}{2}npg + 3ngg \\ + npf &= - \tfrac{1}{4}npp + npg \\ + 4nnf &= - \text{x}\, nnp + 4nng \\ + nnp &= + \text{x}\, nnp \\ - p^3 &= - p^3 \end{aligned}$$

4°. Pour trouver la troisiéme partie de la valeur de x, représentée par cpp, il faut concevoir cpp substituée à la place de g dans la seconde transformée, & supposer égales à zero les grandeurs $4nncpp - \frac{1}{16}npp = 0$; ce qui donnera $c = + \frac{1}{64n}$, & $cpp = \frac{1}{64n}pp$ sera la troisiéme partie de la valeur de x que l'on cherchoit.

Pour avoir la troisiéme transformée, on supposera $\frac{1}{64n}pp + h = g$; & on substituera $\frac{1}{64n}pp + h$ à la place de g dans la seconde transformée, & l'on aura la troisiéme transformée,

$$\begin{array}{llll} + \frac{1}{262144n^3}p^6 & + \frac{3}{4096nn}p^4h & + \frac{3}{64n}pphh & + h^3 = 0. \\ - \frac{3}{12384nn}p^5 & - \frac{3}{128n}p^3h & - \frac{3}{4}phh & \\ + \frac{15}{4096n}p^4 & + \frac{9}{32}pph & + 3nhh & \\ - \frac{131}{128}p^3 & - \frac{1}{2}nph & & \\ & + 4nnh & & \end{array}$$

5°. Pour trouver la quatriéme partie de la valeur de x, représentée par dp^3, il faut concevoir dp^3 substituée à la place de h, & supposer égales à zero les grandeurs $4nndp^3 - \frac{131}{128}p^3 = 0$, d'où l'on déduira $d = + \frac{131}{512nn}$; par consequent $dp^3 = + \frac{131}{512nn}p^3$ est la quatriéme partie de la valeur de x que l'on cherchoit.

L'on a donc $x = + n - \frac{1}{4}p + \frac{1}{64n}pp + \frac{131}{512nn}p^3$ &c.

On peut continuer l'approximation autant qu'on voudra.

AVERTISSEMENT.

Si n étoit moindre que p, il faudroit trouver une valeur de x dans laquelle les p fussent au dénominateur; c'est-à-dire, il faudroit que les exposans des p dans la suite qui est la valeur de x, fussent négatifs; ce qui est si facile à faire par la premiere & par la seconde méthode du second Problême, après tous les exemples ausquels on les a appliquées, qu'il est inutile de s'y arrêter.

Cet exemple suffit pour faire entierement concevoir la maniere d'appliquer les deux méthodes du second Problême aux équations qui n'ont qu'une seule inconnue, lorsque la lettre connue qui tient lieu de la seconde inconnue y, se trouve disposée comme il faut dans l'équation proposée.

Voici un second exemple où il faut préparer l'équation proposée, où l'on apprendra la maniere de la préparer.

EXEMPLE II.

265. TROUVER la valeur approchée de x dans l'équation $x^3 - 3nnx + n^3 = 0$.

On ne ſçauroit appliquer les méthodes du ſecond Problême à cette équation, dont les racines ſont incommenſurables. Il faut la préparer, c'eſt-à-dire, il faut la changer en une équation qui ſoit la même, de maniere que les coëficiens ou produits connus de la propoſée conſervent toujours la même valeur dans ce changement, & que cependant les grandeurs de ces produits connus ſoient tels qu'on y puiſſe appliquer les méthodes du ſecond Problême. Par exemple, on pourra changer la propoſée $x^3 - 3nnx + n^3 = 0$, en cette équation $x^3 - 3pqx + ppr = 0$, qui ſera la même que la propoſée en ſuppoſant $-3pq = -3nn$, & $+ppr = +n^3$. Ce changement ſe fera dans cet exemple, en prenant une grandeur connue arbitraire p tant petite qu'on voudra, & faiſant cette proportion $p . n :: n . q$, on aura $-3pq = -3nn$; mettant pq au lieu de nn dans n^3, on aura $n^3 = npq$; & faiſant $p . n :: q . r$, on aura $pr = nq$, & par conſequent $ppr = n^3$.

Pour trouver à preſent la valeur approchée de x dans l'équation préparée $x^3 - 3pqx + ppr = 0$, on prendra p pour tenir lieu de la ſeconde inconnue y, & on ſe ſervira de celle qu'on voudra des deux méthodes du ſecond Problême. On employera ici la ſeconde.

1°. On ſuppoſera $x = ap + bpp + cp^3$ &c. a, b, c, ſont des grandeurs indéterminées, & elles repréſentent les parties de la valeur de x que l'on cherche.

2°. Pour trouver la premiere partie repréſentée par ap, il faut concevoir ap ſubſtituée à la place de x dans l'équation préparée, & ſuppoſer $-3appq + ppr = 0$, d'où l'on déduira $a = \frac{1}{3q}r$; & par conſequent $ap = \frac{r}{3q}p$ eſt la premiere partie de la valeur de x que l'on cherchoit.

Pour avoir la premiere transformée, on ſuppoſera $\frac{r}{3q}p + f = x$, & on ſubſtituera $\frac{r}{3q}p + f$ à la place de x, & l'on aura la premiere transformée,

$$\begin{array}{l} \frac{r^3}{27q^3}p^3 + \frac{rr}{qq}ppf + \frac{r}{q}pff + f^3 = 0. \\ \qquad -3pqf \end{array}$$

3°. Pour trouver la ſeconde partie de la valeur de x repréſentée par bpp, il faut concevoir bpp ſubſtituée à la place de f, & ſuppoſer $\frac{r^3}{27q^3}p^3 - 3bp^3q = 0$, d'où l'on déduira $b = + \frac{r^3}{81q^4}$; par conſequent $\frac{r^3}{81q^4}pp$ eſt la ſeconde partie de la valeur de x que l'on cherchoit. Le reſte de l'operation eſt facile, & il eſt inutile d'en groſſir ce traité.

REMARQUE.

266. LORSQU'EN cherchant la premiere partie de la valeur de x dans les équations qui ont deux inconnues x & y, on trouve qu'il faut réſoudre une équation compoſée dont la racine eſt incommenſurable, on pourra préparer l'équation comme dans l'exemple précedent, & enſuite on trouvera la valeur approchée de la premiere partie de la valeur de x que l'on cherchoit, par la même méthode; ou bien on la trouvera cette valeur approchée par le premier Problême.

Fin du premier Volume.

APPROBATION.

NOus avons lû par l'ordre de Monſeigneur le Garde des Sceaux les deux Ouvrages de Mathematique du Pere REYNEAU, Prêtre de l'Oratoire, intitulez : l'un, *La Science du Calcul*, &c. & l'autre l'*Analyſe Démontrée*, &c. Nous avons déja approuvé avec éloge ces deux Ouvrages dans une premiere édition, & nous avons eu le plaiſir de voir notre Approbation ſuivie de celle du Public ; l'eſtime des Sçavans & cette nouvelle lecture nous ont confirmé de plus en plus dans le jugement avantageux que nous en avons porté. Fait à Paris le 4 Decembre 1726. *Signé*, SAURIN.

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS PAR LA GRACE DE DIEU, ROY DE FRANCE ET DE NAVARRE ; à nos amez & feaux Conſeillers les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaaires de notre Hôtel, Grand Conſeil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Juſticiers qu'il appartiendra, SALUT. Notre bien amé GABRIEL-FRANÇOIS QUILLAU Fils, Imprimeur & Libraire-Juré de l'Univerſité à Paris, Nous ayant fait remontrer qu'il ſouhaiteroit imprimer ou faire imprimer & donner au Pubilc *La Science du Calcul des Grandeurs ou les Elemens des Mathematiques & l'Analyſe démontrée*, s'il Nous plaiſoit lui accorder nos Lettres de Privilege ſur ce neceſſaires, offrant pour cet effet de le faire imprimer en bon papier & beaux caracteres ſuivant la feuille imprimée & attachée pour modele ſous le contre-Scel des Preſentes. A CES CAUSES, voulant traiter favorablement ledit Expoſant, Nous lui avons permis & permettons par ces Preſentes de faire imprimer ledit Ouvrage ci-deſſus ſpécifié en un ou pluſieurs volumes conjointement ou ſeparément, & autant de fois que bon lui ſemblera ſur papier & caracteres conformes à ladite feuille imprimée & attachée pour modele ſous notredit contre-Scel, & de le vendre, faire vendre & débiter par tout notre Royaume pendant le tems de dix années conſécutives, à compter du jour de la date deſdites Preſentes : Faiſons défenſes à toutes ſortes de perſonnes de quelque qualité & condition qu'elles ſoient d'en introduire d'impreſſion étrangere dans aucun lieu de notre obéiſſance ; comme auſſi à tous Libraires-Imprimeurs & autres, d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre, debiter ni contrefaire ledit Ouvrage ci-deſſus expoſé en tout ni en partie, ni d'en faire aucuns Extraits ſous quelque prétexte que ce ſoit, d'augmentation, correction, changement de titre ou autrement, ſans la permiſſion expreſſe & par écrit dudit Expoſant ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiſcation des exemplaires contrefaits, de quinze cens livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, l'autre tiers audit Expoſant, & de tous dépens, dommages & interêts, à la charge que ces Preſentes ſeront enregiſtrées tout au long ſur le Regiſtre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, & ce dans trois mois de la date d'icelles, que l'impreſſion de ce Livre ſera faite dans notre Royaume & non ailleurs ; & que l'Impétrant ſe conformera en tout aux Reglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725 ; & qu'avant que de l'expoſer en vente le Manuſcrit ou Imprimé qui aura ſervi de copie à l'impreſſion dudit Livre, ſera remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée ès mains de notre très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France, le Sieur FLEURIAU D'ARMENONVILLE Commandeur de nos Ordres ; & qu'il en ſera enſuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notre très-cher &

féal Chevalier Garde des Sceaux de France le Sieur FLEURIAU D'ARMENONVILLE, Commandeur de nos Ordres, le tout à peine de nullité des Presentes, du contenu desquelles Vous mandons & enjoignons de faire jouir l'Exposant ou ses ayans cause pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement; Voulons que la copie desdites Presentes qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin dudit Livre, soit tenue pour dûement signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amez & feaux Conseillers & Secretaires foi soit ajoutée comme à l'Original; Commandons au premier notre Huissier ou Sergent de faire pour l'execution d'icelles tous Actes requis & necessaires sans demander autre permission, nonobstant Clameur de Haro, Charte Normande & Lettres à ce contraires. Car tel est notre plaisir. DONNE' à Paris le douziéme jour de Decembre, l'An de grace mil sept cens vingt six, & de notre Regne le douziéme. Par le Roy en son Conseil.

Signé, DE S. HILAIRE, *avec paraphe.*

Registré sur le Registre VI. *de la Chambre Royale des Libraires Imprimeurs de Paris*, N°. 544, fol. 434. *conformément aux anciens Réglemens, confirmés par celui du* 28 *Fevrier* 1723. *A Paris le dix-neuf Decembre mil sept cens vingt-six.*
Signé, BRUNET, Syndic.

APPROBATION DU T. R. P. SUPERIEUR GENERAL de la Congregation de l'Oratoire.

JESUS ✠ MARIA.

NOUS Pierre-François de la Tour, Prêtre & Superieur General de la Congregation de l'Oratoire de JESUS-CHRIST notre Seigneur, Vû par Nous le Privilege du Roy & l'Approbation des Examinateurs, permettons à Jacques Quillau, Libraire & Imprimeur, d'imprimer un Livre intitulé, l'*Analyse Démontrée*, composé par le Pere Charles REYNEAU, Prêtre de notre Congregation, conformément au Privilege à nous accordé par les Lettres Patentes du Roy en date du 26 Mars 1689, enregistrées au Grand Conseil le 25 Avril de la même année, par lesquelles il est défendu à tous Libraires & Imprimeurs d'imprimer & vendre aucuns Livres composez par ceux de notre Congregation, sans notre permission expresse, sous les peines portées par ledit Privilege. Donné à Paris ce trentiéme Decembre mil sept cens sept.

Signé, P. F. DE LA TOUR.

De l'ordre de notre Reverend Pere General
Signé, G. F. DEMOUTEUL, Secretaire.



